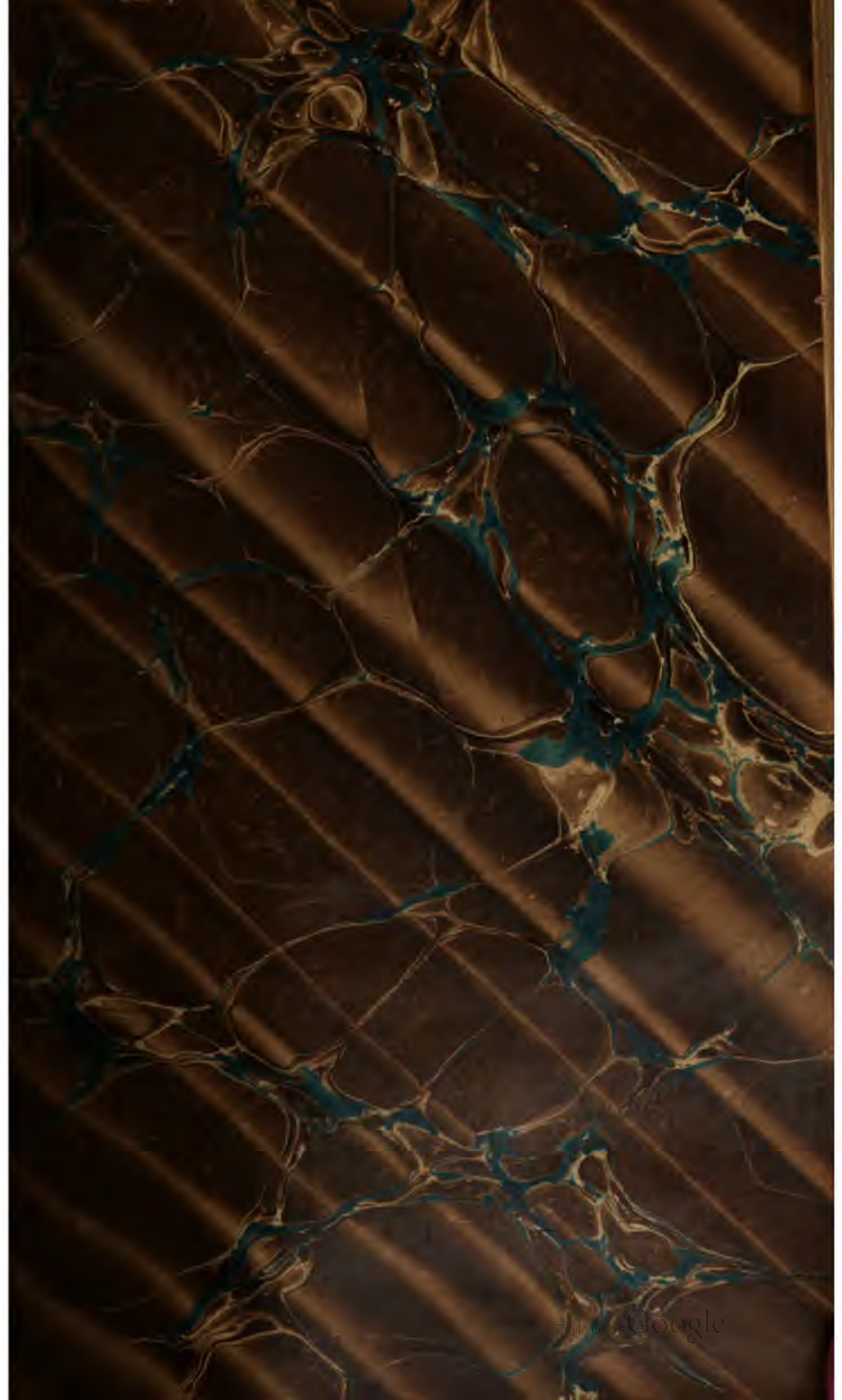

1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



THÉORIE ANALYTIQUE

DU

SYSTÈME DU MONDE.

IMPRIMERIE DE BACHELIER,
rue du Jardinet, n° 12.

THÉORIE ANALYTIQUE

DU

SYSTÈME DU MONDE,

PAR

Philippe Gustave le Doulcet G. DE PONTÉCOULANT,

Lieutenant-Colonel au Corps royal d'État-Major, Officier de la Légion d'honneur, Membre de la Société royale et de la Société astronomique de Londres ; des Académies des Sciences de Berlin, de Palerme, etc.

TOME QUATRIÈME.



PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

POUR LES MATHÉMATIQUES,

QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

1846

Aux Mânes

DE M. S.-D. POISSON.

.... me tenuit moriens deficiente manu!
OVIDE, Élégie sur la mort de Tibulle.

AVANT-PROPOS.

Vers la fin de la cruelle maladie qui l'enleva trop tôt à la science, qu'il éclairait d'une si vive lumière, un jour M. Poisson me manda près de lui, et à peine j'avais eu le temps de l'interroger sur ses souffrances, qu'avec cet accent animé qu'il avait toujours dès qu'il abordait dans la conversation l'une de ces matières qui avaient fait l'objet des études de toute sa vie, il me dit : « Eh bien, où en êtes-vous de la théorie de la Lune? — J'ai déjà beaucoup travaillé, répondis-je; mais c'est un abîme sans fond, et je suis effrayé de tout ce qui me reste à faire. — Vous avez tort, reprit M. Poisson; vous avez entrepris un ouvrage utile, et il faut l'achever. Chacun de nous doit apporter une pierre à l'édifice scientifique dont le XVII[e] siècle a jeté les fondemens. Si j'eusse vécu, j'aurais réuni et complété mes recherches sur la *Physique mathématique*; c'était la tâche que je m'étais prescrite. Vous avez choisi pour la vôtre de rendre plus faciles les abords de la théorie du Système du Monde; la question compliquée des perturbations lunaires vous en offre une belle occasion, ne la laissez pas échapper. — Mais, répliquai-je avec découragement, vous le savez, le temps où nous vivons n'est pas celui des ouvrages de

longue haleine : tout s'improvise, tout se fait à la hâte, et lorsque j'aurai consumé dix ans de ma vie sur une théorie abstraite, à la recherche de quelques perfectionnemens que les savans de profession pourront seuls apprécier, quel sera le prix de mon travail, et quelle voix assez puissante se chargera de le tirer de l'oubli et d'en faire valoir le faible mérite? — La mienne, si je vis, répondit le grand géomètre; et si je n'y suis plus,... eh bien, il vous restera la conscience d'avoir fait une œuvre utile et durable. La certitude de laisser après soi quelque trace de son passage en ce monde est, croyez-moi, une pensée consolante; elle occupe la vie, et elle aide à mourir! »

Telles furent les dernières paroles que m'adressa cette voix bienveillante, qui avec tant de bonté avait accueilli ma jeunesse et encouragé mes premiers pas dans la carrière difficile de la science. Quelques jours après, M. Poisson n'était plus; mais, dans l'émotion de notre dernière entrevue, j'avais fait la promesse qu'il avait exigée de moi, et, depuis ce moment, je n'ai pas passé un seul jour sans tenter un nouvel effort pour l'accomplir. Enfin, après plusieurs années de pénibles recherches, mon travail touche à son terme; mais j'ai eu besoin de me rappeler son origine et la volonté sacrée à laquelle j'avais obéi en l'entreprenant, pour m'excuser, à mes propres yeux, de produire une telle masse de formules et de chiffres, dans un temps où les études sérieuses languissent abandonnées, et où le culte des intérêts matériels semble avoir envahi jusqu'au noble domaine de la science.

En effet, ce XIXe siècle, que la découverte de deux

nouvelles planètes, Cérès et Pallas, avait ouvert d'une manière si brillante pour les sciences astronomiques, n'a pas atteint encore la moitié de son cours, et déjà l'heureuse impulsion qui lui avait été donnée par les hommes de génie qui jetèrent tant d'éclat sur ses premières années, semble s'être tout-à-fait éteinte, ou du moins elle a totalement changé d'objet. Les recherches scientifiques, sans doute, sont encore en honneur, et pourrait-il en être autrement dans un pays qui leur doit, comme la France, une partie de sa gloire? mais c'est surtout vers les applications que les esprits studieux ont tourné leurs efforts : on cultive encore la science quand on n'a rien de mieux à faire; mais on ne se contente plus, comme autrefois, des paisibles jouissances qu'elle procure; pour prix du culte qu'on lui rend, on exige qu'elle donne, en compensation, les honneurs et la fortune : on ne lui demandait, autrefois, qu'un peu de gloire et de renom. Les sciences se sont faites les auxiliaires de l'industrie, et l'on met au rang de brillantes chimères celles qui n'ont pour objet que le progrès et le triomphe de l'intelligence humaine.

Si ces réflexions sont fondées, qui pourrait s'étonner que la science, à son tour, se montre avare et rebelle envers des hommes qui ne la cultivent que dans des intérêts mercantiles! Aussi avons-nous vu rapidement décliner cette suprématie que la France s'était acquise depuis près de deux siècles par les conquêtes du génie. Nous avons vu disparaître successivement ces illustres géomètres qui s'étaient pour ainsi dire associés à la gloire des Lagrange et des Laplace,

dont ils avaient été les contemporains, et qui avaient puissamment contribué aux rapides progrès que leurs travaux ont fait faire aux sciences mathématiques et astronomiques. Nous avons vu s'éteindre, sous nos yeux, *Fourier, Legendre, Prony, Puissant, Lacroix, Poisson,* et sur la tombe de ce dernier nous avons entendu retentir ces paroles, qui ont eu tous les caractères d'une prophétie trop tôt accomplie : « On se demande si, malgré toute sa fécondité, la France réparera de telles pertes, et si nous aurons le malheur de voir l'Académie des Sciences descendre du haut rang qu'elle occupait. » (*Discours prononcé par* M. ARAGO.)

Nous concevons, toutefois, que l'éclat que tant d'hommes illustres ont répandu sur la carrière qu'ils ont si glorieusement parcourue, ait pu décourager leurs successeurs et les ait portés à chercher des routes nouvelles, loin des sentiers battus et des champs déjà moissonnés. Mais c'est là une erreur grave, contre laquelle les jeunes géomètres doivent se prémunir. La mine féconde qu'ont ouverte les géomètres du dernier siècle n'est pas épuisée par les trésors qu'elle leur a prodigués, et l'on peut l'exploiter longtemps encore avec succès, en la creusant plus avant. Dans la théorie du Système du Monde, par exemple, les phénomènes généraux, les vérités les plus saillantes, celles qui étaient pour ainsi dire à la surface du sol, ont été le prix des premiers efforts qu'on a faits pour les découvrir; mais il en reste encore qui, plus profondément enfouis dans le champ de la science, ne peuvent être atteints que par des travaux opiniâtres et par des études persévérantes. Tendre continuelle-

ment à rapprocher les résultats de l'observation de ceux que donne la théorie, tel est le but qu'un esprit juste doit désormais se proposer dans l'étude de l'Astronomie mathématique. Les géomètres du dernier siècle ont établi, pour y parvenir, de larges méthodes d'investigation, des formules fécondes, qui recèlent dans leur généralité des vérités encore inconnues et d'innombrables découvertes pour l'avenir. Armé de ces formules, le jeune géomètre, en quelques heures de travail, peut pénétrer plus avant dans la connaissance des mouvemens célestes que ne l'ont fait ceux mêmes qui les ont inventées. Les nouvelles méthodes ont produit des résultats bien extraordinaires, disait dernièrement, avec beaucoup de raison, un géomètre aussi spirituel que profond (1); elles ont pu en quelque sorte se substituer au génie et y suppléer. Le caractère spécial des sciences exactes, c'est que les travaux de ceux qui les cultivent se superposent pour ainsi dire les uns aux autres; en sorte qu'il peut y avoir, dans les progrès qu'elles font, un temps d'arrêt, un moment de repos, pendant lequel elles semblent stationnaires, mais qu'on n'a pas à craindre, du moins, de les voir rétrograder, ou que leur lumière s'obscurcisse. Il faut donc regarder l'analyse, par laquelle les grands géomètres du siècle dernier sont parvenus à pénétrer le mécanisme des cieux, qui, sans ce précieux auxiliaire, aurait sans doute toujours échappé, par sa complication, aux efforts de l'esprit humain, comme une langue désormais fixée, et dont il ne

(1) M. Libri; *Vie de Fermat.*

s'agit plus que d'étendre les applications et de généraliser les formules. La recherche des méthodes nouvelles est sans doute plus séduisante et surtout moins laborieuse; mais en s'y livrant avec trop d'ardeur on risque, comme nous l'avons vu souvent, de se consumer en vains efforts et d'arriver, en définitive, par une route pénible, ét après avoir entassé formules sur formules, à des résultats obtenus à moins de frais et depuis longtemps rangés dans l'ordre des vérités acquises à la science. C'est donc par un heureux choix des méthodes recommandées par les brillans résultats qu'elles ont déjà produits, c'est en poussant plus loin ces développemens, c'est en s'appliquant surtout à rechercher avec soin toutes les quantités qui peuvent devenir sensibles par les approximations successives, qu'on est assuré de s'approcher de plus en plus de la vérité, et de faire faire de nouveaux progrès à l'Astronomie théorique. Pour elle, l'analyse n'est qu'un instrument utile, dont il faut bien plus chercher à étendre la portée qu'à varier les formes.

Mais c'est surtout vers l'Astronomie pratique que, par de nombreux encouragemens, par des récompenses justement accordées et propres à stimuler l'émulation, il serait bon de porter tous les efforts des jeunes gens qui montrent du goût pour les études astronomiques. C'est dans cette branche de nos connaissances scientifiques que le besoin d'une sage et utile direction se fait principalement sentir; et nulle part on n'aperçoit davantage l'influence qu'un grand homme peut exercer sur les parties mêmes de la

science qui n'ont point été l'objet de ses études spéciales. Les travaux, les conseils, les encouragemens de Laplace, ont créé autour de lui des astronomes distingués; Delambre, Burckhardt, Bouvard lui ont prêté le secours de leurs observations, et se sont fait honneur de réduire en nombres ses belles conceptions analytiques. La France avait alors reconquis le rang qu'il lui appartient d'occuper dans toutes les branches des sciences naturelles; mais, soit incurie, soit par un malheureux concours de circonstances, il faut l'avouer, c'est surtout dans le domaine de l'Astronomie pratique qu'elle est aujourd'hui menacée de perdre la suprématie qu'elle s'était un moment arrogée. Cependant, c'est là qu'il existe évidemment une lacune que tous les hommes qui s'intéressent aux progrès des sciences doivent désirer de voir combler. L'Astronomie théorique, qui s'avance à grands pas vers son but, est continuellement arrêtée dans sa marche par les retards de l'Astronomie pratique. Les données qu'elle est obligée de lui emprunter pour la réduction de ses formules ne sont pas arrêtées d'une manière certaine. Des élémens indispensables pour la réduction des observations ellesmêmes, et qu'il serait de la plus haute nécessité d'établir avec une rigoureuse précision, ont des valeurs différentes selon les astronomes qui les ont déterminés. Ainsi, la constante de l'aberration est de 20″,253 selon Delambre, de 20″,68 selon Bessel, de 20″,37 selon le docteur Brinckley, etc. On n'est pas plus d'accord sur la valeur du coefficient de la nutation, cet autre élément nécessaire à la réduction de toutes les obser-

vations astronomiques : Bradley l'a trouvé de 9″,00, Mayer, de 9″,65; Maskelyne, de 6″,55; Laplace, de 9″,40; M. Lindenau, de 8″,977; le docteur Brinckley, de 9″,25; d'autres astronomes, enfin, lui assignent des valeurs plus ou moins éloignées des précédentes, et cependant une légère différence de quelques dixièmes de seconde dans l'expression du coefficient de la nutation en produit une considérable dans la valeur de la masse de la Lune, dont la détermination est liée à ce coefficient par la théorie. Une longue série d'observations entreprises tout exprès pourrait seule décider de la préférence à donner aux diverses Tables de réfractions proposées par plusieurs géomètres également recommandables. Mais, pour nous renfermer dans les limites du sujet spécial que nous traitons en ce moment, nous demanderons aux astronomes pratiques de déterminer, avec plus de précision qu'on ne l'a fait jusqu'ici dans la théorie de la Lune, le coefficient de l'équation parallactique, qui, par sa comparaison à son expression analytique, fait connaître la parallaxe solaire avec plus d'exactitude que tous les autres phénomènes dont on peut se servir pour la mesurer (1). Une autre inégalité

(1) Dans un Rapport présenté à la Chambre des Députés en 1842, et qui contient une Notice étendue sur les travaux de Laplace, l'auteur, M. Arago, semble attribuer à l'illustre géomètre la découverte de l'*équation parallactique* et l'ingénieuse idée de déterminer la parallaxe du Soleil au moyen de l'une des inégalités périodiques de notre satellite. Dans son enthousiasme, bien justifié d'ailleurs au point de vue où il se place, il s'écrie : « Eh bien, Laplace a résolu numériquement le problème de la parallaxe sans

du mouvement lunaire non moins importante à bien connaître, parce qu'elle peut donner le véritable aplatissement du sphéroïde terrestre, dégagé de toutes les circonstances locales qui influent sur sa détermination lorsqu'on cherche à la déduire des mesures directes prises à la surface de la Terre, nous voulons parler de l'inégalité du mouvement en longitude qui dépend de la distance du nœud de l'orbite lunaire à l'équinoxe mobile du printemps, a également besoin de correction (1). Quoique peu différentes, les

---

base d'aucune sorte; il a déduit la distance du Soleil d'observations de la Lune faites dans un seul et même lieu!... Telle est la combinaison heureuse à l'aide de laquelle Laplace a résolu le grand, le célèbre problème de la parallaxe! etc. » Ne laissons pas de semblables erreurs se propager sous le pathos et les grands mots dont on les couvre; à chacun sa gloire: Laplace est assez riche sous ce rapport pour n'avoir besoin de rien emprunter aux autres. Voici ce qu'il a dit lui-même : « Mayer avait déterminé la parallaxe solaire en comparant aux observations l'expression analytique de l'inégalité lunaire parallactique, qui a pour facteur cette parallaxe. J'ai mis un soin particulier à déterminer cette expression. » (*Mécanique céleste*, tome V, page 362.) Que ce langage clair, noble et modeste, est bien celui qui convient à la science! Cette justice, rendue par Laplace à son célèbre devancier, l'honore bien davantage que des éloges ampoulés sur des découvertes qui ne lui appartiennent pas; et c'est bien le cas de dire, avec l'auteur de la Notice que nous avons citée : « Les mathématiques ont été, de tout temps, les adversaires implacables des romans scientifiques. »

(1) Dans le Rapport dont il vient d'être question, et qui a été inséré dans l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* pour 1844, on lit, page 310 : « La Terre est aplatie. Un corps aplati n'attire pas comme une sphère. Il doit donc y avoir dans le mouvement,

valeurs du coefficient de cette inégalité, déterminées par Bürg et Burckhardt, ne sont pas exactement les mêmes. Un point plus essentiel encore, parce que c'est le seul qui reste à éclaircir dans la théorie difficile du mouvement lunaire, c'est de vérifier si le moyen mouvement de notre satellite est affecté d'une inégalité dont la longue période serait de 184 ans à peu près, et dont la cause, si cette inégalité existe réellement, aurait jusqu'à présent échappé à l'appréciation des géomètres. Enfin, un travail indispensable, et qui nous semble intéresser l'honneur scientifique même de la France, c'est celui que réclame la construction de nouvelles Tables lunaires. L'édition des *Tables* de Burckhardt, les plus précises qu'on ait établies jusqu'ici avec le secours des observations, est aujourd'hui complétement épuisée; les savans et les navigateurs ne pourraient s'en procurer un seul exem-

---

nous avons presque dit dans l'allure de la Lune, une sorte d'empreinte de l'aplatissement terrestre. Telle fut, dans son premier jet, la pensée de Laplace;... son ardeur et sa puissance analytique surmontèrent tous les obstacles, etc. » C'est à Lagrange qu'est due l'heureuse idée d'avoir le premier introduit dans les équations différentielles du mouvement lunaire l'ellipticité de la Terre; mais il est juste de reconnaître que Laplace, *vingt-sept* ans plus tard, en calculant des termes que Lagrange avait négligés parce qu'il les croyait insensibles, obtint un brillant résultat, qui n'avait point échappé à la pénétration de son émule, mais que son peu de goût pour les calculs numériques l'avait peut-être seul empêché d'atteindre. Ce sont là des faits si remarquables dans l'histoire de la science, qu'il n'est permis ni de les ignorer, ni de les altérer. (*Voir*, pour plus de détails, l'Introduction de cet ouvrage, page 24.)

plaire, quelque prix qu'ils y missent, et c'est à nos bibliothèques publiques qu'il faut recourir lorsqu'on est obligé de les consulter. Il ne s'agit pourtant pas ici d'une théorie abstraite et sans application usuelle, mais de l'un de ces bienfaits dont la science fait profiter l'humanité tout entière. Les Tables lunaires résolvent mieux que tout autre moyen le grand problème de la détermination des longitudes terrestres; elles servent au navigateur à corriger les erreurs de son estime et à se guider sur les mers, sans s'égarer dans sa route, sans se briser sur les écueils dont elles sont hérissées. Que dirait-on d'une grande nation qui, chaque année, consacre des sommes considérables à l'accroissement de ses forces navales, et qui laisserait dans l'oubli cet auxiliaire indispensable de tout voyage de long cours? Une telle incurie n'accuserait-elle pas mieux que toutes nos paroles l'état d'abandon et de délaissement où sont tombées en France les études astronomiques?

Mais, pour que le travail indispensable dont nous parlons ait véritablement tous les avantages qu'on en doit attendre, il faut que quelque astronome habile et laborieux soit chargé du soin de revoir les observations fondamentales qui servent de base aux *Tables* de Burckhardt. Il est probable que quelques-unes d'entre elles ne sont pas suffisamment correctes, ou que des erreurs se sont glissées dans leur réduction, et je ne doute pas qu'en écartant ces observations défectueuses, ou bien en faisant disparaître ces incorrections, on ne parvînt à établir un accord presque complet entre les résultats de l'observation et ceux

de la théorie. Nous avons donc lieu d'espérer que le corps savant (1) qui est dépositaire des manuscrits de Burckhardt sentira toute l'importance du dépôt qui lui est confié, et qu'il ne tardera pas plus longtemps à nous donner une nouvelle édition de ses *Tables* corrigées. Au reste, si notre attente à cet égard était encore trompée, le but que nous avons en vue n'en serait pas moins atteint dans un avenir peu éloigné. En effet, on sait qu'un beau travail est entrepris depuis plusieurs années à l'Observatoire royal de Greenwich, par les soins de son habile directeur, pour le perfectionnement des Tables de la Lune : ce travail, que le gouvernement britannique a largement encouragé par ses libéralités intelligentes, aura bientôt rempli la lacune qu'il s'agit de combler dans la théorie lunaire ; seulement, la science sera encore une fois obligée d'accorder à la laborieuse Angleterre une palme que la France semblait, sans effort et sans peine, appelée à recueillir (2).

---

(1) Le Bureau des Longitudes.

(2) On lit, dans la Notice scientifique déjà plusieurs fois citée (*Annuaire du Bureau des Longitudes* pour 1844) : « L'extrême perfection des Tables de la Lune donne à Laplace le droit d'être rangé parmi les bienfaiteurs de l'humanité. » Peut-être ces expressions d'un panégyriste toujours un peu méridional seraient-elles de nature à donner une fausse idée de l'état actuel de la science, si on n'en restreignait la portée dans de justes limites. Sans doute Laplace, plus encore par ses conseils et ses encouragemens que par ses travaux, a contribué puissamment à rendre plus exactes les Tables lunaires ; mais ces Tables sont bien loin encore d'avoir atteint l'*extrême perfection* que l'auteur de la Notice *prétendue*

En résumé, dans le livre que nous publions aujourd'hui, et qui formera le VIIe de notre *Théorie du Système du Monde*, nous avons abordé, par des méthodes nouvelles, la plus épineuse des questions que présente la *Mécanique céleste*. Nous avons surmonté, avec nos propres forces et sans aucun secours auxiliaire, les nombreuses difficultés qu'elle présente, et que quelques géomètres avaient même regardées comme inextricables. Nos calculs, poussés aussi loin qu'il est possible de le faire sans tomber dans la confusion, ont subi de nombreuses vérifications qui en ont assuré l'exactitude. L'accord des résultats de l'ob-

scientifique leur attribue. Ce que nous avons dit plus haut, et la lecture attentive de cet ouvrage, montreront qu'elles laissent, au contraire, beaucoup à désirer; nous avons lieu d'espérer que les résultats que nous présentons ici contribueront à combler une lacune qui restait encore dans la théorie de la gravitation universelle, et permettront de construire à l'avenir, avec le secours seul de cette théorie, des Tables plus parfaites que celles qu'on avait formées jusqu'ici. Le célèbre directeur de l'Observatoire de Greenwich s'occupe, de son côté, à perfectionner les bases sur lesquelles sont établies les Tables lunaires déduites des seules observations. Nous marchons donc rapidement vers le but que se sont proposé, depuis plus d'un siècle, les géomètres et les astronomes; mais il n'est pas encore atteint. Quant à la juste idée qu'on peut se former des travaux analytiques de Laplace sur la théorie de la Lune, abstraction faite, bien entendu, de ses grandes découvertes, voici ce qu'il en a dit lui-même : « Ma théorie lunaire, exposée dans le livre VII, se rapproche plus des observations que celles qui l'avaient précédée. » Bien entendu qu'il ne s'agit ici que des théories de Clairaut, Euler et d'Alembert. (*Mécanique céleste*, tome V, page 362.)

servation et de l'analyse mathématique est devenu plus complet, et le perfectionnement de la théorie lunaire, qui fait l'objet de ce livre, ne laisse, comme on le verra, sous le rapport de la précision, que bien peu de chose à désirer. Cette théorie, d'ailleurs, comme le dit Laplace, réunit tout ce qui peut donner du prix aux découvertes scientifiques : *la grandeur et l'utilité de l'objet, la fécondité des résultats et le mérite de la difficulté vaincue*. Nous avons donc la conviction d'avoir fait un travail qui doit servir au progrès de la science, et cette pensée est déjà pour nous un ample dédommagement du temps et des soins que nous avons consacrés à son exécution. Puisse l'autorité du nom vénéré sous les auspices duquel nous le présentons aux géomètres et aux astronomes, les disposer à le lire avec intérêt et à le juger avec bienveillance !

TABLE DES MATIÈRES

CONTENUES DANS LE QUATRIÈME VOLUME.

LIVRE VII.

Théorie de la Lune.

NOTES.

ERRATA.

Page 85, ligne 6 en remontant, *au lieu de* $\frac{dK}{d\xi}$, *lisez* $\frac{dR}{d\xi}$

92, 8 en remontant, *au lieu de* n° 3, *lisez* n° 13

109, 4, *au lieu de* $+\frac{81}{32}m^4..$, *lisez* $-\frac{81}{32}m^4$

113, 9 en remontant, *au lieu de* $e \cos 2\xi$, *lisez* $\cos 2\xi$

115, 2 en remontant, *au lieu de* $+\frac{27}{64}m^4$, *lisez* $-\frac{27}{64}m^4..$

121, 7, *au lieu de* $-\frac{9}{2}m^3$, *lisez* $-\frac{9}{2}m^2$

Ibid., 9, *au lieu de* $\frac{3}{2}m^2$, *lisez* $\frac{3}{2}m^3$

125, 5, *au lieu de* $\frac{32795}{54}m^7$, *lisez* $\frac{133799}{216}m^7$

127, 9, *au lieu de* $\frac{19}{12}m$, *lisez* $\frac{19}{12}m'$

160, 4, *au lieu de* $+\frac{15}{32}m$, *lisez* $-\frac{205}{32}m$

161, 6, *au lieu de* m^3, *lisez* m^4

166, 7, *au lieu de* t, *lisez* $t+\varepsilon$

179, 2, *au lieu de* $\frac{15}{16}$, *lisez* $\frac{35}{8}$

189, 17, *au lieu de* $\cos(2\varphi-2\xi+\varphi')$, *lisez* $\cos(2\xi-2\varphi+\varphi')$

264, 4 en remontant, *au lieu de* $-\frac{235}{32}$, *lisez* $-\frac{6845}{384}$

278, 9, *au lieu de* $-\frac{235}{32}m^2e^2$, *lisez* $-\frac{6845}{384}m^2e^2$

279, 12, *au lieu de* $\frac{517}{64}$, *lisez* $\frac{569}{320}$

281, 3, *au lieu de* $\frac{731}{72}$, *lisez* $\frac{6949}{288}$

Ibid., 3 en remontant, *au lieu de* $\frac{1781}{1024}$, *lisez* $\frac{841}{5120}$

283, 7 en remontant, *au lieu de* $+\frac{7097}{384}m^3$, *lisez* $-\frac{53491}{1152}m^2$

284, 12, *au lieu de* $-\frac{101}{512}me^4$, *lisez* $+\frac{7559}{2560}me^4$

Ibid., 15, *au lieu de* $-\frac{3705}{512}m^4e^4$, *lisez* $-\frac{375}{512}me^4$

Page 284, ligne 2 en remontant, *au lieu de* $+\frac{168211}{1536}m^3+\frac{43411183}{18432}m^4$, *lisez* $-\frac{168211}{1536}m^3-\frac{43411183}{18432}m^4$

286, 10, *au lieu de* $\frac{60359}{3072}m^3$, *lisez* $\frac{70093}{6144}m^3$

288, 4, *au lieu de* $+\frac{7097}{384}m^3$, *lisez* $-\frac{53491}{1152}m^3$

291, 5 en remontant, *au lieu de* $-\frac{76237}{2304}m^3$, *lisez* $+\frac{47503}{1536}m^3$

321, 8, *au lieu de* $-\frac{9}{16}m^3$, *lisez* $-\frac{9}{16}m^3-\frac{1169}{256}m^4$

324, 9 en remontant, *au lieu de* $-\frac{15}{16}m^3\,\gamma\,e\cos\varphi$, *lisez* $-\frac{15}{16}m^3\,\gamma^2\,e\cos\varphi$

333, 3 en remontant, *au lieu de* $-\frac{27}{8}m^2e'^2$, *lisez* $-\frac{27}{8}m^2\gamma^2$

334, 6, *au lieu de* $-\frac{549}{94}$, *lisez* $-\frac{549}{64}$

335, 10, *au lieu de* $(4m^2-1)-a_{57}$, *lisez* $(4m^2-1)\,a_{57}$

336, 9, *au lieu de* $-\frac{m^2}{2}$, *lisez* $+\frac{m^2}{2}$

Ibid., 13, *au lieu de* $\frac{110305}{2048}$, *lisez* $\frac{12629}{256}$

380, 4 en remontant, *au lieu de* $c_{196}\,\gamma^3\sin(\varphi+3\eta)$, *lisez* $c_{196}\,e\,\gamma^3\sin(\varphi+3\eta)$

Ibid., 5 en remontant, *au lieu de* $c_{195}\,\gamma^3\sin(\varphi-3\eta)$, *lisez* $c_{195}\,e\,\gamma^3\sin(\varphi-3\eta)$

381, 1, *au lieu de* c_{251}, c_{252} etc., *lisez* c_{194}, c_{196}, etc.

Ibid., 2, *au lieu de* q_{251} et q_{252}, *lisez* q_{191} et q_{195}

386, 6 en remontant, *au lieu de* $\frac{315}{256}$, *lisez* $-\frac{45}{128}$

Ibid., 5 en remontant, *au lieu de* $-\frac{27045}{4096}$, *lisez* $-\frac{3375}{512}$

429, 6, *au lieu de* $-\frac{27}{64}m^2\gamma^4$, *lisez* $+\frac{27}{64}m^2\gamma^4$

437, 5, *au lieu de* $\frac{2475}{128}m^3$, *lisez* $\frac{2475}{64}m^3$

Ibid., 8, *au lieu de* $+\frac{27}{64}m^2\gamma^2$, *lisez* $-\frac{27}{64}m^2\gamma^2$

449, 2 en remontant, *au lieu de* **Masson**, *lisez* Mason

451, 19, *au lieu de* $t-\varphi-\varphi'$, *lisez* $\xi-\varphi+\varphi'$

496, 10, *au lieu de* $\cos(3ft-2ct-2gt+\omega+2\theta)$, *lisez* $\cos(3ft-ct-2gt+\omega+2\theta)$

THÉORIE ANALYTIQUE

DU

SYSTÈME DU MONDE.

LIVRE SEPTIÈME.

Théorie des Mouvemens des satellites.

Nous avons développé, dans le livre précédent, la théorie des inégalités des planètes principales, résultant de leurs actions mutuelles ou des causes secondaires qui influent sur leur marche; nous nous occuperons, dans ce livre, des inégalités des mouvemens des satellites. Ces inégalités ne sont pas moins intéressantes à connaître que les premières, soit par les phénomènes nouveaux que présentent les mouvemens des satellites, soit par l'utilité dont ils peuvent être pour la mesure des longitudes terrestres. Jusqu'ici la théorie de ces astres, du moins du principal d'entre eux, le satellite de la Terre, avait été traitée par des méthodes particulières; nous nous sommes attaché à n'employer ici que les formules dont nous avions fait usage dans la théorie des planètes; en sorte qu'il suf-

fira de développer les formules renfermées dans le *second livre,* pour embrasser à la fois les mouvemens de translation et de rotation de tous les corps célestes. Cette uniformité de l'analyse, en même temps qu'elle permet de mieux saisir l'analogie des phénomènes entre eux, doit rendre sans aucun doute plus attrayante et plus facile l'étude de la théorie du système du monde; ce qui est le but principal que nous nous sommes proposé dans cet Ouvrage.

THÉORIE
DU MOUVEMENT DE LA LUNE
AUTOUR DE LA TERRE.

La Lune est, sans contredit, de tous les corps célestes, celui dont la théorie présente le plus d'intérêt, par ses nombreuses et importantes applications; mais c'est aussi celui dont l'étude offre le plus de difficultés, par le grand nombre et la variété des inégalités auxquelles son mouvement est assujéti. Quelques-unes de ces inégalités ont d'abord été découvertes par les observateurs; mais il y avait loin de là à la connaissance exacte de toutes les perturbations de la Lune, et si l'observation a suffi aux astronomes pour acquérir ces premières notions de sa marche, on peut dire que sans le secours de la théorie, qui leur a donné le moyen de démêler les argumens des diverses inégalités lunaires dont ils ont ensuite déterminé les coefficients par l'observation, des siècles se seraient encore écoulés avant que les tables de la Lune n'eussent acquis le degré de perfection qu'elles ont atteint aujourd'hui.

Newton, après la découverte du principe de la pesanteur universelle, entreprit le premier d'en faire l'application à la théorie de la Lune. Les recherches

auxquelles il se livra sur cet objet, forment le troisième livre des *Principes de la Philosophie naturelle*, que Laplace n'hésite pas à regarder comme l'une des parties les plus profondes de cet admirable ouvrage. Newton, par des considérations très ingénieuses, et par des méthodes empruntées à la synthèse, parvient à déterminer plusieurs des inégalités lunaires signalées par les astronomes, et les trouve conformes, à très peu près, aux valeurs que ces derniers avaient déduites de leurs observations. C'en était assez pour fournir une confirmation remarquable du principe de la gravitation, et pour montrer que la différence des actions du Soleil sur la Terre et sur la Lune, était la véritable cause des nombreuses anomalies du mouvement de notre satellite. Les recherches et les méthodes de Newton ont eu aussi l'immense avantage de faciliter aux astronomes la construction de tables de la Lune plus parfaites que celles que l'on avait eues jusque là; mais les considérations géométriques qu'il avait employées à dessein, afin de vulgariser pour ainsi dire ses principes, ne suffisaient point pour pénétrer bien avant dans une théorie aussi compliquée, et l'analyse seule pouvait conduire à la détermination exacte de toutes les inégalités qui troublent le mouvement elliptique de la Lune autour de la Terre, et à la connaissance de sa véritable orbite.

D'Alembert et Clairaut osèrent aborder les premiers cette importante question. Ils appliquèrent à la Lune la solution qu'ils avaient donnée du problème des trois corps, c'est-à-dire les équations différentielles qu'ils avaient trouvées pour le mouve-

ment d'un corps attiré par deux autres corps, en supposant l'action de la force principale qui sollicite l'astre troublé, fort supérieure à celle des forces perturbatrices, ce qui est le cas des planètes et de la Lune. Ces deux géomètres parvinrent à déterminer de cette manière, avec facilité, non-seulement les inégalités que Newton avait obtenues par des moyens beaucoup plus compliqués, mais encore un grand nombre d'autres inégalités qu'il n'avait pas considérées, ou qu'il avait inutilement tenté de rattacher à sa théorie. Parmi les premiers travaux analytiques qui eurent pour objet les mouvemens de la Lune, on n'oubliera pas non plus ceux d'Euler, qui avait, en 1747, envoyé à l'Académie des Sciences de Paris, une solution du problème des trois corps, antérieure de quelques mois à celle présentée par D'Alembert et Clairaut. Cette solution contenait une application au mouvement de Saturne; Euler en déduisit aisément le mouvement du nœud de l'orbite lunaire et les inégalités de son inclinaison à l'écliptique, et il publia ensuite, en 1753, un ouvrage spécial sur la théorie de la Lune. Mais de ces trois grands géomètres, Clairaut est, sans contredit, celui dont les travaux, toujours dirigés vers l'utilité pratique, seul but digne des efforts d'un esprit supérieur, ont le plus contribué à faire sortir la théorie lunaire de l'état d'imperfection où elle était encore, même après Newton. Il réunit, dans une pièce imprimée en 1764, et qui avait remporté le prix proposé par l'Académie de Saint-Pétersbourg, en 1750, les différens résultats auxquels il était parvenu sur ce sujet, et les nouvelles tables lunaires qu'il en dé-

duisit, quoique encore imparfaites et éloignées du haut degré de précision qu'exigent les besoins de la navigation et de la géographie, pouvaient déjà permettre d'espérer qu'on parviendrait à former, par le seul secours de la théorie, des tables aussi exactes que celles que l'on avait déduites jusque là du concours de la théorie et de l'observation.

Cependant ce n'est que dans ces derniers temps que les géomètres ont vu cet espoir se réaliser, et qu'après un siècle de travaux, on est enfin parvenu à exprimer les coefficiens des diverses inégalités lunaires par des formules assez exactes pour le disputer en précision aux observations même. Depuis long-temps Laplace avait entrepris, pour cet objet, d'importantes recherches; mais, détourné de ce travail par d'autres méditations, il voulut du moins, en excitant l'émulation des géomètres, contribuer d'une autre manière à assurer ce nouveau triomphe de l'analyse. Ce fut sur sa demande que l'Académie des Sciences de Paris proposa pour sujet du prix qu'elle devait décerner en 1820, la formation, par la seule théorie, de tables lunaires assez exactes pour suffire à tous les besoins de la pratique, sans rien emprunter à l'observation que les données indispensables de la question, c'est-à-dire les élémens elliptiques du mouvement lunaire à une époque déterminée. Deux Mémoires, également remarquables, furent couronnés par l'Académie; l'un, de M. Damoiseau, était suivi de tables formées par la conversion en nombres de ses formules analytiques, et ces tables, comparées à un grand nombre d'observations, les

ont représentées avec autant de précision que les meilleures tables employées par les astronomes. L'autre Mémoire, de MM. Plana et Carlini, n'a point été imprimé, et nous ne pourrions juger de son mérite que très imparfaitement, par ce que dit Laplace dans la *Connaissance des Tems* pour 1823, et dans le seizième livre de la *Mécanique céleste*, si depuis cette époque M. Plana n'avait publié un ouvrage très étendu sur le même sujet, où il a développé les méthodes qu'il avait suivies dans son Mémoire fait en société avec M. Carlini.

Ce dernier ouvrage est le plus important de tous ceux qui ont paru sur la théorie des mouvemens lunaires, et mérite une attention toute particulière. Les développemens des formules analytiques ont été poussés si loin, et les détails dans lesquels entre l'auteur semblent offrir de si imposantes garanties de la justesse de ses calculs, que si l'on en excepte quelques inégalités particulières du mouvement de la Lune, qui par leur complication ont échappé à la méthode générale employée par M. Plana, il me paraît difficile d'ajouter rien d'essentiel sous le rapport de l'étendue et de la précision des approximations, aux résultats de ce grand travail. Mais il restait à examiner si, par des voies plus simples que celles que M. Plana ou ses prédécesseurs avaient suivies, il ne serait pas possible d'atteindre le même but qu'ils s'étaient proposé; car le choix des méthodes n'est pas indifférent, surtout dans une théorie aussi vaste et aussi difficile (*)

(*) C'est dans le choix de ces méthodes et dans la prévoyance

que l'est celle de la Lune. Il faut tendre alors à rapprocher, autant que possible, le résultat final des formules primitives dont il est dérivé pour en rendre la vérification plus facile; et ce que l'on doit surtout chercher à éviter, ce sont les opérations inutiles, qui, en compliquant le travail numérique, deviendraient pour le calculateur une source d'erreurs nouvelles.

Ces considérations nous amènent à examiner avec plus d'attention les méthodes, ou plutôt la méthode unique suivie généralement jusqu'à présent dans l'application de l'analyse à la détermination des mouvemens de la Lune. On peut, par le choix arbitraire du système des coordonnées auxquelles on rapporte sa position, varier d'une infinité de manières la solution de ce problème. Les premiers géomètres qui s'en occupèrent, d'Alembert et Clairaut, choisirent pour coordonnées le rayon vecteur projeté sur le plan de l'écliptique, et le mouvement vrai de la Lune rapporté à ce plan; pour former les équations différentielles du second ordre dont la détermination de ces variables doit dépendre, ils supposèrent constant l'élément de la longitude vraie, et exprimèrent la différentielle du temps en fonction de cette longitude. Quant à la latitude, pour la déterminer, ces deux géomètres employèrent, comme Newton, les variations différentielles du mouvement du nœud et de

des quantités qui peuvent devenir sensibles par les intégrations successives, que consiste l'art des approximations, art non moins utile aux progrès des sciences, que la recherche des méthodes analytiques. (LAPLACE, *Connaissance des Tems*, 1823, p. 227.)

l'inclinaison de l'orbite; mais depuis on a trouvé plus simple d'exprimer directement les variations de la latitude par une équation différentielle du second ordre et de même forme que celle du rayon vecteur. Comme ce choix des coordonnées, du moins en ce qui regarde le rayon vecteur et la longitude, a été adopté par Laplace et par presque tous les géomètres qui se sont depuis occupés de la théorie des mouvemens lunaires, il est nécessaire d'en rechercher avec soin les avantages et les inconvéniens. Nous remarquerons d'abord que cette méthode paraît être celle qui se présente le plus naturellement à l'esprit, par la propriété qu'elle a de conduire directement à une équation différentielle entre le rayon vecteur et la longitude projetés sur le plan de l'écliptique, c'est-à-dire à l'équation différentielle de la projection de l'orbite troublée. Or cette équation est assez inutile à la véritable solution du problème, qui consiste moins à connaître la nature de l'orbite troublée, qu'à déterminer à chaque instant la position de la Lune sur cette courbe, en tenant compte de toutes les perturbations dont son mouvement elliptique est affecté. Il faut convenir cependant que l'intégration des équations différentielles formées dans ce système, exigeant seulement que les termes tout connus soient exprimés en séries de *sinus* et de *cosinus* d'angles proportionnels au mouvement vrai de la Lune, et les forces perturbatrices se présentant naturellement sous cette forme, ou du moins pouvant aisément y être ramenées, cette circonstance facilite beaucoup le développement de ces équations. La réduction au contraire

des forces perturbatrices à une autre forme, par exemple, à des séries de *sinus* et de *cosinus* d'angles proportionnels au temps, comme l'exigerait le développement du système d'équations différentielles, où l'élément du temps est supposé constant, offre une opération beaucoup plus pénible. Mais, d'un autre côté, il faut observer que lorsqu'on emploie le système d'équations différentielles où l'on regarde comme constant la différentielle de la longitude vraie, on est obligé, pour rendre possibles les intégrations, de convertir le mouvement vrai du Soleil, qui entre dans l'expression des forces perturbatrices, en fonction de la longitude vraie de la Lune, travail qui ne laisse pas que d'être considérable lorsqu'on veut pousser les approximations aussi loin qu'on le fait aujourd'hui. D'ailleurs, l'intégration de ces formules donne la longitude moyenne de la Lune, son rayon vecteur, et la latitude en fonction de sa longitude vraie, et comme pour la formation des tables les trois variables qui déterminent à chaque instant la position de cet astre doivent être exprimées en fonction du temps, on est obligé de réduire par le retour des suites, la longitude vraie en fonction de la longitude moyenne, et de substituer ensuite cette valeur dans les expressions finies du rayon vecteur et de la latitude. Or cette préparation qu'exigent les formules dont il s'agit, la conversion qu'il faut faire subir ensuite aux résultats qu'on en a déduits pour les adapter aux usages astronomiques, l'inconvénient surtout qu'ont ces formules de ne point conduire directement au but qu'on se propose, me paraissent des imper-

fections qui doivent plus que compenser les avantages que cette méthode semble présenter au premier aperçu, sous le rapport de la simplicité.

Il y a encore à ce sujet une remarque essentielle à faire. On peut considérer de deux manières très différentes le problème des perturbations de notre satellite. Si l'on se propose simplement, comme le dit Laplace, de *rapprocher le plus qu'il est possible l'analyse de l'observation* (*), et si c'est là en effet le seul but de la théorie lunaire, je ne mets pas en doute que la marche qu'il a tracée, et que M. Damoiseau a suivie après lui, en portant plus loin les approximations, ne soit pour cet objet la plus expéditive de toutes. Mais si l'on embrasse la question d'un point de vue plus vaste, comme il est indispensable de le faire, à mon avis, dans l'état actuel de la science, et si l'on demande des expressions *littérales* des trois coordonnées de la Lune qui conviennent à tous les temps, et qui n'aient besoin, pour être converties en tables, que de la substitution des valeurs numériques des élémens arbitraires, que la théorie emprunte à l'observation, je suis convaincu que dans ce cas les formules ordinaires employées dans la théorie des planètes offrent, pour atteindre ce but, sur celles qu'ont proposées d'Alembert et Clairaut, des avantages incontestables. Sans entrer à cet égard dans des détails qui nous mèneraient trop loin, nous nous contenterons d'observer que la conversion que ces formules exigent lorsqu'on envisage la question comme

(*) *Connaissance des Tems* 1823, page 227.

l'a fait Laplace, s'opère sur des séries dont chaque coefficient est exprimé numériquement, et se borne par conséquent à quelques opérations arithmétiques, tandis que dans la solution générale, la conversion s'opère sur des expressions littérales, et double à très peu près le travail qu'on a été obligé de faire pour parvenir à ces expressions. C'est ce dont il est d'ailleurs facile de se convaincre, en étudiant avec quelque attention le grand ouvrage de M. Plana, qui a préféré cette voie longue, mais sûre, à celle qui s'offrait à lui pour arriver directement aux expressions littérales des trois coordonnées de la Lune.

En effet, si l'on choisit pour les trois variables d'où dépend à chaque instant la position de cet astre, sa *longitude vraie* rapportée au plan de l'écliptique, sa *latitude* au-dessus du même plan, et son *rayon vecteur* compté sur l'orbe lunaire, ou plutôt une fonction égale à l'unité divisée par ce rayon vecteur; que si l'on forme ensuite les trois équations différentielles du mouvement de la Lune autour de la Terre, troublé par l'action du Soleil, en regardant comme constant l'élément du temps, ainsi qu'on le pratique ordinairement dans la théorie des planètes, il est évident qu'il suffira de développer et d'intégrer ces équations pour avoir directement les expressions des variables qui déterminent le mouvement troublé de la Lune, sans être astreint aux pénibles conversions que l'autre méthode exige. D'ailleurs, outre les raisons que j'ai déjà données pour justifier ce choix, on voit qu'il établit la plus grande analogie dans les différentes questions du système du monde. La théorie des planètes principales

et celle des satellites, se trouvent ainsi renfermées dans la même analyse, ce qui fait disparaître la seule exception que présentait à cet égard l'ensemble des tables des mouvemens célestes. Plusieurs importans théorèmes relatifs aux mouvemens planétaires, tels que celui de l'*invariabilité des grands axes* et des *moyens mouvemens* peuvent ainsi être aisément appliqués à la théorie de la Lune, et y reçoivent même une extension nouvelle, ce qui n'aurait pas lieu si l'on choisissait tout autre système de formules. Enfin, une classe entière d'*inégalités* particulières au mouvement de la Lune, et très importantes par le jour qu'elles répandent sur plusieurs points du système du monde, sont déterminées avec beaucoup de facilité dans ce système, tandis que les difficultés qu'elles présentent lorsqu'on emploie les formules où la différentielle de la *longitude vraie* est supposée constante, sont telles que Laplace pensait lui-même qu'il fallait tout-à-fait renoncer à l'emploi de ces formules dans ces cas particuliers. Si l'on considère donc que l'uniformité de la méthode rend plus facile l'étude et le rapprochement des différentes parties d'une même théorie, on y verra un nouveau motif pour adopter définitivement la forme que nous proposons de donner aux équations différentielles du mouvement troublé de la Lune.

Pour intégrer ces équations, nous suivrons la méthode d'approximation ordinaire. Nous ferons d'abord abstraction des forces perturbatrices, et nous déterminerons les valeurs elliptiques du rayon vecteur, de la longitude et de la latitude; en substituant ces valeurs dans la fonction perturbatrice, et en l'in-

troduisant ensuite dans les équations différentielles du mouvement troublé, on obtiendra les valeurs des trois coordonnées lunaires exactes jusqu'aux quantités de l'ordre des forces perturbatrices inclusivement; en continuant ainsi l'on obtiendra, par des approximations successives, les valeurs de ces quantités avec le degré de précision qu'on aura résolu d'atteindre. Nous serons conduits ainsi à exprimer chacune des trois coordonnées de la Lune, par des suites de sinus et de cosinus d'angles croissant proportionnellement au temps, dans lesquelles les coefficiens de chaque inégalité seront eux-mêmes exprimés en séries ordonnées par rapport aux puissances ascendantes des excentricités des orbites de la Lune et du Soleil, de leur mutuelle inclinaison, et du rapport du moyen mouvement du Soleil à celui de la Lune, rapport qui est à peu près égal à un *treizième*. Il suffira de substituer dans les séries les valeurs numériques de ces quantités, données par l'observation, pour exprimer en nombres les coefficiens des diverses inégalités de la Lune, et obtenir des expressions qu'il sera ensuite facile de réduire en tables. Telle est donc, après un mûr examen, la solution qui nous a paru la plus complète et la plus simple du problème des perturbations lunaires. Le travail qu'elle exigera pour porter les approximations aussi loin que l'a fait M. Plana, sera cependant encore très considérable; et dans l'état actuel de l'analyse, par la nature même de la question, il paraît bien difficile qu'il en soit autrement; mais du moins ce travail aura l'avantage de conduire directement au but qu'on se propose, d'être par cela

même plus facile à vérifier; et enfin, lorsqu'on se sera assuré de son exactitude, les expressions analytiques qui en résulteront pourront servir dans tous les temps, et feront connaître les valeurs des coefficients des différentes inégalités lunaires, avec une précision toujours croissante à mesure que, par la discussion d'un plus grand nombre d'observations, on perfectionnera les valeurs des élémens arbitraires de la théorie. Dans la méthode de Laplace, au contraire, et c'est là son principal inconvénient, toute vérification est rendue presque impossible, à moins de recommencer en entier un immense travail, et il faut renoncer d'ailleurs à l'avantage de formules qu'on peut rectifier à mesure que les observations nouvelles permettent de déterminer avec plus de précision les élémens arbitraires qu'elles renferment.

M. Poisson, dans le Mémoire qu'il a publié sur le mouvement de la Lune autour de la Terre (*), a senti comme nous tout l'avantage qu'il y aurait à exprimer directement les trois coordonnées de la Lune en fonction du temps; mais il propose de remplacer les équations différentielles relatives à ces trois coordonnées par celles d'où dépendent les six élémens de l'orbite elliptique devenus variables, c'est-à-dire de déterminer d'abord les variations finies de ces élémens par l'intégration de ces six équations, et d'en conclure les variations correspondantes du rayon vecteur, de la longitude et de la latitude, par la substitution dans les expressions de ces trois variables relatives au

(*) *Mémoires de l'Académie des Sciences*, tome X.

mouvement elliptique, des valeurs des constantes arbitraires augmentées de leurs variations. Mais ce procédé, qui peut convenir à la détermination de quelques inégalités particulières, comme le fait voir M. Poisson, conduirait à un travail impraticable par son étendue, si l'on voulait l'appliquer à la détermination de toutes les inégalités lunaires; au lieu de trois indéterminées on en aurait six à calculer, ce qui doublerait les opérations déjà si compliquées que cette question présente; d'ailleurs, comme nous avons déjà eu l'occasion de le remarquer dans la théorie des perturbations planétaires, n° 88, livre II, les inégalités de chacun des élémens de l'orbite elliptique, se fondent pour ainsi dire les unes dans les autres pour former les inégalités du mouvement troublé, et ce n'est que par des réductions plus ou moins pénibles qu'on peut ramener les expressions ainsi obtenues à la forme qu'il convient de leur faire prendre pour la construction des tables, forme sous laquelle elles sont données immédiatement par l'intégration directe des équations différentielles qui déterminent le *rayon vecteur,* la *longitude* et la *latitude.* Il est donc de beaucoup préférable, dans la théorie des planètes, et à plus forte raison dans celle de la Lune, d'employer cette dernière méthode pour la détermination des inégalités simplement *périodiques.* Quant à la méthode de la variation des constantes arbitraires, d'une si grande utilité dans toutes les parties de la théorie du système du monde, on la réservera pour le calcul des *inégalités séculaires* et de quelques autres inégalités d'une forme particulière, dont elle facilite la détermination;

enfin elle pourra servir pour éclairer quelques points importans de cette difficile théorie, par l'avantage qu'offre cette méthode, d'indiquer clairement la formation de chacune des inégalités qui affectent le mouvement troublé.

Après cette digression sur le choix des formules les plus avantageuses pour la détermination des inégalités du mouvement troublé de la Lune, nous allons reprendre l'exposé de cette théorie au point où nous l'avons laissé. Les méthodes ordinaires d'approximation appliquées à l'intégration des équations différentielles du mouvement lunaire, introduisent dans les expressions du rayon vecteur, de la longitude et de la latitude, des arcs de cercle qui les rendraient bientôt inexactes, comme cela a lieu dans un cas semblable relativement aux planètes, n° 90, livre II. Les géomètres qui s'occupèrent les premiers de la théorie de la Lune, sentirent donc la nécessité d'éviter l'introduction de ces arcs, et pour y parvenir, Clairaut imagina un moyen très simple, et qui a été généralement adopté depuis lui. Au lieu de regarder comme invariable l'ellipse primitive de la Lune, il suppose que son périgée et ses nœuds sont mobiles, et il prend pour la partie elliptique du rayon vecteur, de la longitude et de la latitude, les valeurs de ces quantités relatives à cette orbite variable. En substituant ensuite ces valeurs dans les équations différentielles du mouvement troublé, et en comparant les coefficiens des inégalités qui dépendent des mêmes argumens, on obtient des équations de condition au moyen desquelles on détermine les vitesses moyennes du périgée

et du nœud, qu'on avait introduites sous la forme de quantités arbitraires dans les expressions du mouvement elliptique. Clairaut obtint ainsi, par une première approximation, une évaluation à très peu près exacte du mouvement du nœud de l'orbe lunaire; mais son analyse ne donnait au mouvement du périgée qu'une valeur moitié environ du mouvement de ce point indiqué par l'observation. Newton était parvenu, avant lui, à ce résultat singulier, et cette anomalie porta d'abord Clairaut à penser que la loi de la gravitation universelle devait être modifiée relativement à la Lune. Mais ayant fait entrer dans ses calculs la considération de la seconde puissance de la force perturbatrice qu'on avait jusqu'alors négligée, soit dans la théorie de la Lune, soit dans la théorie des planètes, comme ne produisant que des quantités insensibles, Clairaut reconnut que cette seconde approximation doublait à très peu près le mouvement du périgée donné par la première, et que par conséquent le résultat de la loi de la gravitation était encore parfaitement d'accord sur ce point, avec celui qu'avait fourni l'observation. Une seconde approximation ayant suffi pour produire cette coïncidence presque complète, il était intéressant de vérifier si elle se trouverait confirmée par les approximations suivantes. C'est ce qu'a d'abord tenté d'Alembert, en poussant l'approximation plus loin que ne l'avait fait Clairaut, et il a trouvé que la théorie se rapprochait ainsi de plus en plus de l'observation. Aujourd'hui la précision a été portée encore bien au-delà, et le mouvement progressif du périgée de l'orbe lunaire,

aussi bien que celui du nœud, calculés par M. Damoiseau et par M. Plana, dans leurs Mémoires couronnés par l'Académie, ne différaient pas du mouvement observé d'un *vingt-millième* de leur grandeur respective.

Une difficulté d'un ordre plus élevé, qu'a présentée aux géomètres la théorie de la Lune, et qu'ils ont long-temps vainement tenté de surmonter, est celle qu'offrait l'explication de l'*accélération séculaire* remarquée par les astronomes dans son moyen mouvement. Halley, par la comparaison des anciennes éclipses aux modernes, avait le premier soupçonné cette accélération. Tobie Mayer la confirma ensuite par un plus grand nombre d'observations; et en la supposant proportionnelle au carré du temps, il en fixa la quantité à 9″ environ pour le premier siècle, à partir de 1700 (n° 75, livre II). Il restait à découvrir la cause théorique de cette équation séculaire, qui semblait particulière à la Lune, puisqu'aucune équation semblable n'avait jamais été remarquée dans les mouvemens planétaires, et qui paraissait d'ailleurs contraire à l'important théorème de l'*invariabilité des distances* et des *mouvemens moyens* des planètes et des satellites. L'Académie des Sciences de Paris, et plusieurs autres sociétés savantes, mirent plusieurs fois cette question au concours sans en obtenir la solution; enfin Laplace parvint le premier à la véritable cause de cet important phénomène, qui avait coûté aux géomètres tant de recherches infructueuses. En s'occupant de la théorie de Jupiter et de Saturne, il reconnut que les

variations séculaires qui affectent les excentricités de leurs orbites, devaient produire des équations séculaires dans les moyens mouvemens de ces deux planètes. Il transporta aussitôt ce résultat à la Lune, et il trouva que la variation séculaire de l'excentricité de l'orbe solaire, fort peu sensible sur le mouvement de la Terre, acquiérait une grande importance en se réfléchissant pour ainsi dire dans le mouvement de la Lune, et produisait dans son mouvement moyen l'équation séculaire signalée par les astronomes. Cette découverte ayant rappelé l'attention de Lagrange vers un Mémoire qu'il avait publié plusieurs années auparavant, sur les causes qui peuvent produire des inégalités séculaires dans les moyens mouvemens de Jupiter et de Saturne, il reconnut de suite qu'en appliquant à la Lune la formule qu'il avait donnée pour déterminer la variation séculaire de la *longitude de l'époque*, formule qui n'avait produit que des variations insensibles relativement aux planètes, on retrouvait l'équation même d'où Laplace avait déduit la valeur, conforme à l'observation, de l'inégalité séculaire de la Lune. Ainsi l'oubli d'une application numérique si facile, enleva à Lagrange la gloire de l'une des plus belles découvertes dont s'honore l'Astronomie théorique! Toutefois, l'analyse de ce grand géomètre a l'avantage de faire voir que cette inégalité ne fait pas exception au théorème général sur l'invariabilité des moyens mouvemens, puisqu'elle montre en effet que cette inégalité ne résulte pas de la variation de la partie de la longitude moyenne qu'on appelle communément le *mouvement moyen*, mais de

la partie constante de cette longitude qu'on a nommée la *longitude de l'époque*, et qui dans l'orbite troublée devient variable comme les autres élémens du mouvement elliptique, par l'action perturbatrice du Soleil sur la Lune.

Laplace, en même temps qu'il trouvait l'explication de l'équation séculaire de la Lune, découvrit de plus que la même cause produit dans les mouvemens du périgée et des nœuds de l'orbe lunaire des inégalités séculaires, que les astronomes n'avaient pas encore remarquées. Il s'assura qu'en effet ces équations séculaires étaient rendues sensibles par les observations anciennes comparées à celles des Arabes et aux observations plus récentes. M. Bouvard confirma ce résultat en calculant par la théorie toutes les éclipses observées par les Chaldéens, les Grecs et les Arabes, qui nous sont parvenues (*), et il trouva qu'en tenant compte des trois *inégalités séculaires* de la Lune, les conditions nécessaires pour l'accomplissement du phénomène étaient effectivement remplies pour ces diverses éclipses, ce qui n'aurait pas lieu si l'on n'avait point égard aux trois *inégalités séculaires* dont il s'agit, ou si l'on altérait d'une manière sensible les valeurs que leur assigne la théorie.

Parmi les nombreuses inégalités périodiques du mouvement lunaire, il y en a une qui dépend de la distance vraie de la Lune au Soleil, et dont le coefficient a pour facteur le rapport des distances moyennes du Soleil et de la Lune au centre de la Terre. L'ex-

(*) *Connaissance des Tems* pour 1800.

pression analytique de cette équation comparée aux observations, peut servir par conséquent à déterminer la parallaxe solaire, en supposant connue la parallaxe lunaire, et elle a été appelée, par cette raison, *inégalité parallactique*. Mayer est le premier qui ait imaginé de déterminer de cette manière cet élément important des tables planétaires; on a depuis poussé l'approximation beaucoup plus loin qu'il ne l'avait fait dans l'expression analytique du coefficient de cette inégalité, et la comparaison de sa valeur à celle qui lui est assignée par l'observation, a donné pour la parallaxe solaire une valeur qui ne diffère que dans les *centièmes* de seconde de celle qui a été conclue des derniers passages de Vénus sur le disque du Soleil, en 1761 et 1769. Il suffirait même d'une faible altération, soit dans la valeur du coefficient de l'inégalité parallactique déduite de la discussion des observations, soit dans la masse que l'on suppose à la Lune, pour faire disparaître entièrement cette légère différence. Il ne faut pas oublier, d'ailleurs, que les astronomes ne sont point eux-mêmes parfaitement d'accord sur la valeur exacte de la parallaxe solaire, qu'ils ont déduite des observations. Laplace a tiré de cette concordance entre la théorie et l'observation, relativement à cette inégalité, une conséquence très importante: il a fait voir qu'il en résultait la preuve incontestable que l'action du Soleil est à très peu près la même sur la matière de la Terre et sur celle de la Lune, et que la différence, s'il en existe une, ne s'élève pas à la *millionième* partie de cette action.

Nous avons déjà eu l'occasion de parler d'une es-

pèce d'inégalités particulières au mouvement de la Lune, et qui jouent un grand rôle dans sa théorie par les difficultés nombreuses que leur détermination présente. Ces inégalités, qui tiennent le milieu pour ainsi dire entre les *inégalités périodiques* et les *inégalités séculaires,* ne renferment dans leurs argumens que les quantités qui fixent la position du périgée et des nœuds de l'orbe lunaire, et ne sont censées varier par conséquent que par les déplacemens de ces points. Or, quoique les mouvemens du périgée et des nœuds de l'orbite de la Lune soient très rapides comparativement aux variations séculaires des périgées et des nœuds des orbes planétaires, les inégalités dont il s'agit croissent cependant avec une grande lenteur comparativement aux autres inégalités périodiques, et c'est par cette raison que, pour les distinguer, on les a nommées *inégalités à longues périodes.* Deux de ces inégalités méritent spécialement l'attention des géomètres, à cause de leur importance dans la théorie de la figure de la Terre. La première, qui avait été indiquée à Mayer par l'observation, avant que la théorie n'en eût découvert la cause, a pour argument la *distance du nœud ascendant de l'orbe lunaire* à l'*équinoxe mobile.* Lagrange, dans son Mémoire sur l'équation séculaire de la Lune, couronné en 1787, par l'Académie des Sciences, avait eu le premier l'idée d'introduire dans les équations différentielles du mouvement de la Lune, l'ellipticité de la Terre; mais il avait négligé comme insensibles toutes les inégalités résultantes de cette cause, qui dépendent de l'inclinaison de l'orbe lunaire à l'écliptique. Laplace, *vingt-*

sept ans plus tard, en calculant les termes qui avaient échappé à l'analyse de Lagrange, reconnut que l'inégalité à *longue période* soupçonnée par Mayer, était due à l'aplatissement de la Terre, et pouvait fournir un moyen de déterminer cet aplatissement, peut-être avec plus d'exactitude qu'aucun des moyens directs imaginés jusque là pour l'obtenir, parce qu'il a sur eux l'avantage d'être indépendant des circonstances locales qui peuvent modifier les résultats. Laplace a fait voir, en même temps, que cette inégalité devait être accompagnée d'une inégalité périodique en latitude dépendante de la même cause, et dont l'argument est la *longitude de la Lune comptée de la ligne mobile des équinoxes*, ce que Bürg et Burckhardt ont ensuite confirmé par la discussion des observations. La comparaison des expressions analytiques de ces deux inégalités avec les résultats d'un grand nombre d'observations, donne à la Terre un aplatissement à très peu près égal à $\frac{1}{305}$; et, ce qui est remarquable, l'aplatissement conclu de l'inégalité en latitude, ne présente qu'une différence très légère avec celui qui résulte de l'inégalité en longitude. Cet accord prouve que ces inégalités déterminent avec une grande précision la valeur de cet aplatissement, qui coïncide d'ailleurs à très peu près avec celui qui résulte, soit des mesures des degrés du méridien, soit des observations du pendule. Une inégalité à *longue période*, indiquée par la théorie, et qui résulte également de la non-sphéricité de la Terre, présente un résultat non moins curieux de la pesanteur universelle : elle a pour argument la *longitude du périgée de l'orbe lunaire, plus deux fois*

celle du nœud, comptées l'une et l'autre de l'équinoxe mobile. Cette inégalité dépend de la différence des deux hémisphères terrestres de chaque côté de l'équateur; on devait penser, en effet, que les hautes montagnes de l'Asie, l'étendue des continens de l'hémisphère boréal, pouvaient avoir sur l'inégalité résultante de cette cause une influence qu'il était intéressant d'apprécier; mais toutes les recherches qu'on a faites pour déterminer le coefficient de cette inégalité, ont montré qu'il ne s'élevait guère qu'à un *centième* de seconde sexagésimale; il est donc impossible d'espérer que cette inégalité, qui nous aurait donné un renseignement précieux sur la figure de notre globe, puisse être rendue sensible par les observations.

Cependant Bürg, en discutant les observations de Lahire, de Flamsteed, de Bradley et de Maskelyne, avait remarqué entre elles des différences qui lui semblèrent indiquer l'existence d'une nouvelle inégalité à *longue période*, jusqu'à présent inaperçue dans la longitude moyenne de la Lune. Il a ensuite introduit dans ses tables cette inégalité, en lui supposant une période de 180 ans, et en déterminant par les observations son coefficient, qu'il fait monter jusqu'à 15″ sexagésimales. La conformité des périodes de cette inégalité et de celle qui résulte de la non-similitude des deux hémisphères terrestres, pouvait d'abord faire penser que cette anomalie en était la véritable cause; mais l'analyse, comme on vient de le voir, montre que l'inégalité que produit la différence des deux hémisphères terrestres, est absolument insensible, et l'on s'est d'ailleurs assuré qu'il ne peut

exister aucune inégalité d'une aussi longue période, provenant de l'ellipticité du sphéroïde terrestre, dont le coefficient ait une valeur appréciable. Laplace imagina alors que l'inégalité signalée par Bürg pouvait provenir de l'action du Soleil, en supposant son argument proportionnel à la *longitude du périgée lunaire, plus deux fois celle du nœud, moins trois fois la longitude du périgée solaire,* ce qui lui donnerait une période d'environ 180 ans, conformément à ce qu'indique l'observation. Le coefficient de cette inégalité acquerrait, par l'intégration, un très petit diviseur, mais il serait multiplié par un produit du *dixième* ordre relativement aux quantités que l'on considère comme du premier ordre dans le mouvement de la Lune. La petitesse d'un pareil facteur a fait penser qu'il demeurerait toujours insensible; et comme le grand nombre de termes dont il dépend rendrait sa détermination par la théorie presque impossible, on s'est dispensé de le calculer. M. Poisson ne pense pas cependant que les raisons précédentes suffisent pour établir que ce coefficient soit insensible; mais il a démontré que l'action solaire ne peut produire aucune inégalité semblable à celle dont il s'agit, et il croit d'ailleurs que les observations d'où Bürg l'a déduite sont insuffisantes pour la déterminer. Elle ne provient pas non plus de l'action des planètes sur la Lune, qui ne peut produire aucune inégalité à *longue période* dans son mouvement; il faudrait, d'après cela, chercher l'explication de cette inégalité dans

(*) *Connaissance des Tems* pour 1823.

d'autres causes perturbatrices que celles qui ont suffi jusqu'ici pour rendre compte de toutes les inégalités diverses du mouvement lunaire. Quoi qu'il en soit, c'est le seul point qui reste encore à éclaircir dans la théorie de notre satellite; et, comme le dit Laplace, si les observations futures confirment cette anomalie signalée dans le mouvement de la Lune, il sera temps alors d'en rechercher la cause. Toutefois il ne faut pas craindre qu'en attendant, l'exactitude des tables en soit altérée, parce que cette inégalité, à cause de la longueur de sa période, peut, dans l'intervalle d'un demi-siècle, être supposée se confondre avec le moyen mouvement. Il suffira donc aux besoins de la pratique de rectifier de cinquante ans en cinquante ans le moyen mouvement lunaire, jusqu'à ce que l'existence de l'inégalité dont il s'agit soit constatée d'une manière irréfragable.

Nous avons dit que le calcul des inégalités à *longues périodes* présentait, dans la théorie de la Lune, de graves difficultés. Les géomètres qui se sont occupés après Laplace de ces inégalités, avaient employé à leur détermination les formules où l'on suppose constante la différentielle de la longitude vraie de la Lune; mais ces formules ne conviennent pas à ce genre d'inégalités; Laplace en a fort judicieusement apprécié la raison. « Les termes des expressions de ce genre d'inégalités ont pour diviseurs le très petit coefficient du temps dans leurs argumens, ce qui les rend sensibles. La méthode ordinaire conduit, par des intégrations doubles, à des termes qui ont pour diviseur le carré de ce coefficient, et que l'on sait d'ail-

leurs devoir se détruire dans le résultat final; en sorte que ce résultat étant la différence de quantités fort grandes par rapport à lui, devient inexact si l'on n'a pas l'attention de conserver dans les calculs toutes les quantités de son ordre, ce qui exige des considérations délicates et minutieuses. » Aussi la recherche des inégalités dont il s'agit par cette méthode, a-t-elle presque toujours conduit les géomètres qui l'ont employée à des résultats défectueux. La méthode, au contraire, où le temps est pris pour la variable indépendante, n'est pas sujette à cet inconvénient; une propriété remarquable dont jouit la *fonction perturbatrice* lorsqu'elle est développée en série de sinus et de cosinus d'angles proportionnels à la longitude moyenne, dispense alors d'avoir égard aux termes qui acquièrent pour diviseurs le carré du coefficient du temps dans les argumens, en sorte que l'on n'a à considérer que des termes divisés par la première puissance de ce coefficient, termes par cela même beaucoup plus faciles à calculer, et qui doivent seuls d'ailleurs subsister dans le résultat final. Cette méthode, qui évite au calculateur une opération pénible et inutile, mérite donc sans aucun doute la préférence dans ce cas, et nous ne pouvions manquer d'en faire usage, puisque nous l'avons adoptée dans tout le cours de cette théorie comme la plus propre à donner, avec le moins de travail possible, les coefficiens de toutes les inégalités lunaires. En calculant de nouveau, par cette méthode, les inégalités dont les argumens croissent avec une grande lenteur, nous avons été amenés à rectifier quelques inexactitudes

qui s'étaient introduites dans les valeurs qu'on en avait données précédemment, et dont les résultats de Laplace lui-même n'étaient pas exempts (*).

La théorie de la Lune, dont le perfectionnement était si desirable pour les besoins de la navigation et de la géographie, par l'étude suivie qui en a été faite, a encore produit un autre résultat: elle a servi à nous éclairer sur plusieurs points très délicats du système du monde. L'invariabilité de la durée du jour, élément essentiel de tous les calculs astronomiques, est une conséquence de ses équations séculaires. En effet, on sait que la vitesse de rotation de la Terre, comme la position des pôles à sa surface, ne sont assujétis qu'à des inégalités périodiques absolument insensibles, et l'on a conclu de là la constance de la durée du jour : mais si, par quelque cause inconnue, cette durée éprouvait une altération sensible, la comparaison des observations du mouvement de la Lune à sa théorie, fournirait le moyen le plus sûr de le reconnaître. Ainsi l'on trouve que si la durée du jour moyen solaire surpassait maintenant d'un centième de seconde centésimale, celle qu'il avait du temps d'Hipparque, l'équation séculaire de la Lune en serait aug-

(*) Laplace, en rendant compte des deux Mémoires couronnés par l'Académie des Sciences, en 1824, s'exprime ainsi : « Les auteurs des deux pièces ont considéré les inégalités à longues périodes que j'ai indiquées dans le septième livre de la *Mécanique céleste;* mais à cet égard, leur analyse est incomplète. » *Voir* les deux Mémoires que j'ai donnés sur ce sujet [*Compte rendu des séances de l'Académie des Sciences,* 1837, 1er semestre (tome IV, nº 8), et *Connaissance des Tems* 1840].

mentée de 4″,38 pour le siècle actuel, c'est-à-dire de plus du tiers de sa valeur totale, telle qu'elle résulte de la théorie de la gravitation. Les observations ne permettent pas de supposer un accroissement aussi considérable, il est donc certain que depuis Hipparque, la durée du jour n'a pas varié d'un *centième* de seconde centésimale.

Toutes les théories de l'Astronomie physique reposent aujourd'hui sur la supposition que le pouvoir attractif dont la matière est douée, est identiquepour tous les corps de la nature. Des expériences sur des pendules de diverses matières, faites par Newton, et renouvelées depuis par différens physiciens, ont établi que cette loi se vérifiait rigoureusement pour le cas de la pesanteur terrestre. Nous venons de voir que la théorie de la Lune fournissait une confirmation nouvelle de ce principe, en montrant qu'une différence d'un *millionième* dans les actions du Soleil sur la Terre et sur la Lune, troublerait sensiblement l'accord qui existe entre les valeurs de la parallaxe du Soleil, conclues de l'équation parallactique et des observations astronomiques. Les inégalités lunaires dépendantes de l'aplatissement de la Terre, et résultant de l'action que chacune des molécules du sphéroïde terrestre exerce sur la matière de la Lune, offrent une preuve nouvelle que l'attraction des corps célestes les uns vers les autres n'est pas une propriété inhérente à ces corps, mais qu'elle est la résultante de l'action réciproque de toutes leurs molécules.

En résumant ce que nous venons de dire sur la

théorie de la Lune, on voit que, grâce aux travaux des géomètres qui s'en sont occupés sans interruption depuis Newton, elle est arrivée aujourd'hui à un degré de perfection que les forces de l'analyse ne permettent guère de dépasser. D'Alembert avait cru qu'il serait à jamais impossible de déterminer par la théorie seule toutes les inégalités du mouvement lunaire avec une précision suffisante pour les usages de la pratique. MM. Damoiseau et Plana ont victorieusement résolu ce doute, en présentant des formules dont la conversion en nombres peut fournir des tables lunaires pour le moins aussi exactes que celles que les astronomes avaient construites par le secours de la théorie et de l'observation réunies. Toutes les inégalités indiquées par l'observation, *une seule* exceptée, encore son existence même n'est-elle pas bien évidemment constatée, ont été expliquées par la théorie, et elle en a signalé aux astronomes de nouvelles, qui par leur complication auraient échappé pendant des siècles encore à leurs investigations. La Lune, qui par ses éclipses avait donné aux observateurs la première idée de la sphéricité de notre globe, a fourni de nos jours la mesure la plus exacte que nous ayons de son aplatissement. Enfin, sa théorie perfectionnée a répandu sur plusieurs points encore obscurs du système du monde, une clarté nouvelle qu'on aurait peut-être vainement cherchée dans l'explication directe des phénomènes. Cependant l'étude d'un astre qui depuis si long-temps est l'objet des efforts réunis des géomètres et des astronomes, ne paraissait point encore arrivée à son dernier degré de perfectionne-

ment. On pouvait souhaiter d'abord que les astronomes améliorassent les tables lunaires en les appuyant sur un plus grand nombre d'observations, telles qu'on peut se les procurer aujourd'hui; en déterminant avec plus de soins les élémens arbitraires qui leur servent de base; en faisant enfin concourir à leur formation, d'une manière plus complète qu'on ne l'avait fait jusqu'ici, les données de l'observation et les secours de la théorie (*). Nous sommes heureux de pouvoir annoncer aux astronomes que M. Airy, le savant directeur de l'observatoire de Greenwich, s'oc-

(*) Voici ce que dit Laplace à ce sujet : « L'emploi des observations pour la formation des tables lunaires, a l'avantage de faire connaître les coefficiens des inégalités avec une exactitude toujours croissante, quand on augmente le nombre des observations. On voit même, par le calcul des probabilités, que l'on peut ainsi en approcher indéfiniment, et par-là, surpasser la précision de la théorie, dont les approximations deviennent tellement compliquées, lorsqu'on veut les porter fort loin, que l'on est forcé d'y renoncer. La méthode d'approximation tirée des observations, peut donc être utilement employée; mais on la rendra plus exacte et plus facile, si l'on y regarde comme autant de données certaines, les coefficiens sur lesquels la théorie ne laisse pas d'incertitude, et les rapports qu'elle indique avec précision entre ces coefficiens. Par ce moyen on diminuera considérablement le nombre des coefficiens à déterminer par la comparaison des observations; ce qui simplifiera le calcul et donnera plus de précision à ses résultats. On perfectionnera ainsi, par la combinaison des observations et de la théorie, les tables du mouvement lunaire en longitude; à l'égard des tables de la latitude et de la parallaxe, je pense qu'il convient de les former par la seule théorie. » (*Connaissance des Tems* pour 1823, page 231.)

cupe en ce moment d'un travail de ce genre; le gouvernement anglais, avec une générosité qui mérite la reconnaissance de tous ceux qui s'intéressent aux progrès de l'Astronomie, a mis à sa disposition les fonds nécessaires pour discuter de nouveau toutes les observations faites à Greenwich, depuis Maskeline jusqu'à ce jour, et l'on sait qu'aucun observatoire ne possède une série d'observations lunaires aussi complète et aussi étendue. Sans doute M. Airy, toujours occupé des intérêts de la science, ne bornera pas là son travail, et nous pouvons avec confiance nous livrer à l'espoir que quelques années ne s'écouleront pas sans que nous possédions de nouvelles tables lunaires plus parfaites que celles que l'on a construites jusqu'à présent. Nous pourrons alors rechercher, avec quelque chance de succès, les véritables causes des petites différences qu'on remarque encore entre les coefficiens de quelques inégalités déduites de l'observation ou calculées par la théorie. Ce travail précieux permettra peut-être aussi de mettre hors de doute l'existence de la petite altération que les astronomes ont cru remarquer dans le moyen mouvement de la Lune, et qui est le seul point qui reste encore à éclaircir dans la théorie de cet astre (*). Enfin, nous pourrons demander à M. Airy, de déduire des observations avec plus de soin qu'on ne l'a fait jusqu'à présent, les élémens elliptiques de l'orbe lunaire, parce que ces données entrent dans tous les calculs de la théorie, et que leur précision influe sur celle de tous les résultats qu'on

(*) *Connaissance des Tems* pour 1823, page 226.

en déduit. Mais ce qu'on devait avant tout desirer, il me semble, dans la théorie de la Lune, c'était une méthode qui rattachât la détermination de toutes ses inégalités, quelle que fût leur origine, à la même analyse; et qui pût permettre d'en renfermer l'exposition dans des bornes plus étroites qu'on ne l'avait fait jusqu'à présent; car quelques éloges que mérite, par l'étendue des approximations et par le soin qui préside à tous les calculs numériques, le bel ouvrage de M. Plana, on ne peut s'empêcher de penser que trois gros volumes in-4° consacrés uniquement à la Lune, ne dépassent les limites que devait avoir l'exposition d'une simple question de la théorie générale du système du monde. On a vu que tel était l'objet que je m'étais spécialement proposé dans ce livre; mais tandis que je m'occupais du travail immense qu'il nécessitait, car, malgré les plus heureuses simplifications qu'on puisse apporter dans les formules, on doit s'attendre, comme je l'ai déjà dit, que la théorie de la Lune demeurera toujours extrêmement laborieuse, lorsqu'on voudra pousser les approximations aussi loin qu'on le fait aujourd'hui; pendant ce temps, dis-je, plusieurs géomètres ont, de leur côté, conçu l'idée d'un travail semblable. Je citerai entre autres M. Carlini, en Italie; M. Hansen, au Seeberg, et M. Lubbock, en Angleterre. Je ne m'arrêterai pas sur les recherches des deux premiers, parce qu'ils n'ont encore publié jusqu'ici que les préambules de leurs ouvrages, sans applications numériques, seul moyen d'en faire apprécier l'utilité (*).

(*) Nous avons déjà eu l'occasion de le dire, rien n'est plus

Quant à M. Lubbock, l'un des géomètres étrangers les plus recommandables par l'utile direction qu'il donne à ses travaux, il a adopté à très peu près, et par les mêmes motifs sans doute, la méthode que j'ai suivie moi-même dans mes recherches, et j'ai eu la satisfaction de voir que ses idées, éclairées par la réflexion et une expérience de plusieurs années, étaient sur ce point parfaitement d'accord avec les miennes. Malheureusement M. Lubbock, détourné de ses recherches scientifiques par des devoirs qui leur sont tout-à-fait étrangers, a été forcé de s'arrêter aux premières

---

facile que d'imaginer, soit dans la théorie de la Lune, soit dans les autres questions du système du monde, des méthodes *prétendues nouvelles*, mais qui n'ont souvent de nouveau que leur inutilité. Annoncées avec emphase par leurs auteurs, elles ne résistent pas aux premières épreuves que leur fait subir le calculateur. Dans l'état actuel de la théorie du système du monde, une méthode, pour mériter l'attention des esprits sérieux, doit, ou bien porter plus loin la précision qu'on ne peut le faire par les méthodes connues, ou bien réunir la même exactitude à un plus grand degré de simplicité; mais si cette méthode ne fait que conduire, par des voies plus pénibles, à des résultats connus, ou si même, comme cela n'est arrivé que trop souvent, en mettant en action toutes les ressources de la science, en entassant *intégrales* sur *intégrales*, elle n'atteint pas même l'exactitude des premières approximations, il faut repousser avec le dédain qu'elles méritent de semblables innovations, propres à faire briller peut-être la faconde de l'analyste, mais non pas la raison du philosophe. La science qui a pris pour noble but d'approfondir les secrets de la nature, ne doit admettre dans son sanctuaire que ce qui est utile à ses fins, et abandonner les jeux de l'imagination aux esprits oisifs ou aux stériles exercices du professorat.

approximations, ce qui est d'autant plus fâcheux, que, dans cette difficile théorie, les calculs analytiques et numériques se compliquant à mesure qu'on pousse plus loin la précision, ce sont les termes dépendans des approximations supérieures qui ont surtout besoin de nombreuses vérifications. Pour moi, j'ai poursuivi jusqu'au bout la tâche que j'avais entreprise : je m'étais imposé la loi de porter les approximations aussi loin que l'avaient fait MM. Plana et Damoiseau; l'accord de leurs résultats quant aux inégalités périodiques, avec les observations, montrait que cette approximation était suffisante, et l'on ne saurait les pousser plus loin, du moins en général, et à moins que quelques circonstances particulières ne le rendent indispensable, sans se jeter dans des opérations qui deviendraient, par leur complication, tout-à-fait impraticables. Ainsi j'ai rempli l'engagement que j'avais contracté dans les précédens Mémoires que j'ai publiés sur la théorie de la Lune (*). Je me suis attaché, autant que possible, à conserver à mes expressions analytiques la même disposition que celle adoptée par M. Plana, et pour rendre la comparaison de nos résultats plus facile, j'ai en outre déterminé, par les mêmes conditions, les valeurs des constantes arbitraires introduites par l'intégration. De cette manière, il suffira de rapprocher nos formules pour reconnaître les points où elles présentent des diver-

(*) Voyez les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, n° 18, 1er semestre 1839, et *Connaissance des Temps* pour 1840.

gences; dans ces cas très rares, j'ai même pu quelquefois, à l'aide des détails donnés par M. Plana, remonter jusqu'à la source des erreurs qui lui étaient échappées; mais le plus généralement, on remarquera entre nos formules une parfaite concordance, et cet accord entre des résultats déduits de méthodes différentes par de si longs calculs, offrira en même temps un sujet de satisfaction aux amis des sciences mathématiques, et la plus grande garantie d'exactitude aux astronomes qui en feront usage. Le travail que j'ai entrepris servira donc non-seulement à simplifier considérablement la théorie de la Lune, mais encore il permettra de soumettre à une vérification infaillible les résultats obtenus par les géomètres qui s'en étaient occupés avant moi. Cette vérification était l'un des derniers vœux que formait Laplace, lorsqu'en rendant compte des deux Mémoires qui avaient remporté le prix proposé par l'Académie des Sciences, en 1820, il regrettait que les auteurs de ces deux pièces n'eussent pas donné la même forme à leurs expressions analytiques, ce qui, en rendant facile la comparaison de ces expressions et celle des calculs numériques qui en sont déduits, aurait permis de donner aux tables de la Lune toute la certitude et toute la précision qu'elles sont susceptibles d'atteindre. « J'invite, ajoutait-il, les géomètres et les astronomes qui s'occupent de cette théorie, à suivre la méthode que je viens d'indiquer, et à comparer leurs résultats à ceux de la pièce de M. Damoiseau; l'*importance de l'objet est un puissant motif pour les y déterminer.* » Nous avons dit les raisons qui nous avaient fait préférer, dans nos expres-

sions, les formes adoptées par M. Plana, à celles de M. Damoiseau; mais le vœu de Laplace n'en sera pas moins rempli, puisqu'il tendait surtout à établir un contrôle certain pour des résultats déduits de calculs si longs et quelquefois si compliqués, qu'il est bien difficile, sans les refaire en entier, de découvrir les erreurs qui auraient pu s'y glisser. Enfin, si l'exécution de ce vaste travail a demandé quelque persévérance, je l'ai puisée d'abord dans les encouragemens que M. Poisson n'a cessé de donner à mon entreprise tandis qu'il a vécu, et ensuite dans le souvenir que ce fut le dernier objet dont ce géomètre, à jamais regrettable, m'entretint sur son lit de mort (1).

(1) « Ce travail, disait M. Poisson, exigera beaucoup de zèle pour l'entreprendre, et une attention soutenue pour réussir. *J'en reconnais toute l'utilité, et je m'empresserai d'applaudir au succès.* » (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. IV, p. 483.)

CHAPITRE PREMIER.

Équations différentielles du mouvement lunaire.

1. Soient m la masse de la Lune, x, y, z les trois coordonnées rectangulaires de son centre de gravité rapportées au centre de la Terre; soient m' la masse du Soleil, et x', y', z' ses trois coordonnées rectangulaires relatives aux mêmes axes et à la même origine que les premières; désignons de plus par r et r' les distances respectives de la Lune et du Soleil au centre de la Terre; par ρ la distance du Soleil à la Lune, en sorte qu'on ait :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2},$$
$$\rho = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}.$$

Nommons M la masse de la Terre, et prenons, pour simplifier les formules, la somme des masses de la Terre et de la Lune pour unité de masse, ce qui donne $m + \mathrm{M} = 1$, en faisant, pour abréger,

$$\mathrm{R} = \frac{m'}{\rho} - \frac{m'(xx' + yy' + zz')}{r'^3}.$$

Le mouvement relatif de la Lune autour de la Terre sera déterminé par les trois équations différentielles suivantes (n° 8, livre II) :

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{x}{r^3}&=\frac{dR}{dx},\\ \frac{d^2y}{dt^2}+\frac{y}{r^3}&=\frac{dR}{dy},\\ \frac{d^2z}{dt^2}+\frac{z}{r^3}&=\frac{dR}{dz}.\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

Cela posé, en faisant

$$d'R=\frac{dR}{dx}dx+\frac{dR}{dy}dy+\frac{dR}{dz}dz,$$

$$rR'=x\frac{dR}{dx}+y\frac{dR}{dy}+z\frac{dR}{dz},$$

la combinaison des équations précédentes donne aisément les deux suivantes (n° 89, livre II) :

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}-\frac{2}{r}+\frac{1}{a}&=2\int d'R,\\ \frac{xd^2x+yd^2y+zd^2z}{dt^2}+\frac{1}{r}&=rR'.\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

La caractéristique d' se rapporte uniquement aux coordonnées de la Lune et aux quantités qui varient avec elles; a est une constante arbitraire introduite par l'intégration, et qui dans le mouvement elliptique représente le demi grand axe de l'orbite.

Supposons que le plan des x, y coïncide avec le plan de l'écliptique relatif à une époque donnée, et auquel nous rapporterons les mouvemens de la Lune et du Soleil; soit v la longitude de la Lune, comptée sur ce plan fixe à partir de la ligne des équinoxes, que nous prendrons pour l'axe des x; soit s la tangente de sa latitude au-dessus du même plan, on aura

$$x=\frac{r\cos v}{\sqrt{1+s^2}},\quad y=\frac{r\sin v}{\sqrt{1+s^2}},\quad z=\frac{rs}{\sqrt{1+s^2}};$$

et en marquant d'un accent les lettres r, v, s, on aura des valeurs semblables relativement aux coordonnées x', y', z' du Soleil.

De là, par la différentiation, il est facile de conclure

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + \frac{r^2dv^2}{1+s^2} + \frac{r^2ds^2}{(1+s^2)^2},$$

$$xd^2x + yd^2y + zd^2z = d.(xdx + ydy + zdz)$$
$$-(dx^2 + dy^2 + dz^2) = rd^2r - \frac{r^2dv^2}{1+s^2} - \frac{r^2ds^2}{(1+s^2)^2}.$$

Les deux équations (2) deviennent ainsi

$$\left.\begin{aligned}\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{r^2dv^2}{(1+s^2)dt^2} + \frac{r^2ds^2}{(1+s^2)^2dt^2} - \frac{2}{r} + \frac{1}{a} = 2\int d'\mathrm{R},\\ \frac{rd^2r}{dt^2} - \frac{r^2dv^2}{(1+s^2)dt^2} - \frac{r^2ds^2}{(1+s^2)^2dt^2} + \frac{1}{r} = r\mathrm{R}'.\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Si l'on ajoute ces deux équations, on en tire

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{d^2.r^2}{dt^2} - \frac{1}{r} + \frac{1}{a} = 2\int d'\mathrm{R} + r\mathrm{R}', \qquad (4)$$

formule à laquelle nous étions déjà parvenus n° 89, livre II.

Si l'on multiplie les équations (1), la première par $-y$, la seconde par x, et qu'on les ajoute ensuite, on aura

$$\frac{d.(xdy - ydx)}{dt^2} = x\frac{d\mathrm{R}}{dy} - y\frac{d\mathrm{R}}{dx};$$

$x\,dy - y\,dx$ est le double de l'aire que décrit pendant l'instant dt la projection du rayon vecteur r sur le plan

des x et des y, cette aire est égale à $\frac{1}{2}.\frac{r^2 dv}{1+s^2}$; l'équation précédente, en faisant

$$P = x\frac{dR}{dy} - y\frac{dR}{dx},$$

et en l'intégrant, devient donc

$$\frac{r^2 dv}{dt\,(1+s^2)} = h + \int P dt, \tag{5}$$

h étant une constante arbitraire.

Enfin, si l'on substitue dans la troisième des équations (1) pour z sa valeur, on aura

$$\frac{d^2.\frac{rs}{\sqrt{1+s^2}}}{dt^2} + \frac{rs}{r^3\sqrt{1+s^2}} = \frac{dR}{dz}. \tag{6}$$

On peut regarder R soit comme une fonction des trois coordonnées rectangulaires x, y, z de la Lune, soit comme une fonction de ses trois coordonnées polaires r, v, s, et en différenciant dans ces deux hypothèses, on aura

$$\frac{dR}{dx}dx + \frac{dR}{dy}dy + \frac{dR}{dz}dz = \frac{dR}{dr}dr + \frac{dR}{dv}dv + \frac{dR}{ds}ds;$$

d'où, en substituant pour dx, dy, dz leurs valeurs, et comparant les coefficiens de dr, dv, ds dans les deux membres, on tire

$$r\frac{dR}{dr} = x\frac{dR}{dx} + y\frac{dR}{dy} + z\frac{dR}{dz},$$
$$\frac{dR}{dv} = x\frac{dR}{dy} - y\frac{dR}{dx},$$
$$\frac{dR}{ds} = \frac{r}{\sqrt{1+s^2}}\frac{dR}{dz} - \frac{rs}{(1+s^2)}\frac{dR}{dr},$$

et par suite

$$R' = \frac{dR}{dr}, \quad P = \frac{dR}{dv}, \quad \frac{dR}{dz} = \frac{\sqrt{1+s^2}}{r}\,\frac{dR}{ds} + \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\,\frac{dR}{dr}.$$

Les trois équations différentielles (4), (5), (6), par la substitution de ces valeurs, deviendront

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2r^2}{2dt^2} - \frac{1}{r} + \frac{1}{a} - 2\int d'R - r\frac{dR}{dr} = 0,\\
&\frac{dv}{dt} = \frac{h(1+s^2)}{r^2} + \frac{1+s^2}{r^2}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt,\\
&\frac{d^2.\frac{rs}{\sqrt{1+s^2}}}{dt^2} + \frac{rs}{r^3\sqrt{1+s^2}} - \frac{\sqrt{1+s^2}}{r}\,\frac{dR}{ds}\\
&\qquad - \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\,\frac{dR}{dr} = 0.
\end{aligned}\right\} \text{(A)}.$$

Ces équations donnent, sous une forme très simple, les expressions différentielles du rayon vecteur, de la longitude et de la latitude de la Lune dans son orbite troublée.

2. On peut déterminer généralement, au moyen des trois formules précédentes, toutes les inégalités périodiques et séculaires du mouvement lunaire; cependant, dans quelques cas particuliers que nous ferons connaître, certaines inégalités de la longitude peuvent être calculées avec plus de facilité par une formule dont nous avons déjà fait usage dans la théorie des planètes, et qui offre d'ailleurs un moyen de vérification précieux dans des calculs aussi compliqués.

La seconde des équations (3), en négligeant les puissances de s supérieures au carré, peut s'écrire

ainsi :

$$\frac{(1-s^2)dv^2}{dt^2} - \frac{d^2r}{rdt^2} + \frac{ds^2}{dt^2} - \frac{1}{r^3} = -\frac{dR}{rdr}.$$

Désignons par la caractéristique δ placée devant une quantité, sa variation finie relative à un très petit facteur α, par rapport auquel nous supposerons la fonction R développée; regardons s^2 comme une quantité du même ordre que α, et négligeons les termes qui seraient de l'ordre α^2, l'équation précédente, en la différenciant, donnera

$$\frac{2r^2dvd.\delta v}{dt^2} - \frac{rd^2.\delta r - \delta rd^2r}{dt^2} - r^2\left(\frac{s^2dv^2 - ds^2}{dt^2}\right) + \frac{3r\delta r}{r^3}$$
$$= \frac{dR}{dr}\delta r - r\delta.\frac{dR}{dr}.$$

En différenciant de même par rapport à δ l'équation (4), on trouve

$$\frac{d^2.r\delta r}{dt^2} + \frac{r\delta r}{r^3} = 2\int d'.\delta R + \frac{dR}{dr}\delta r + r\delta.\frac{dR}{dr}.$$

Si entre ces équations on élimine la quantité $\frac{r\delta r}{r^3}$, on aura

$$d.\delta v = \left\{\begin{array}{l} dv\left(\frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}\frac{ds^2}{dv^2}\right) \\ + \dfrac{d.(2rd.\delta r + dr\delta r) - dt^2\left(3\int d'.\delta R + 2r\delta.\frac{dR}{dr} + \delta r.\frac{dR}{dr}\right)}{r^2dv}, \end{array}\right\} \text{(B)}$$

formule qui, après l'intégration, coïncide avec la formule (9), nº 89, livre II, lorsqu'on néglige les termes dépendans de l'inclinaison mutuelle des orbites de la Lune et du Soleil.

La quantité α à laquelle se rapporte la caractéris-

tique δ peut représenter, dans la théorie de la Lune, l'excentricité de l'orbite solaire, ou l'inclinaison de l'orbe lunaire à l'écliptique, ou l'aplatissement du sphéroïde terrestre, ou recevoir enfin toute autre signification qu'on voudra lui donner; mais, dans tous les cas, l'exactitude de l'équation précédente exige que le coefficient α soit assez petit pour qu'on puisse négliger dans le calcul dont on s'occupe, le carré et les puissances supérieures de cette quantité.

La combinaison des équations primitives du mouvement troublé pourrait encore fournir d'autres relations plus ou moins simples entre les trois quantités r, v, s et leurs différentielles; mais les formules précédentes nous ont paru avoir la forme la plus avantageuse qu'il soit possible de leur donner, et l'on verra qu'elles suffisent pour déterminer, de la manière la plus directe, toutes les inégalités du mouvement de la Lune.

3. Pour développer les équations différentielles précédentes, il faut d'abord réduire en série l'expression de R. Si l'on nomme μ le cosinus de l'angle compris entre les rayons vecteurs r et r', on aura

$$\rho = \sqrt{r'^2 + r^2 - 2rr'\mu};$$

on a d'ailleurs

$$\rho = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2},$$

et par conséquent,

$$xx' + yy' + zz' = rr'\mu:$$

$$r\frac{d\mathrm{R}}{dr}=\frac{m'r^2}{2r'^3}\left\{1+3(1-s^2)\cos 2(v-v')-3s^2\right\}$$
$$+\frac{3m'r^3}{8r'^4}\left\{3\left(1-\frac{11}{2}s^2\right)\cos(v-v')+5\left(1-\frac{3}{2}s^2\right)\cos 3(v-v')\right\},$$
$$\frac{d\mathrm{R}}{dv}=-\frac{3m'r^2}{2r'^3}(1-s^2)\sin 2(v-v')$$
$$-\frac{3m'r^3}{8r'^4}\left\{\left(1-\frac{11}{2}s^2\right)\sin(v-v')+5\left(1-\frac{3}{2}s^2\right)\sin 3(v-v')\right\},$$
$$\frac{d\mathrm{R}}{ds}=-\frac{3m'r^2s}{2r'^3}\left\{1+\cos 2(v-v')\right\}$$
$$-\frac{m'r^3s}{8r'^4}\left\{33\cos(v-v')+15\cos 3(v-v')\right\}.$$

Il ne s'agit plus maintenant que de substituer à la place des coordonnées r, v, s, r' et v' de la Lune et du Soleil, leurs valeurs en fonction du temps t, et de développer les expressions résultantes, pour avoir celles des trois différentielles partielles $\frac{d\mathrm{R}}{dr}$, $\frac{d\mathrm{R}}{dv}$, $\frac{d\mathrm{R}}{ds}$, sous la forme qu'il convenait de leur donner pour effectuer l'intégration des équations (A).

Quant à la fonction $d'\mathrm{R}$ qui entre dans la première de ces formules, comme la caractéristique d' se rapporte uniquement aux coordonnées de l'astre troublé, et aux quantités qui varient avec elles, n° 1, il est clair que l'on aura la différentielle $d'\mathrm{R}$ en différentiant la fonction R, par rapport au temps t introduit par la substitution des valeurs des coordonnées r, v et s de la Lune, et en regardant comme constant celui qui proviendra des coordonnées r' et v' du Soleil.

4. Sans l'action perturbatrice du Soleil, la Lune décrirait une ellipse dont la Terre occuperait l'un des foyers; on aurait dans ce cas $\mathrm{R}=0$, et les équations (A) deviendraient

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2}\cdot\frac{d^2r}{dt^2}-\frac{1}{r}+\frac{1}{a}=0,\quad \frac{dv}{dt}=\frac{h(1+s^2)}{r^2},\\ d^2\cdot\frac{rs}{\sqrt{1+s^2}}+\frac{rsdt^2}{r^3\sqrt{1+s^2}}=0.\end{array}\right\}\quad(7)$$

En intégrant la première de ces équations, on en conclura l'expression de r en fonction du temps t. On substituera ensuite cette valeur dans la troisième, et l'on obtiendra par des approximations successives la valeur de s exprimée de la même manière. Enfin, en remplaçant r et s par leurs valeurs dans la seconde des équations (7), on en conclura l'expression de la longitude v, développée de même en fonction du temps.

Si dans une première approximation on néglige les termes du second ordre par rapport à l'excentricité et à l'inclinaison de l'orbe lunaire sur l'écliptique, la troisième des équations (7), en supposant $a^3n^2=1$, donnera simplement

$$\frac{d^2s}{dt^2}+n^2s=0;$$

d'où, en intégrant, on tire

$$s=\gamma\sin(nt+\varepsilon-\theta).$$

Dans cette équation γ représente la tangente de l'inclinaison de l'orbe lunaire à l'écliptique, et θ la longitude de son nœud ascendant. La constante a est, comme nous l'avons dit, le demi grand axe de l'orbite elliptique; quant à la constante h introduite par l'intégration dans la seconde des équations (7), pour connaître

sa signification, observons que $\frac{r^2dv}{1+s^2}$ représente le double de l'aire que décrit, pendant l'instant dt, la projection du rayon vecteur de la Lune sur le plan de l'écliptique, auquel on rapporte ses mouvemens. D'après les lois du mouvement elliptique, n° 20, livre II, l'aire correspondante comptée sur le plan même de l'orbe lunaire est égale à $\sqrt{a(1-e^2)}$, e étant l'excentricité de l'orbite; en multipliant donc cette quantité par le cosinus de l'inclinaison de l'orbe lunaire à l'écliptique, ou par $(1+\gamma^2)^{-\frac{1}{2}}$, on aura

$$h = \frac{\sqrt{a(1-e^2)}}{\sqrt{1+\gamma^2}}. \qquad (8)$$

Cette équation donne la relation qui existe entre la constante h et les élémens de l'orbe elliptique de la Lune; mais l'action des forces perturbatrices altère sensiblement, comme on le verra, cette valeur de h.

Les constantes γ et e sont deux quantités très petites; on peut donc développer, par rapport aux puissances ascendantes de ces deux quantités, les valeurs des trois coordonnées elliptiques r, v, s; en les déduisant de l'intégration directe des équations (7), comme nous l'avons indiqué, ou bien en recourant simplement aux formules connues du mouvement dans l'ellipse, n° 25, livre II, on aura

$$\left.\begin{aligned}
\frac{r}{a} = 1 &+ \frac{1}{2}e^2 - \left(1 - \frac{3}{8}e^2\right) e \cos(nt + \varepsilon - \varpi) \\
&- \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{3}e^2\right) e^2 \cos 2(nt + \varepsilon - \varpi) - \frac{3}{8}e^3 \cos 3(nt + \varepsilon - \varpi) \\
&- \frac{1}{3}e^4 \cos 4(nt + \varepsilon - \varpi) - \text{etc.}, \\
v = nt + \varepsilon &+ 2\left(1 - \frac{1}{8}e^2\right) e \sin(nt + \varepsilon - \varpi) \\
&+ \frac{5}{4}\left(1 - \frac{11}{30}e^2\right) e^2 \sin 2(nt + \varepsilon - \varpi) + \frac{13}{12}e^3 \sin 3(nt + \varepsilon - \varpi) \\
&+ \frac{103}{96}e^4 \sin 4(nt + \varepsilon - \varpi) + \text{etc.} \\
&- \frac{1}{4}\gamma^2(1 - 4e^2) \sin 2(nt + \varepsilon - \theta) \\
&- \frac{1}{2}e\gamma^2 \sin[nt + \varepsilon - \varpi - 2(nt + \varepsilon - \theta)] \\
&- \frac{1}{2}e\gamma^2 \sin[nt + \varepsilon - \varpi + 2(nt + \varepsilon - \theta)] \\
&+ \frac{3}{16}e^2\gamma^2 \sin[2(nt + \varepsilon - \varpi) - 2(nt + \varepsilon - \theta)] \\
&- \frac{13}{16}e^2\gamma^2 \sin[2(nt + \varepsilon - \varpi) + 2(nt + \varepsilon - \theta)] + \text{etc.}, \\
s = (1 - e^2)\,\gamma \sin(nt + \varepsilon - \theta) &+ e\gamma \sin[(nt + \varepsilon - \varpi) - (nt + \varepsilon - \theta)] \\
&+ e\gamma \sin[(nt + \varepsilon - \varpi) + (nt + \varepsilon - \theta)] \\
&+ \frac{1}{8}e^2\gamma \sin[(2(nt + \varepsilon - \varpi) - (nt + \varepsilon - \theta)] \\
&+ \frac{9}{8}e^2\gamma \sin[2(nt + \varepsilon - \varpi) + nt + \varepsilon - \theta] + \text{etc.}
\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

ϖ dans ces formules désigne la longitude du périgée de l'orbe lunaire à l'instant d'où l'on compte le temps t, et ε celle de l'astre à la même époque, n° 24, livre II. La constante n, qui représente la vitesse moyenne sur l'orbite, est liée à la constante a par l'équation $a^3 n^2 = 1$; enfin $nt + \varepsilon$ est la longitude moyenne de la Lune, et v la longitude vraie qui répondent au temps t, ces deux longitudes étant comptées sur le plan de l'écliptique.

5. Les formules précédentes supposent l'ellipse lunaire immobile; mais le périgée et les nœuds de l'orbite de la Lune varient rapidement par l'action

4..

des forces perturbatrices, puisque ces points effectuent une révolution entière dans le ciel, le premier en *neuf* ans, et les seconds en *dix-huit* ans environ. Il en résulte que ces formules, suffisantes pour les mouvemens planétaires dans l'ellipse, seraient bientôt en défaut si l'on voulait les appliquer au mouvement de la Lune. Il convient donc, dans la théorie de cet astre, d'introduire *à priori* dans les formules relatives à la première approximation, c'est-à-dire au mouvement elliptique, les changemens qui résultent des variations rapides que subit la position de ses nœuds et de son périgée. Pour cela, en désignant par $(1-c)nt$ le mouvement direct du périgée, que l'on peut regarder ici comme uniforme, et par $(g-1)nt$ le mouvement rétrograde des nœuds, il suffira d'augmenter de ces deux quantités les constantes ω et θ dans les formules (9), en supposant, pour abréger,

$$\varphi = cnt + \varepsilon - \omega,$$
$$\eta = gnt + \varepsilon - \theta.$$

On aura ainsi :

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{1}{2}e^2 - \left(1-\frac{3}{8}e^2\right)e\cos\varphi - \frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{3}e^2\right)e^2\cos 2\varphi - \frac{3}{8}e^3\cos 3\varphi$$
$$- \frac{1}{3}e^4\cos 4\varphi - \text{etc.},$$

$$v = nt + \varepsilon + 2\left(1-\frac{1}{8}e^2\right)e\sin\varphi + \frac{5}{4}\left(1-\frac{11}{30}e^2\right)e^2\sin 2\varphi$$
$$+ \frac{13}{12}e^3\sin 3\varphi + \frac{103}{96}e^4\sin 4\varphi$$
$$- \frac{\gamma^2}{4}(1-4e^2)\sin 2\eta - \frac{e\gamma^2}{2}\sin(\varphi-2\eta) - \frac{e\gamma^2}{2}\sin(\varphi+2\eta)$$
$$+ \frac{3}{16}e^2\gamma^2\sin(2\varphi-2\eta) - \frac{13}{16}e^2\gamma^2\sin(2\varphi+2\eta),$$

$$s = (1-e^2)\gamma\sin\eta + e\gamma\sin(\varphi-\eta) + e\gamma\sin(\varphi+\eta) + \frac{e^2\gamma}{8}\sin(2\varphi-\eta)$$
$$+ \frac{9}{8}e^2\gamma\sin(2\varphi+\eta).$$

Il est bon d'observer que les valeurs précédentes de r, v et s ne satisferaient plus aux équations différentielles (7) si elles y étaient substituées, puisque ces équations se rapportant au mouvement sur une ellipse fixe, les constantes ω et θ qui entrent dans leurs intégrales doivent être supposées invariables. Nous continuerons cependant à appeler les valeurs de r, v et s données par les formules précédentes, la *partie elliptique du rayon vecteur*, de la *longitude* et de la *latitude* de la Lune; mais on se rappellera que ces parties appartiennent à une ellipse mobile, et renferment déjà par conséquent l'un des effets de la force perturbatrice.

De même, au lieu de regarder dans ces formules le demi grand axe a et le moyen mouvement diurne n comme appartenant à l'ellipse que la Lune décrirait autour de la Terre sans l'action du Soleil, nous supposerons que la constante n est celle qui se déduit directement des observations, c'est-à-dire que n est la vitesse moyenne dans l'orbite troublée, et a la valeur du demi grand axe, qu'on en conclut au moyen de l'équation $a^3n^2=1$. De cette manière, a ne représentera plus, il est vrai, la distance moyenne de la Lune à la Terre, ni dans l'orbite elliptique, ni dans l'orbite troublée; mais le moyen mouvement nt sera le même dans l'hypothèse du mouvement elliptique et dans le mouvement troublé, ce qui contribuera à simplifier les formules.

Ainsi donc, ce que nous nommerons désormais la *partie elliptique* des coordonnées de la Lune correspondra aux valeurs du *rayon vecteur*, de la *longitude*

et de la *latitude* qui auraient lieu dans une ellipse dont le *périgée* et les *nœuds seraient mobiles* comme ceux de l'orbe lunaire, et dont le *grand axe serait celui qui répond à la durée moyenne d'une révolution sidérale de la Lune,* donnée par les observations. On conçoit aisément que le résultat final qu'on se propose dans la théorie de la Lune, étant d'obtenir les valeurs en fonction du temps des coordonnées qui déterminent sa position dans son orbite troublée, c'est-à-dire les trois fonctions $(r)+\delta r$, $(v)+\delta v$, $(s)+\delta s$, on peut, sans altérer ce résultat, comprendre dans les parties (r), (v) et (s) qu'on suppose appartenir à l'orbite elliptique, telle partie qu'on voudra des fonctions δr, δv et δs, pourvu qu'on ait soin ensuite de les en déduire lorsqu'elles se présenteront dans les approximations subséquentes. Ce procédé, d'ailleurs, est conforme à ce qui se pratique ordinairement dans la théorie des planètes.

En marquant d'un accent les lettres a, e, ω, ε, n, c et g, et en faisant $\gamma'=0$ dans les formules précédentes, on aura les valeurs de r', v', s' relatives au Soleil. Si l'on désigne par m le rapport des moyens mouvemens du Soleil et de la Lune, ce qui donne $m=\frac{n'}{n}$, et qu'on suppose

$$\varphi' = c'mnt + \varepsilon' - \omega',$$
$$\eta' = g'mnt + \varepsilon' - \theta',$$

on trouvera ainsi

$$\frac{r'}{a'} = 1 + \frac{1}{2}e'^2 - \left(1 - \frac{3}{8}e'^2\right) e' \cos\varphi' - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{3}e'^2\right) e'^2 \cos 2\varphi'$$
$$- \frac{3}{8}e'^3 \cos 3\varphi' - \frac{1}{3}e'^4 \cos 4\varphi' + \text{etc.},$$

$$v' = mnt + \varepsilon' + 2\left(1 - \frac{1}{8}e'^2\right) e' \sin\varphi' + \frac{5}{4}\left(1 - \frac{11}{30}e'^2\right) e'^2 \sin 2\varphi'$$
$$+ \frac{13}{12}e'^3 \sin 3\varphi' + \frac{103}{96}e'^4 \sin 4\varphi' + \text{etc.}$$

Le périgée de l'orbe solaire et les nœuds de l'écliptique vraie sur l'écliptique fixe ne variant qu'avec une extrême lenteur, on pourra, dans l'usage qu'on fera de ces valeurs, supposer c' et g' égaux à l'unité; mais nous les laisserons sous cette forme, pour établir plus de symétrie dans les formules.

De la valeur précédente de $\frac{r}{a}$ on déduit aisément les suivantes, qui nous seront utiles dans la suite :

$$\frac{a}{r} = 1 + \left(1 - \frac{e^2}{8}\right) e \cos\varphi + \left(1 - \frac{e^2}{3}\right) e^2 \cos 2\varphi + \frac{9}{8}e^3 \cos 3\varphi$$
$$+ \frac{4}{3}e^4 \cos 4\varphi + \text{etc.},$$

$$\frac{a^2}{r^2} = 1 + \frac{e^2}{2}\left(1 + \frac{3}{4}e^2\right) + 2\left(1 + \frac{3}{8}e^2\right) e \cos\varphi + \frac{5}{2}\left(1 + \frac{2}{15}e^2\right) e^2 \cos 2\varphi$$
$$+ \frac{13}{4}e^3 \cos 3\varphi + \frac{103}{24}e^4 \cos 4\varphi + \frac{1097}{192}e^5 \cos 5\varphi + \text{etc.},$$

$$\frac{a^3}{r^3} = 1 + \frac{3}{2}e^2\left(1 + \frac{5}{4}e^2\right) + 3\left(1 + \frac{9}{8}e^2\right) e \cos\varphi + \frac{9}{2}\left(1 + \frac{7}{9}e^2\right) e^2 \cos 2\varphi$$
$$+ \frac{53}{8}e^3 \cos 3\varphi + \frac{77}{8}e^4 \cos 4\varphi + \text{etc.},$$

$$\frac{a^4}{r^4} = 1 + 3e^2 + 4\left(1 + \frac{17}{8}e^2\right) e \cos\varphi + 7e^2 \cos 2\varphi + \text{etc.},$$

$$\frac{a^5}{r^5} = 1 + 5e^2\left(1 + \frac{21}{8}e^2\right) + 5\left(1 + \frac{27}{8}e^2\right) e \cos\varphi + 10\left(1 + \frac{31}{12}e^2\right) e^2 \cos 2\varphi$$
$$+ \frac{145}{8}e^3 \cos 3\varphi + \frac{745}{48}e^4 \cos 4\varphi + \text{etc.},$$

$$\frac{r^2}{a^2} = 1 + \frac{3}{2}e^2 - 2\left(1 - \frac{e^2}{8}\right) e \cos\varphi - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{e^2}{3}\right) e^2 \cos 2\varphi - \frac{e^3}{4}\cos 3\varphi$$
$$- \frac{e^4}{6}\cos 4\varphi + \text{etc.},$$

$$\frac{r^3}{a^3} = 1 + 3e^2\left(1 + \frac{e^2}{8}\right) - 3\left(1 + \frac{3}{8}e^2\right)e\cos\varphi + \frac{5}{8}e^4\cos 2\varphi + \frac{1}{8}e^3\cos 3\varphi$$
$$+ \frac{1}{8}e^4\cos 4\varphi + \text{etc.},$$
$$\frac{r^4}{a^4} = 1 + 5e^2 - 4\left(1 + \frac{9}{8}e^2\right)e\cos\varphi + e^2\cos 2\varphi + \text{etc.},$$
$$\frac{r^5}{a^5} = 1 + \frac{15}{2}e^2 - 5\left(1 + \frac{17}{8}e^2\right)e\cos\varphi + \frac{5}{2}\left(1 + \frac{7}{60}e^2\right)e^2\cos 2\varphi$$
$$+ \frac{5}{8}e^3\cos 3\varphi + \text{etc.}$$

En marquant d'un accent les lettres e et φ, on aura les expressions des puisssances correspondantes du rayon vecteur r' du Soleil.

6. Cela posé, si l'on substitue les valeurs de r, v, s, r' et v' dans l'expression de R, nº 3, on pourra développer cette fonction en série de sinus et de cosinus d'angles proportionnels au temps t. Ce développement s'effectuera par les mêmes principes que celui de la fonction perturbatrice dans la théorie des planètes.

Soit en général $\pi^{(i)}\cos i(v' - v)$ une fonction que l'on veut réduire en une série de sinus et de cosinus d'angles proportionnels au temps t, $\pi^{(i)}$ étant supposé une fonction quelconque des rayons vecteurs r et r'. Si l'on néglige les excentricités des orbites, on aura simplement $r = a$, $r' = a'$, $v = nt + \varepsilon$, $v' = n't + \varepsilon'$, et la fonction précédente deviendra $A^{(i)}\cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$, en désignant par $A^{(i)}$ ce que devient $\pi^{(i)}$ lorsqu'on y change r et r' en a et a'. Maintenant, si l'on fait croître respectivement a, a', $nt + \varepsilon$, $n't + \varepsilon'$, des quantités qui servent à compléter les valeurs de r, r', v et v' dans les formules du mouvement elliptique, et qu'on développe par la formule de Taylor la fonction résultante, qu'on réduise les puissances des sinus et des cosinus en

sinus et cosinus des multiples des angles auxquels ils se rapportent, on aura la fonction $\pi^{(i)} \cos i(v - v')$ développée en série comme on se l'était proposé.

En considérant l'expression de la fonction R donnée n° 3, on voit que le développement de cette quantité se réduit à former celui des fonctions $\frac{r^2}{r'^3}$, $\frac{r^2}{r'^3}\cos 2(v - v')$, $\frac{r^3}{r'^4}\cos(v - v')$, etc., qui dans le cas des orbites circulaires deviennent simplement $\frac{a^2}{a'^3}$, $\frac{a^2}{a'^3}\cos 2(nt - n't + \varepsilon - \varepsilon')$, $\frac{a^3}{a'^4}\cos(nt - n't + \varepsilon - \varepsilon')$, etc. Or, dans le livre VI, j'ai donné le développement de la fonction $\frac{1}{2}\Sigma A^{(i)} \cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$, dans laquelle on ferait croître a, a', $nt + \varepsilon$, $n't + \varepsilon'$, des valeurs qui servent à passer des orbites circulaires aux orbites elliptiques, et j'ai porté les approximations jusqu'aux termes du sixième ordre, par rapport aux excentricités et aux inclinaisons, ce qui est plus que suffisant dans la théorie de la Lune. En faisant donc successivement dans ces formules $i = 0$, $A^{(0)} = \frac{a^2}{a'^3}$; $i = \pm 2$, $A^{(2)} = \frac{a^2}{a'^3}$; $i = \pm 1$, $A^{(1)} = \frac{a^3}{a'^4}$, etc., on en déduira les valeurs développées des fonctions $\frac{r^2}{r'^3}$, $\frac{r^2}{r'^3}\cos 2(v - v')$, $\frac{r^3}{r'^4}\cos(v - v')$, etc., dont la réunion formera celle de la fonction R.

C'est ainsi que, d'après les valeurs de r, v, s, r' et v' rapportées dans le numéro précédent, en conservant aux angles φ, φ', η la signification qui leur a été donnée, et en représentant, de plus, par ξ la

distance moyenne angulaire de la Lune au Soleil, comptée sur l'écliptique vraie, c'est-à-dire en supposant

$$\xi = (1 - m)nt + \varepsilon - \varepsilon',$$

j'ai formé l'expression suivante :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{R} = \frac{m'a^2}{a'^3}\Big\{ & \frac{1}{4}\left(1 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{3}{2}e'^2 + \frac{9}{4}e^2e'^2 + \frac{15}{8}e'^4 - \frac{3}{2}\gamma^2 - \frac{9}{4}e^2\gamma^2 - \frac{9}{4}e'^2\gamma^2 + \frac{3}{2}\gamma^4 + \underset{(0)}{\frac{9}{16}\frac{a^2}{a'^2}}\right) \\
& - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{e^2}{8} + \frac{3}{2}e'^2 - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{9}{8}\frac{a^2}{a'^2}\right) e \underset{(1)}{\cos\varphi} \\
& - \frac{1}{8}\left(1 - \frac{e^2}{3} + \frac{3}{2}e'^2 - \frac{3}{2}\gamma^2\right) e^2 \underset{(2)}{\cos 2\varphi} - \frac{1}{16} e^3 \underset{(3)}{\cos 3\varphi} \\
& + \frac{3}{4}\left(1 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{9}{8}e'^2 - \frac{3}{2}\gamma^2\right) e' \underset{(6)}{\cos\varphi'} \quad (*) \\
& + \frac{9}{8}\left(1 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{7}{9}e'^2 - \frac{3}{2}\gamma^2\right) e'^2 \underset{(7)}{\cos 2\varphi'} \\
& - \frac{3}{4}\left(1 - \frac{e^2}{8} + \frac{9}{8}e'^2 - \frac{3}{2}\gamma^2\right) ee' \cos\underset{(8)}{(\varphi - \varphi')} \\
& - \frac{3}{4}\left(1 - \frac{e^2}{8} + \frac{9}{8}e'^2 - \frac{3}{2}\gamma^2\right) ee' \cos\underset{(9)}{(\varphi + \varphi')} \\
& - \frac{3}{16}e^2e' \cos\underset{(10)}{(2\varphi - \varphi')} - \frac{3}{16}e^2e' \cos\underset{(11)}{(2\varphi + \varphi')} \\
& - \frac{9}{8}\, ee'^2 \cos\underset{(12)}{(\varphi - 2\varphi')} - \frac{9}{8}ee'^2 \cos\underset{(13)}{(\varphi + 2\varphi')} \\
& - \frac{9}{32}\, e^2e'^2 \cos\underset{(14)}{(2\varphi - 2\varphi')} - \frac{9}{32}e^2e'^2 \cos\underset{(15)}{(2\varphi + 2\varphi')} \\
& - \frac{3}{32}\, e^3e' \cos\underset{(16)}{(3\varphi - \varphi')} - \frac{3}{32}e^3e' \cos\underset{(17)}{(3\varphi + \varphi')} \\
& + \frac{3}{8}\left(1 - \frac{5}{2}e^2 + \frac{3}{2}e'^2\right)\gamma^2 \underset{(18)}{\cos 2\eta} \\
& - \frac{9}{8}\, e\gamma^2 \cos\underset{(19)}{(\varphi - 2\eta)} + \frac{3}{8}e\gamma^2 \cos\underset{(20)}{(\varphi + 2\eta)} \\
& + \frac{9}{16}\, e'\gamma^2 \cos\underset{(21)}{(\varphi' - 2\eta)} + \frac{9}{16}e'\gamma^2 \cos\underset{(22)}{(\varphi' + 2\eta)}
\end{aligned}
$$

(*) *Équation annuelle.*

$$+\frac{15}{16}e^2\gamma^2\cos\underset{(23)}{(2\varphi-2\eta)}+\frac{3}{8}e^2\gamma^2\cos\underset{(24)}{(2\varphi+2\eta)}$$

$$-\frac{27}{16}ee'\gamma^2\cos\underset{(25)}{(\varphi-\varphi'-2\eta)}+\frac{9}{16}ee'\gamma^2\cos\underset{(26)}{(\varphi-\varphi'+2\eta)}$$

$$-\frac{27}{16}ee'\gamma^2\cos\underset{(27)}{(\varphi+\varphi'-2\eta)}+\frac{9}{16}ee'\gamma^2\cos\underset{(28)}{(\varphi+\varphi'+2\eta)}$$

$$+\frac{3}{4}\left(1-\frac{5}{2}e^2-\frac{5}{2}e'^2+\frac{23}{16}e^4+\frac{25}{4}e^2e'^2+\frac{13}{16}e'^4-\frac{1}{2}\gamma^2+\frac{15}{4}e^2\gamma^2+\frac{5}{4}e'^2\gamma^2+\frac{7}{16}\gamma^4+\frac{5}{12}\frac{a^2}{a'^2}\right)\cos\underset{(30)}{2\xi}\ (*)$$

$$-\frac{9}{4}\left(1-\frac{13}{24}e^2-\frac{5}{2}e'^2-\frac{1}{2}\gamma^2+\frac{5}{9}\frac{a^2}{a'^2}\right)e\cos\underset{(31)}{(2\xi-\varphi)}\quad(**)$$

$$+\frac{3}{4}\left(1-\frac{19}{8}e^2-\frac{5}{2}e'^2-\frac{1}{2}\gamma^2\right)e\cos\underset{(32)}{(2\xi+\varphi)}$$

$$+\frac{21}{8}\left(1-\frac{5}{2}e^2-\frac{123}{56}e'^2-\frac{1}{2}\gamma^2\right)e'\cos\underset{(33)}{(2\xi-\varphi')}$$

$$-\frac{3}{8}\left(1-\frac{5}{2}e^2-\frac{e'^2}{8}-\frac{1}{2}\gamma^2\right)e'\cos\underset{(34)}{(2\xi+\varphi')}$$

$$+\frac{15}{8}\left(1-\frac{5}{2}e'^2-\frac{1}{2}\gamma^2\right)e^2\cos\underset{(35)}{(2\xi-2\varphi)}$$

$$+\frac{3}{4}\left(1-\frac{5}{2}e^2-\frac{5}{2}e'^2-\frac{1}{2}\gamma^2\right)e^2\cos\underset{(36)}{(2\xi+2\varphi)}$$

$$-\frac{63}{8}\left(1-\frac{91}{168}e^2-\frac{123}{56}e'^2-\frac{1}{2}\gamma^2\right)ee'\cos\underset{(37)}{(2\xi-\varphi-\varphi')}$$

$$+\frac{9}{8}\left(1-\frac{13}{24}e^2-\frac{e'^2}{8}-\frac{1}{2}\gamma^2\right)ee'\cos\underset{(38)}{(2\xi-\varphi+\varphi')}$$

$$+\frac{21}{8}\left(1-\frac{19}{8}e^2-\frac{123}{56}e'^2-\frac{1}{2}\gamma^2\right)ee'\cos\underset{(39)}{(2\xi+\varphi-\varphi')}$$

$$-\frac{3}{8}\left(1-\frac{19}{8}e^2-\frac{e'^2}{8}-\frac{1}{2}\gamma^2\right)ee'\cos\underset{(40)}{(2\xi+\varphi+\varphi')}$$

$$+\frac{51}{8}\left(1-\frac{5}{2}e^2-\frac{115}{51}e'^2-\frac{1}{2}\gamma^2\right)e'^2\cos\underset{(41)}{(2\xi-2\varphi')}$$

(*) *Variation.*
(**) *Évection.*

$$-\frac{7}{32}\,e^3\cos(2\xi\underset{(43)}{-}3\varphi)+\frac{25}{32}\,e^3\cos(2\xi\underset{(44)}{+}3\varphi)$$

$$+\frac{105}{16}\,e^2e'\cos(2\xi-\underset{(45)}{2\varphi}-\varphi')-\frac{15}{16}\,e^2e'\cos(2\xi-\underset{(46)}{2\varphi}+\varphi')$$

$$+\frac{21}{8}\,e^2e'\cos(2\xi+\underset{(47)}{2\varphi}-\varphi')-\frac{3}{8}\,e^2e'\cos(2\xi+\underset{(48)}{2\varphi}+\varphi')$$

$$-\frac{153}{8}\,ee'^2\cos(2\xi-\underset{(49)}{\varphi}-2\varphi')+\frac{51}{8}\,ee'^2\cos(2\xi+\underset{(51)}{\varphi}-2\varphi')$$

$$-\frac{3}{64}\,e^4\cos(2\xi\underset{(52)}{-}4\varphi)-\frac{49}{64}\,e^2e'\cos(2\xi-\underset{(53)}{3\varphi}-\varphi')$$

$$+\frac{7}{64}\,e^2e'\cos(2\xi-\underset{(54)}{3\varphi}+\varphi')+\frac{255}{16}\,e^2e'^2\cos(2\xi-\underset{(55)}{2\varphi}-2\varphi')$$

$$+\frac{3}{8}\left(1+\frac{3}{2}e^2-\frac{5}{2}e'^2+\frac{1}{8}\gamma^2\right)\gamma^2\cos(2\xi\underset{(57)}{-}2\eta)$$

$$-\frac{3}{8}\,e\gamma^2\cos(2\xi-\underset{(59)}{\varphi}-2\eta)-\frac{3}{8}\,e\gamma^2\cos(2\xi+\underset{(61)}{\varphi}-2\eta)$$

$$+\frac{21}{16}\,e'\gamma^2\cos(2\xi-\underset{(63)}{\varphi'}-2\eta)-\frac{3}{16}\,e'\gamma^2\cos(2\xi+\underset{(65)}{\varphi'}-2\eta)$$

$$-\frac{3}{32}\,e^2\gamma^2\cos(2\xi-\underset{(67)}{2\varphi}-2\eta)-\frac{3}{32}\,e^2\gamma^2\cos(2\xi+\underset{(69)}{2\varphi}-2\eta)$$

$$+\frac{3}{8}\left(1+3e^2+3e'^2-\frac{11}{4}\gamma^2\right)\frac{a}{a'}\cos\underset{(70)}{\xi}\quad(*)$$

$$-\frac{15}{16}\,\frac{a}{a'}\,e\cos(\xi\underset{(71)}{-}\varphi)-\frac{3}{16}\,\frac{a}{a'}\,e\cos(\xi\underset{(72)}{+}\varphi)$$

$$+\frac{9}{8}\,\frac{a}{a'}\,e'\cos(\xi\underset{(73)}{-}\varphi')+\frac{3}{8}\,\frac{a}{a'}\,e'\cos(\xi\underset{(74)}{+}\varphi')$$

$$+\frac{33}{64}\,\frac{a}{a'}\,e^2\cos(\xi\underset{(75)}{-}2\varphi)-\frac{9}{64}\,\frac{a}{a'}\,e^2\cos(\xi\underset{(76)}{+}2\varphi)$$

$$-\frac{45}{16}\,\frac{a}{a'}\,ee'\cos(\xi-\underset{(77)}{\varphi}-\varphi')-\frac{15}{16}\,\frac{a}{a'}\,ee'\cos(\xi-\underset{(78)}{\varphi}+\varphi')$$

$$-\frac{3}{16}\,\frac{a}{a'}\,ee'\cos(\xi+\underset{(79)}{\varphi}+\varphi')$$

$$+\frac{5}{8}\left(1-6e^2-6e'^2-\frac{3}{4}\gamma^2\right)\frac{a}{a'}\cos\underset{(80)}{3\xi}$$

(*) *Équation parallactique.*

$$- \frac{45}{16}\frac{a}{a'} e \cos(3\xi \underset{(81)}{-} \varphi) + \frac{15}{16}\frac{a}{a'} e \cos(3\xi \underset{(82)}{+} \varphi)$$

$$+ \frac{25}{8}\frac{a}{a'} e' \cos(3\xi \underset{(83)}{-} \varphi') - \frac{5}{8}\frac{a}{a'} e' \cos(3\xi \underset{(84)}{+} \varphi')$$

$$+ \frac{285}{64}\frac{a}{a'} e^2 \cos(3\xi \underset{(85)}{-} 2\varphi) \Big\}.$$

Il sera facile de déduire de cette valeur de la fonction R, celles des trois différences partielles $\frac{dR}{dr}$, $\frac{dR}{dv}$ et $\frac{dR}{ds}$, qui entrent dans les équations différentielles (A). En effet, on aura d'abord, n° 4, livre VI,

$$r\frac{dR}{dr} = a\frac{dR}{da}.$$

Si l'on considère donc séparément les deux parties de la fonction R, la première, dont tous les termes ont pour facteur a^2, donnera

$$r\frac{dR}{dr} = 2R, \tag{10}$$

et la seconde, dont tous les termes sont multipliés par a^3, donnera

$$r\frac{dR}{dr} = 3R. \tag{11}$$

En substituant donc à la place de R sa valeur en série, on aura immédiatement celle de la fonction $r\frac{dR}{dr}$, développée de la même manière. Les équations (10) et (11) ont lieu, même en ayant égard au carré et aux puissances supérieures de la force perturbatrice.

Pour avoir, sous la même forme, la valeur de la fonction $\frac{dR}{dv}$, il suffit d'observer que l'angle v, dans l'expression de la fonction R, n° 3, étant toujours accompagné de l'angle v', d'après la valeur que nous avons supposée à l'angle ξ, on aura

$$\frac{dR}{dv} = \frac{dR}{d\xi}.$$

Cette équation toutefois n'a lieu qu'autant qu'on néglige le carré et les puissances supérieures de la force perturbatrice.

Quant à la différence $\frac{dR}{ds}$, on ferait voir aisément qu'on peut déduire sa valeur, comme celle de $r\frac{dR}{dr}$, de la valeur développée de la fonction R, par de simples différentiations relatives aux constantes γ et θ, qu'introduisent les valeurs elliptiques des coordonnées r, v, s de la Lune; mais il sera plus simple, dans le calcul de la latitude, de former directement cette valeur par le développement de la fonction que $\frac{dR}{ds}$ représente.

7. Telles sont les valeurs de la fonction R et de ses différences partielles, qu'il faudra substituer dans les trois équations différentielles (A), et qui donneront toutes les inégalités du rayon vecteur, de la longitude et de la latitude, lorsqu'on se bornera à considérer les termes dépendans de la première puissance des forces perturbatrices. Nous avons vu que dans la théorie des planètes cette approximation était en général suffisante, et qu'il n'était nécessaire de tenir compte des termes dépendans du carré de la force

perturbatrice, que pour la détermination de quelques inégalités particulières que les rapports de commensurabilité existans entre les moyens mouvemens planétaires, rendent sensibles. Mais il n'en est pas de même dans la théorie de la Lune : la grandeur de ses inégalités et le peu de convergence des séries qui les expriment, obligent de pousser beaucoup plus loin les approximations. Il faut alors développer la *fonction perturbatrice,* en tenant compte des quantités de l'ordre, du carré et des puissances supérieures de la force perturbatrice, que nous avions jusqu'ici négligées. Pour cela, regardons généralement R comme une fonction des trois coordonnées r, v, s de la Lune, et à la place de ces quantités, substituons leurs valeurs elliptiques augmentées de leurs variations δr, δv, δs, qui seront l'effet des forces perturbatrices. En désignant par δR la variation correspondante de R, on aura par la formule connue

$$\delta R = \frac{dR}{dr}\delta r + \frac{dR}{dv}\delta v + \frac{dR}{ds}\delta s$$

$$+ \frac{1}{2}\left\{\frac{d^2R}{dr^2}\delta r^2 + \frac{d^2R}{dv^2}\delta v^2 + \frac{d^2R}{ds^2}\delta s^2 + 2\frac{d^2R}{dr\,dv}\delta r\,\delta v + 2\frac{d^2R}{dr\,ds}\delta r\,\delta s + 2\frac{d^2R}{dv\,ds}\delta v\,\delta s\right\}$$

$$+ \frac{1}{2.3}\left\{\frac{d^3R}{dr^3}\delta r^3 + \frac{d^3R}{dv^3}\delta v^3 + \frac{d^3R}{ds^3}\delta s^3 + 3\frac{d^3R}{dr^2dv}\delta r^2\delta v + 3\frac{d^3R}{dr^2ds}\delta r^2\delta s + 6\frac{d^3R}{dv^2ds}\delta v^2\delta s + 3\frac{d^3R}{dv^2dr}\delta v^2\delta r + 3\frac{d^3R}{dr\,ds^2}\delta r\,\delta s^2 + 3\frac{d^3R}{dv\,ds^2}\delta v\,\delta s^2 + 6\frac{d^3R}{dr\,dv\,ds}\delta r\,\delta v\,\delta s\right\}$$

$$+ \text{etc.}$$

On déterminera par cette formule la valeur de δR en fonction du temps, avec tout le degré d'exactitude qu'on pourra désirer. Il suffira d'y substituer à la

place de δr, δv, δs leurs valeurs, à mesure qu'elles seront données par les approximations successives; quant aux coefficiens différentiels $\frac{dR}{dr}$, $\frac{dR}{dv}$, $\frac{d^2R}{dr^2}$, etc., il sera facile, comme nous l'avons vu, de déduire leurs valeurs de celle de la fonction R par de simples différentiations, et sans avoir besoin d'effectuer de nouveaux développemens.

8. Le rapport $\frac{n'}{n}$ des moyens mouvemens du Soleil et de la Lune, ou la valeur de la quantité que nous avons désignée par m, étant environ $\frac{1}{13}$, on le regarde comme une quantité du premier ordre; les excentricités e et e' des orbites de la Lune et du Soleil, ainsi que l'inclinaison de l'orbe lunaire à l'écliptique, et par suite la tangente γ de cette inclinaison, sont considérées comme des quantités du même ordre: ces quantités sont représentées, à très peu près, par les fractions $\frac{1}{18}$, $\frac{1}{60}$, $\frac{1}{11}$, la distance moyenne du Soleil à la Terre étant prise pour unité. Les carrés et les produits de ces élémens seront regardés comme de très petites quantités du second ordre, leurs cubes et leurs produits de trois dimensions comme des quantités très petites du troisième ordre, et ainsi de suite.

Le rapport $\frac{a}{a'}$ des moyennes distances de la Lune et du Soleil à la Terre, étant égal à environ $\frac{1}{400}$, ce rapport peut être considéré comme une quantité du second ordre.

La première partie de la fonction perturbatrice aR, développée n° 6, est de l'ordre $\frac{m'a^3}{a'^3}$; et comme on a,

par les lois du mouvement elliptique,

$$\frac{m'a^3}{a'^3} = \frac{n'^2}{n^2} = m^2,$$

les inégalités qui en résulteront dans les équations différentielles (A) seront de l'ordre m^2 ou du second ordre, m étant une quantité très petite du premier.

Les termes qui résulteront de la seconde partie de l'expression de aR, n° 6, seront de l'ordre $\frac{m'a^4}{a'^4}$ ou $m^2\frac{a}{a'}$, c'est-à-dire du quatrième ordre, puisque le rapport $\frac{a}{a'}$ est une quantité du second ordre, et ainsi de suite.

$-\frac{dR}{dr}$ est l'expression de la force perturbatrice décomposée suivant le rayon vecteur de la Lune à la Terre, et dirigée vers cette dernière planète; cette quantité, en n'ayant égard qu'à la première partie de la fonction R, est de l'ordre $\frac{m'r}{2r'^3}$ ou $\frac{m'a}{2a'^3}$; or la relation précédente donne

$$\frac{m'a}{2a'^3} = \frac{m^2}{2}\cdot\frac{1}{a^2}.$$

la force perturbatrice $-\frac{dR}{dr}$ est donc à la force principale $\frac{1}{r^2}$ qui sollicite la Lune autour de la Terre, comme 1 est à $\frac{m^2}{2}$, ou comme 1 est à $\frac{1}{357,4}$. Les quantités $\frac{dR}{rdv}$ et $\frac{dR}{rds}$, qui expriment les composantes de

l'action du Soleil perpendiculairement au rayon vecteur et au plan de l'orbite, sont du même ordre.

D'après cela, il sera facile de fixer l'ordre des différens termes qui formeront le développement des équations différentielles (A); mais pour juger la grandeur des termes correspondans qui en résulteront dans l'expression finie des coordonnées de la Lune, il faudra examiner encore si ces termes ne sont pas susceptibles de croître sensiblement par l'intégration. Voici quelques considérations qui pourront faciliter les recherches qu'on aura à faire à cet égard.

9. Les équations différentielles (A), n° 1, du mouvement lunaire étant de même forme que celles qu'on emploie dans la théorie des planètes, on suivra, pour les intégrer, les mêmes méthodes d'approximation. On commencera par substituer, à la place de la fonction R et de ses différences partielles, leurs valeurs correspondantes aux valeurs elliptiques de r, v et s, et l'on déterminera ainsi toutes les inégalités du rayon vecteur, de la longitude et de la latitude, de l'ordre de la force perturbatrice. On substituera les nouvelles valeurs qui en résulteront dans la fonction R et dans les termes tout connus que ces équations renferment, et en intégrant de nouveau les équations différentielles, on aura une seconde valeur des trois variables qui déterminent la position de la Lune, exactes jusqu'aux quantités de l'ordre du carré de la force perturbatrice inclusivement, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on soit arrivé aux quantités de l'ordre auquel on veut arrêter l'approximation. D'après la forme des équations (A), la valeur complète de r, v et s se formera

de la réunion de toutes les parties de ces valeurs, qu'on aura ainsi successivement déterminées.

Chacun des termes du développement de R, n° 6, produira, par la substitution de cette fonction et de ses différences partielles, dans les équations (A), un terme correspondant dans les expressions finies de r, v et s, et comme la fonction R conserve la même forme, quelque loin que l'on porte la précision, les approximations successives ne faisant qu'altérer légèrement les coefficiens des divers cosinus qu'elle renferme, il s'ensuit qu'on peut, d'après l'expression de R relative à la première puissance de la force perturbatrice, reconnaître *à priori* la forme des diverses inégalités dont se composent les valeurs du *rayon vecteur, de la longitude* et de la *latitude* dans le mouvement troublé de la Lune, et par conséquent la forme des séries qui les représentent.

Cela posé, pour peu que l'on considère avec quelque attention le développement de la fonction R, n° 6, on verra que les inégalités qui en résulteront dans les expressions des coordonnées de la Lune, pourront se diviser en trois classes distinctes. Les premières, indépendantes du moyen mouvement mnt du Soleil; les secondes, dépendantes des angles nt et mnt, ou de l'angle mnt seul; enfin les troisièmes, indépendantes à la fois des moyens mouvemens du Soleil et de la Lune, c'est-à-dire ne contenant l'angle nt qu'autant qu'il est multiplié par les facteurs $(1-c)$ et $(1-g)$.

Les inégalités de la première espèce introduiront dans les expressions du rayon vecteur, de la longitude et de la latitude, des termes semblables à ceux

que renferment déjà les parties elliptiques de leurs valeurs, et ne feront en général qu'altérer légèrement les coefficiens dont ces termes sont affectés.

Les inégalités de la seconde espèce produiront des termes dont les argumens dépendront des positions respectives de la Lune et du Soleil, et seront par conséquent, comme les précédentes, des inégalités simplement périodiques.

Enfin, la dernière classe comprendra les *inégalités séculaires* et les inégalités qui, ne renfermant dans leurs argumens que les angles $(1-c)nt$ et $(1-g)nt$, ne varieront qu'en vertu des changemens progressifs du périgée et des nœuds de l'orbe lunaire. Ces inégalités, particulières au mouvement de la Lune, ont été nommées *inégalités à longues périodes*, pour les distinguer des autres inégalités périodiques dont les argumens varient avec beaucoup plus de rapidité. La détermination exacte et complète des inégalités de cette espèce est un des points les plus difficiles et les plus délicats de la théorie de la Lune.

Si l'on désigne par δr la variation que subit, par l'action des forces perturbatrices, le rayon vecteur r dans l'orbite elliptique, que l'on substitue $r+\delta r$ à la place de r dans la première des formules (A), et qu'on développe ensuite l'équation résultante, il sera facile de reconnaître que la détermination des diverses inégalités que renferme la valeur de δr, dépendra de l'intégration d'une équation de cette forme (*voir* n° 28, livre VI)

$$\frac{d^2y}{dt^2}+n^2y=\pi,$$

le second membre π devant être regardé comme une fonction toute connue des trois coordonnées r, v, s, qui pourra toujours se développer en une suite de sinus ou de cosinus d'angles multiples des moyens mouvemens de la Lune et du Soleil.

Soit $n^2 k \cos(\beta nt + \rho)$ l'un quelconque de ces termes, le terme correspondant de la valeur de y sera

$$\frac{k}{1-\beta^2} \cos(\beta nt + \rho).$$

Si β^2 ne diffère de l'unité que d'une quantité de l'ordre m, ou, ce qui revient au même, si β est de la forme $1 + \alpha m + \text{6} m^2 + \text{etc.}$, α, 6, etc. pouvant représenter des nombres quelconques, comme cela aurait lieu, par exemple, relativement aux termes du développement de R, qui dépendent des angles $\varphi - \varphi'$, $\varphi + \varphi'$, ξ, $2\xi - \varphi$, etc., l'inégalité $k \cos(\beta nt + \rho)$ acquerra par l'intégration le très petit diviseur m; son coefficient s'abaissera ainsi à l'ordre $i-1$ s'il était de l'ordre i dans l'équation différentielle, et pourra devenir très sensible dans l'expression du rayon vecteur. Il faudra donc, pour le calcul de ces inégalités, porter le développement de la fonction R jusqu'aux termes de l'ordre $i+1$, si i marque l'ordre des quantités auxquelles on a résolu de pousser les approximations. On verra que c'est à cette circonstance qu'est due la grandeur de l'inégalité qu'on a nommée l'*évection*, et de celle qui porte le nom d'*équation parallactique*.

Si β^2 ne diffère de l'unité que d'une quantité de l'ordre m^2, ou, ce qui revient au même, si ce coefficient est de la forme $1 + \alpha m^2 + \text{6} m^3 + \text{etc.}$, l'inégalité

que le terme $n^2k\cos(\beta nt + \rho)$ produit dans l'expression du rayon vecteur, aura le très petit diviseur m^2, et il faudra par conséquent calculer dans R les termes de l'ordre $i+2$, pour obtenir les termes de l'ordre i dans r. La fonction perturbatrice contient, par exemple, les termes dépendant des argumens $2\xi-\varphi+2\varphi'$ et $\varphi - 2\eta$, qui sont de cette espèce; mais ces termes étant déjà du cinquième ordre dans l'équation différentielle, cette circonstance rend leur calcul plus facile.

Les termes dans lesquels β est une petite quantité de l'ordre m, et qui ne renferment pas par conséquent dans leurs argumens le moyen mouvement de la Lune, tels que ceux qui dépendent des angles φ', $2\varphi'$, $2\xi-2\varphi$, $\xi-\varphi$, etc., n'augmentent pas par l'intégration dans l'expression du rayon vecteur; mais en considérant la seconde des formules (A), on voit que ces termes s'introduisent dans l'expression différentielle de la longitude, en vertu du terme $\frac{h}{r^2}$ qu'elle renferme, et ils acquièrent ensuite, par l'intégration, le diviseur m, qui peut les rendre très sensibles dans l'expression finie de δv. On verra que c'est à une circonstance pareille qu'est due la grandeur de l'inégalité nommée *équation annuelle*.

Il faudra, dans le cas dont il s'agit, porter dans l'expression du rayon vecteur les approximations jusqu'aux quantités de l'ordre $i+1$, pour obtenir les inégalités correspondantes de l'ordre i dans l'expression de la longitude. On peut observer encore que les termes de cette espèce, c'est-à-dire qui ne renferment dans leurs argumens que le moyen mouvement du Soleil, contenus dans la fonction $\frac{dR}{dv}$, acquer-

ront par l'intégration le diviseur m dans la fonction $\int\left(\frac{d\mathrm{R}}{dv}\right)dt$, et se trouveront par conséquent affectés du très petit diviseur m^2 dans l'expression finie de la longitude. Il résulte de là que pour obtenir tous les termes de ce genre de l'ordre i contenus dans δv, il faudra porter dans le développement de $\frac{d\mathrm{R}}{dv}$ la précision jusqu'aux quantités de l'ordre $i+2$; cette circonstance, et l'obligation où l'on est de pousser très loin dans ce cas l'approximation, à cause de la grandeur des inégalités et du peu de convergence des séries qui les expriment, rend très pénible la détermination des termes dont il s'agit par la seconde des formules (A), et il vaudra mieux, en ces occasions, recourir, pour calculer la longitude, à des formules particulières qui ne renferment pas la fonction $\int\left(\frac{d\mathrm{R}}{dv}\right)dt$. On en verra des exemples dans le chapitre suivant.

La troisième des formules (A) pouvant aisément être ramenée à la même forme que la première, ce que nous venons de dire relativement aux inégalités du rayon vecteur s'applique identiquement aux inégalités de la latitude.

Les inégalités dont les argumens croissent avec une grande lenteur, et que l'on a nommées, comme nous l'avons dit, inégalités à *longues périodes*, sont généralement insensibles dans les équations différentielles, et si elles deviennent considérables dans les valeurs finies des coordonnées de la Lune, ce ne peut être qu'à raison des très petits diviseurs que l'intégration leur fait acquérir. Il suffira donc de considérer, parmi ces

inégalités, celles qui sont susceptibles d'augmenter sensiblement par l'intégration. Les argumens que renferment ces inégalités doivent, d'après leur définition, être indépendans des moyens mouvemens de la Lune et du Soleil, et sont supposés ne varier qu'à raison des déplacemens du périgée et des nœuds de l'orbe lunaire. Soit donc H cos $(\beta nt + \epsilon)$ une inégalité de cette espèce, β étant, par hypothèse, une très petite quantité de l'ordre du coefficient qui multiplie t dans l'expression des variations du périgée et des nœuds de l'orbe lunaire, c'est-à-dire de l'ordre $1-c$ et $1-g$, ou m^2, comme on le verra dans la suite; cette inégalité pourra devenir considérable dans les intégrales des équations (A), en acquérant le très petit diviseur β; or il est essentiel d'observer que si l'on n'a égard qu'à la première puissance de la force perturbatrice, l'expression du rayon vecteur r ne contiendra aucun terme de ce genre, puisque les inégalités dont sa valeur se compose seront toutes affectées du diviseur $1-\beta^2$. Il semblerait peut-être que δr doit contenir un terme divisé par β, à raison du terme $\int d'\mathrm{R}$ que renferme la première des équations (A); et si cela avait lieu en effet, il en résulterait dans l'expression de la longitude δv un terme affecté du diviseur β^2. Mais pour se convaincre qu'un pareil terme ne saurait exister, il suffit d'observer que la caractéristique d' se rapportant aux seules coordonnées de la Lune, et l'angle βnt étant supposé indépendant du mouvement moyen du Soleil, la différentielle $d'\mathrm{R}$, dans la première approximation, acquiert un facteur de l'ordre β, et par

conséquent l'inégalité à *longue période* que renferme la fonction $\int d'R$ demeure du même ordre que l'inégalité correspondante de l'expression de R. Les inégalités croissant avec une grande lenteur sont donc insensibles dans l'expression du rayon vecteur, lorsqu'on n'a égard qu'à la première puissance de la force perturbatrice, et elles n'acquièrent dans l'expression de la longitude qu'un diviseur de l'ordre β.

Cependant cette circonstance pourrait suffire déjà pour les rendre considérables; heureusement on verra qu'il est facile de s'assurer que les fonctions R et $\int d'R$ ne renferment dans l'ordre m^2 aucune inégalité de ce genre, et que par conséquent le rayon vecteur n'introduit dans l'expression différentielle de ∂v, aucune inégalité à *longue période* au-dessous de l'ordre m^3, du moins tant qu'on ne considère que la première puissance de la force perturbatrice. Mais ce n'est point assez, et si l'on porte plus loin l'approximation, comme il est indispensable de le faire, ne peut-on pas craindre que les termes dépendans du carré et des puissances supérieures de la force perturbatrice, n'introduisent dans la fonction différentielle $d'R$ des inégalités de la même espèce d'un ordre inférieur à m^6, qui en acquérant le très petit diviseur β de l'ordre m^3, s'abaisseront au moins à l'ordre m^3 dans l'expression du rayon vecteur, et par suite à l'ordre m dans l'expression de la longitude, où elles acquièrent un très petit diviseur de l'ordre β^2. Ces termes pourraient donc encore devenir très sensibles, quoique dépendans du carré ou des puissances supérieures de la force perturbatrice; mais nous ferons voir, dans la suite, que les

inégalités dont les argumens sont supposés ne varier qu'à raison des déplacemens du périgée et des nœuds de l'orbe lunaire, disparaissent dans la fonction $\int d'R$, même alors que l'on pousse les approximations jusqu'aux quantités de l'ordre m^3, en sorte que les inégalités de ce genre que cette fonction peut contenir sont au moins de l'ordre m^4, et ne s'abaisseront par conséquent qu'à l'ordre m^2 par la nouvelle intégration qu'elles subiront dans l'expression de la longitude. Les inégalités à *longues périodes* introduites par la fonction $\int d'R$ seront donc toujours insensibles dans l'expression de la longitude de la Lune, et à plus forte raison dans celle de son rayon vecteur.

Ce résultat n'est qu'un cas particulier d'un théorème plus étendu que nous démontrerons dans la suite, et qui consiste en ce que la fonction $\int d'R$ ne renferme en général aucune inégalité indépendante du moyen mouvement nt de la Lune, d'un ordre inférieur m^4, en sorte que dans le calcul des inégalités qui ne dépendent que du moyen mouvement du Soleil mnt, comme l'*équation annuelle*, par exemple, et dans le calcul des inégalités à longues périodes, on pourra faire abstraction des termes résultant de la fonction $\int d'R$, ou supposer simplement $\int d'R = 0$, du moins lorsqu'on ne portera l'approximation que jusqu'au même ordre de quantités.

Cette propriété très remarquable qu'a la fonction $\int d'R$ dans la théorie de la Lune, d'être indépendante des inégalités qui ne renferment dans leurs argumens que le moyen mouvement du Soleil, ou qui ne crois-

sent qu'en vertu des mouvemens très lents du périgée et des nœuds de l'orbe lunaire, n'est qu'une extension de celle dont jouit la même fonction dans la théorie des planètes, de ne renfermer aucune *inégalité séculaire* ou croissant progressivement avec le temps. Mais l'analyse par laquelle on démontre cette dernière propriété, et que nous avons développée n° 60, livre II, ne suffirait pas dans la théorie de la Lune, parce que nous n'avons eu égard, relativement aux planètes, qu'aux termes dépendans du carré de la force perturbatrice, et que nous serons obligés ici de tenir compte de quantités qui dépendent du cube de cette force. Cette circonstance rend très difficile la démonstration de l'importante propriété dont il s'agit, nous la développerons avec toute l'étendue qu'elle exige, lorsque nous nous occuperons de la détermination des inégalités *à longues périodes* et des inégalités *séculaires* du mouvement lunaire.

Ce que nous venons de dire suffira pour qu'on puisse juger à l'avance de l'importance que les différens termes des équations différentielles (A), n° 1, pourront acquérir dans les expressions finies des coordonnées de la Lune. Le développement de ces équations et leur intégration, feront l'objet des chapitres suivans.

CHAPITRE II.

Des inégalités du mouvement de la Lune dépendantes de l'action du Soleil.

Inégalités périodiques du rayon vecteur.

10. Reprenons la première des équations (A), n° 1,

$$\frac{d^2 . r^2}{2dt^2} - \frac{1}{r} + \frac{1}{a} = 2\int d'\mathrm{R} + r\frac{d\mathrm{R}}{dr}. \qquad (1)$$

On pourrait déterminer par cette formule toutes les inégalités du rayon vecteur r, mais il y a de l'avantage, dans la théorie de la Lune, à calculer directement la valeur de la quantité $\frac{1}{r}$ qui en dépend, parce que cette fonction est celle qui entre dans l'expression de la parallaxe, et que d'ailleurs son carré, facile à former quand on l'a obtenue, est une des données nécessaires pour le calcul de la longitude vraie. En désignant donc par r_1 la partie elliptique du rayon vecteur, et par $\delta\frac{1}{r}$ l'accroissement de la fonction $\frac{1}{r_1}$ par l'action des forces perturbatrices, on aura

$$\left(\frac{1}{r_1} + \delta\frac{1}{r}\right)^{-2} = r_1^2 - 2r_1^3\left(\delta\frac{1}{r}\right) + 3r_1^4\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2 - 4r_1^5\left(\delta\frac{1}{r}\right)^3$$
$$+ 5r_1^6\left(\delta\frac{1}{r}\right)^4 - 6r_1^7\left(\delta\frac{1}{r}\right)^5 + \text{etc.}$$

en substituant cette valeur à la place de r_1^2 dans l'é-

quation précédente, elle deviendra

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{d^2.r_1^2}{2dt^2}-\dfrac{d^2.r_1^3\delta\frac{1}{r}}{dt^2}-\dfrac{1}{r_1}-\delta\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{a}=-\dfrac{3d^2.r_1^4\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2}{2dt^2}\\ \qquad+\dfrac{2d^2.r_1^5\left(\delta\frac{1}{r}\right)^3}{dt^2}+\text{etc.}+2\int d'\mathrm{R}+r\dfrac{d\mathrm{R}}{dr}.\end{array}\right\}\quad(2)$$

Si l'on intègre cette équation par la méthode des approximations successives, il est évident que son second membre sera, dans chaque approximation, composé de quantités toutes connues. En effet, dans la première approximation, on pourra négliger les termes multipliés par $\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2$, $\left(\delta\frac{1}{r}\right)^3$, etc., qui sont au moins de l'ordre du carré des forces perturbatrices, et l'on substituera, pour la fonction R, son développement en série, que nous avons donné n° 6. On obtiendra ainsi une première valeur de $\delta\frac{1}{r}$, exacte aux quantités près de l'ordre de la force perturbatrice inclusivement, c'est-à-dire aux quantités près de l'ordre m^2, m représentant (n° 5) le rapport du moyen mouvement du Soleil à celui de la Lune. Au moyen de cette valeur, on calculera les termes des quantités $\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2$, $\left(\delta\frac{1}{r}\right)^3$, etc., du second ordre par rapport à la force perturbatrice, qui entreront dans le second membre de l'équation (2); en faisant croître les coordonnées elliptiques $\left(\frac{1}{r}\right)$, (v) et (s) dans l'expression de R, de leurs variations $\delta\frac{1}{r}$, δv, δs, données par la première approximation, on formera la valeur de la

fonction $R + \delta R$, qui doit être substituée à la place de R dans la même équation, et l'on obtiendra une seconde valeur de $\delta \frac{1}{r}$, exacte jusqu'aux quantités de l'ordre du carré de la force perturbatrice; en continuant ainsi, on s'élèvera progressivement jusqu'au degré d'approximation qu'on voudra atteindre.

11. L'intégration dont nous venons d'indiquer la marche générale, introduit en diviseurs dans l'expression de $\delta \frac{1}{r}$ les coefficiens qui multiplient le temps sous le signe des divers *cosinus* qui composent l'expression de la fonction perturbatrice R; on aura soin de développer, à mesure qu'ils se présenteront, ces diviseurs par rapport aux puissances ascendantes de la quantité m qu'ils renferment, et l'on négligera les puissances supérieures à celles qui correspondent à l'ordre d'approximation auquel on veut s'arrêter. On obtiendra ainsi, pour les coordonnées qui fixent la position de la Lune, des valeurs aussi approchées qu'on pourra le désirer, et ces expressions se trouveront naturellement développées par rapport aux puissances et aux produits des excentricités et de l'inclinaison mutuelle des orbites de la Lune et du Soleil, comme les expressions analogues relatives aux planètes, et par rapport aux puissances ascendantes du rapport m du mouvement moyen du Soleil à celui de la Lune, quantité qui est moindre qu'un douzième (n° 7).

Cette manière d'exprimer les coordonnées du mouvement lunaire donne aux valeurs de ces quantités une forme très simple, qui permet de saisir au premier coup d'œil l'ordre des différens termes qui les

composent; l'expérience m'a prouvé, d'ailleurs, que le développement des divers diviseurs qui affectent ces expressions dans l'état primitif où les présente l'analyse, ne nuit en rien à la convergence des séries. Depuis longtemps ce procédé avait été adopté par Laplace dans le calcul des inégalités dites à *longues périodes*, mais on doit à M. Plana l'heureuse idée de l'avoir étendu aux inégalités simplement périodiques, ce qui a introduit une parfaite symétrie dans toutes les parties de la théorie lunaire, et contribuera sans doute à la perfectionner, en rendant plus facile la vérification des nombreuses inégalités auxquelles le mouvement de notre satellite est assujetti.

12. L'intégrale complète de l'équation (2) renfermera deux arbitraires qui, jointes à la constante qui accompagne la fonction $\int d'R$, introduiront dans l'expression finie du rayon vecteur trois constantes qu'on pourra déterminer arbitrairement. Conformément à ce qui se pratique dans la théorie des planètes, nous déterminerons la constante jointe à l'intégrale $\int d'R$, que nous nommerons g, par la condition que la partie δv de la *longitude vraie* qui dépend de l'action des forces perturbatrices, ne renferme aucun terme proportionnel au temps t, ou, ce qui revient au même, que la *longitude moyenne* $nt + \varepsilon$ de la Lune soit la même dans l'orbite elliptique et dans l'orbite troublée, supposition qui suffit pour fixer la valeur de cette constante, et que nous avions d'ailleurs admise d'avance dans le n° 5.

Quant aux deux constantes qui complètent l'intégrale de l'équation (2), nous avons vu, n° 94, livre II,

qu'on pouvait en disposer pour faire disparaître les termes dépendans de l'argument $nt + \varepsilon - \omega$ que la seconde approximation introduit, soit dans l'expression du rayon vecteur, soit dans celle de la longitude, parce qu'on ne peut faire disparaître à la fois ces termes dans les deux expressions. Par analogie à ce que nous avons pratiqué dans la théorie des planètes, nous pourrions donc déterminer les deux constantes arbitraires dont il s'agit, de manière à faire disparaître dans l'expression de la longitude $v + \delta v$, les termes qui dépendent du même argument que le premier terme de l'équation du centre, et qui ne seraient pas compris dans les formules du mouvement elliptique; mais ce n'est point ainsi qu'en ont usé les géomètres qui se sont occupés avant nous de la théorie de la Lune. Comme ils exprimaient le rayon vecteur en fonction de la longitude vraie v, ils se sont imposé la condition que le terme dépendant de l'argument v dans l'expression de la fonction $\frac{1}{r}$ fût le même dans le mouvement elliptique relatif à l'orbite mobile et dans le mouvement troublé; ce qui donne aux constantes introduites par l'intégration des valeurs particulières, qui ont ensuite une influence considérable sur les expressions algébriques des coefficiens de toutes les autres inégalités lunaires. Il suit de là que si nous n'adoptions point cette détermination, nous serions continuellement obligés de transformer nos résultats pour pouvoir les comparer à ceux des géomètres qui nous ont précédé. Nous avons donc pensé que comme cette vérification était l'un

des objets les plus importans de notre travail, et qu'elle peut seule inspirer la confiance nécessaire dans des résultats déduits de si longs calculs, nous devions ici abandonner la marche que nous avions suivie dans la théorie des planètes, et qui est, sans aucun doute, la plus appropriée aux méthodes astronomiques, pour nous conformer à l'usage adopté généralement jusqu'à présent dans la théorie de la Lune.

Au reste, il faut bien remarquer que ces valeurs arbitraires qu'on peut donner aux constantes introduites par l'intégration de l'équation (2), n'influent en rien sur les valeurs définitives du rayon vecteur et de la longitude, c'est-à-dire sur les expressions de ces quantités, dans lesquelles les coefficiens de chacune des inégalités auront été réduits en nombres; elles ne font que changer la valeur de l'excentricité qu'on déduit des observations. En effet, dans la théorie de la Lune, l'excentricité de l'orbite se détermine en comparant les coefficiens de l'inégalité qui a pour argument $cnt + \varepsilon - \omega$ ou φ dans l'expression du rayon vecteur et de la longitude déduits de l'observation, avec les valeurs que leur assigne la théorie. En supposant donc que dans une première hypothèse sur les valeurs des constantes introduites par l'intégration, en n'ayant égard qu'aux termes dont il s'agit, on trouve

$$\frac{1}{r} + \delta\frac{1}{r} = \mathrm{A}e \cos\varphi,$$
$$v + \delta v = \mathrm{B}e \sin\varphi;$$

e désignant ici l'excentricité de l'orbite lunaire, A et B des coefficiens constans déterminés par les approxi-

mations successives, et que dans la seconde hypothèse on trouve

$$\frac{1}{r} + \delta\frac{1}{r} = A_1 e_1 \cos\varphi,$$
$$v + \delta v = B_1 e_1 \sin\varphi;$$

A_1, B_1, e_1 étant ce que deviennent les quantités A, B, e relativement à cette seconde hypothèse, on aura, en égalant ces valeurs, qui doivent être identiques,

$$Ae = A_1 e_1, \quad Be = B_1 e_1;$$

d'où l'on tire

$$\frac{A}{B} = \frac{A_1}{B_1}, \qquad (3)$$

équation de condition qui devra toujours subsister entre les coefficiens A, B, A_1, B_1, dans quelque hypothèse qu'ils aient été déterminés.

Il suit de là que lorsqu'on aura calculé les expressions du rayon vecteur et de la longitude dans une hypothèse particulière de valeurs attribuées aux constantes introduites par l'intégration de l'équation (2), on pourra de suite les ramener à la forme qui convient à un nouveau système de valeurs, en substituant à la place de la quantité e, qui exprime l'excentricité dans la première hypothèse, la quantité e_1 déterminée par l'équation

$$\frac{e_1}{e} = \frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1}, \qquad (4)$$

A_1 et B_1 étant ce que deviennent A et B dans la seconde hypothèse.

Si, comme nous l'avons supposé plus haut, on détermine les constantes introduites par l'intégration, de manière à faire disparaître dans δv les termes dé-

pendans de l'angle φ, on aura, d'après les formules du mouvement elliptique, aux quantités près de l'ordre e^3, $B = 2$; en sorte que pour ramener à cette hypothèse les valeurs de $\frac{1}{r}$ et de v obtenues dans toute autre supposition quelconque, il suffira, dans chaque coefficient, de substituer à la place de l'excentricité e_1, la valeur $\frac{2}{B_1} e$.

13. Revenons maintenant au développement de l'équation (2). Pour simplifier les formules, nous supposerons, dans ce qui va suivre, $a = 1$, ce qui donne $n = 1$; t représentera dans cette hypothèse le moyen mouvement de la Lune, et mt celui du Soleil dans leurs orbites respectives. Faisons ensuite, pour abréger,

$$P = -r_1^3 \delta\frac{1}{r} + \tfrac{3}{2} r_1^4 \left(\delta\frac{1}{r}\right)^2 - 2 r_1^5 \left(\delta\frac{1}{r}\right)^3 + \tfrac{5}{2} r_1^6 \left(\delta\frac{1}{r}\right)^4 + \text{etc.},$$

expression dans laquelle on substituera pour r_1^3, r_1^4, r_1^5, etc., leurs valeurs elliptiques, n° 5, en y faisant a égal à l'unité; la seule valeur $r_1^3 = 1$ étant exceptée, cette valeur devant demeurer comprise dans le premier membre de l'équation (2). Si l'on ordonne les inégalités du rayon vecteur par rapport aux puissances ascendantes de l'excentricité e de l'orbe lunaire, on pourra regarder la fonction P comme composée de quantités toutes connues; en effet, r_1^3 ne contenant, d'après l'hypothèse, que des termes dépendans de l'excentricité e, il suffira, pour former le produit $r_1^3\, \delta\frac{1}{r}$ dans les différens ordres d'approximations relatifs à cette quantité, de combiner les divers

termes de la valeur de $r_{\prime}^{2}$ avec ceux de l'expression de $\delta\frac{1}{r}$ donnés par les approximations précédentes; quant aux autres termes de la valeur de P, nous avons vu, n° 10, qu'on pouvait les considérer comme des quantités connues dans chacune des approximations successives. Cela posé, en faisant, pour abréger, $P' = -\frac{d^2P}{dt^2}$, l'équation (2) deviendra ainsi

$$\frac{d^2.r_{\prime}^2}{2\,dt^2} - \frac{d^2\delta\frac{1}{r}}{dt^2} - \frac{1}{r_{\prime}} - \delta\frac{1}{r} + 1 = P' + 2\int d'R + r\frac{dR}{dr}. \quad (5)$$

Cette équation s'applique généralement à toutes les inégalités périodiques du mouvement lunaire; mais elle se simplifie dans le cas où il s'agit d'une inégalité qui n'est pas comprise dans les formules du mouvement elliptique; en effet, $r_{\prime}^2$ et $\frac{1}{r_{\prime}}$ étant alors indépendans de l'inégalité qu'il s'agit de calculer, on a simplement, dans ce cas,

$$\frac{d^2\delta\frac{1}{r}}{dt^2} + \delta\frac{1}{r} + P' + 2\int d'R + r\frac{dR}{dr} = 0. \quad (6)$$

Il ne reste plus qu'à développer les trois fonctions $\frac{d^2P}{dt^2}$, $2\int d'R$ et $r\frac{dR}{dr}$, qui entrent dans les formules précédentes.

Nous avons vu, n° 6, que l'expression de $r\frac{dR}{dr}$ se déduisait immédiatement de celle de R, et nous avons développé cette dernière fonction en ne tenant compte que des quantités de l'ordre de la force perturbatrice, ce qui suffit à la première approximation. Pour avoir

égard au carré de cette force il faudra, à la valeur de R, ajouter, n° 7, la fonction

$$\delta R = \frac{dR}{dr}\delta r + \frac{dR}{dv}\delta v + \frac{dR}{ds}\delta s,$$

ou bien en observant qu'on a, aux quantités près que nous négligeons, $\delta r = -r_1^2\left(\delta\frac{1}{r}\right)$, et en omettant les termes dépendans de la latitude, dont nous ferons d'abord abstraction,

$$\delta R = -r\frac{dR}{dr}\left(r_1\delta\frac{1}{r}\right) + \frac{dR}{dv}\delta v. \qquad (a)$$

Pour calculer cette quantité, on substituera à la place de $r_1\delta\frac{1}{r}$ et de δv leurs valeurs données par la première approximation, et l'on remplacera les quantités $-r\frac{dR}{dr}$ et $\frac{dR}{dv}$ par leurs valeurs en séries, valeurs qu'il sera facile de déduire de celle de R, comme on l'a vu n° 6. En effet, pour les termes indépendans de la parallaxe solaire, on aura

$$r\frac{dR}{dr} = 2R, \quad \frac{dR}{dv} = \frac{dR}{d\xi};$$

et de même pour les approximations subséquentes. Quant aux termes qui dépendent de cette parallaxe, on aura

$$r\frac{dR}{dr} = 3R, \quad \frac{dR}{dv} = \frac{dK}{d\xi}.$$

Cela posé, on combinera entre eux les différens termes des deux facteurs de chacun des produits dont se compose la fonction δR, et l'on réunira les coefficiens des *cosinus* qui dépendent des mêmes argumens. Il est aisé de s'assurer que la fonction δR se trouvera

formée ainsi d'une suite de *cosinus* dépendans des mêmes argumens que ceux qui entrent dans l'expression de R, et dont la réunion de ces deux fonctions ne fera qu'altérer les coefficiens; la fonction δR contiendra de plus une suite de nouveaux *cosinus* multipliés par des coefficiens constans, et dont les angles résulteront de la combinaison des argumens primitifs. Ce calcul, au reste, n'aura de difficulté que son extrême longueur et l'attention soutenue qu'il faudra avoir pour n'omettre aucune des combinaisons qui peuvent reproduire un terme dépendant du même argument que celui que l'on considère.

Pour porter l'approximation jusqu'aux quantités de l'ordre du *cube* de la force perturbatrice, on ajoutera aux valeurs des fonctions $\left(r_1 \delta \frac{1}{r}\right)$, δv, qui entrent dans l'expression de δR, les termes du second ordre qui résultent de la deuxième approximation; la valeur complète de δR, d'ailleurs, en ayant égard aux troisièmes puissances de la force perturbatrice, d'après l'expression générale donnée n° 7, sera

$$\begin{aligned}\delta R = {} & \frac{dR}{dr}\delta r + \frac{dR}{dv}\delta v \\ & + \frac{1}{2}\frac{d^2R}{dr^2}\delta r^2 + \frac{dR}{dr dv}\delta r \delta v + \frac{1}{2}\frac{d^2R}{dv^2}\delta v^2.\end{aligned}$$

En observant qu'aux quantités près que nous négligeons, on peut supposer ici

$$\delta r = -r_1^2 \delta \frac{1}{r} + r_1^3 \left(\delta \frac{1}{r}\right)^2,$$

et qu'en ne considérant que la partie de la valeur de R (n° 3), indépendante de la parallaxe solaire,

on a

$$R = \frac{m'r^2}{4r'^3}\left\{1 + 3\cos(2v - 2v')\right\};$$

d'où l'on conclut

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2} = r\frac{dR}{dr} = 2R, \quad r\frac{d^2R}{drdv} = 2\frac{dR}{dv};$$

la valeur précédente de δR, en négligeant les termes multipliés par $\delta\frac{1}{r}$ et δv, qui sont compris dans la formule (a), deviendra

$$\delta_2 R = 3R\left(r_1\delta\frac{1}{r}\right)^2 - 2\frac{dR}{dv}\left(r_1\delta\frac{1}{r}\right)\delta v + \frac{1}{2}\frac{d^2R}{dv^2}\delta v^2. \quad (b)$$

Les différens termes de cette expression se calculeront comme ceux de la fonction δR, et reproduiront des *cosinus* dépendans des mêmes argumens, qu'on réunira aux termes du même ordre, produits par la formule (a), pour former le développement de la fonction R, exact jusqu'aux quantités de l'ordre du *cube* de la force perturbatrice.

Quant aux termes dépendans de la parallaxe solaire, ou qui, multipliés par la fraction $\frac{a}{a'}$, sont du second ou du troisième ordre par rapport à la force perturbatrice, on obtiendra ceux de ces termes qu'introduit dans δR la partie de la fonction R indépendante de cette parallaxe, en substituant successivement dans les formules (a) et (b), pour $\delta\frac{1}{r}$, δv, $\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2$, etc., les valeurs qui résultent des approximations antérieures à celles que l'on considère, le reste du calcul s'effectuera comme on l'a dit précédemment.

Mais, outre les termes ainsi obtenus, la partie de la fonction R dépendante de la parallaxe solaire introduira dans δR des termes de la même espèce, auxquels il faut avoir égard. Pour cela, observons qu'en ne considérant que cette partie de la fonction R, on a, n° 3,

$$R = \frac{m' r^3}{8 r'^4} \{ 3 \cos (v - v') + 5 \cos 3 (v - v') \} ;$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{2} r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} = r \frac{dR}{dr} = 3R , \quad r \frac{d^2 R}{dr\, dv} = 3 \frac{dR}{dv} .$$

L'expression de δR deviendra donc, relativement à ces termes,

$$\left.\begin{aligned} \delta R = & -3\overline{R}\left(r_1 \delta \frac{1}{r}\right) + \frac{d\overline{R}}{dv} \delta v \\ & + 6\overline{R}\left(r_1 \delta \frac{1}{r}\right)^2 - 3 \frac{d\overline{R}}{dv}\left(r_1 \delta \frac{1}{r}\right) \delta v + \frac{1}{2} \frac{d^2 \overline{R}}{dv^2} \delta v^2 . \end{aligned}\right\} \quad (c)$$

Dans cette formule on substituera pour $\overline{R}$ les termes du développement donné n° 6, qui sont multipliés par le rapport $\frac{a}{a'}$; et comme nous négligerons le carré de cette quantité, on substituera simplement pour $\left(r_1 \delta \frac{1}{r}\right)$, δv, etc., leurs valeurs résultantes de la partie de la fonction perturbatrice indépendante de la parallaxe solaire.

On conçoit aisément comment on devrait s'y prendre pour pousser plus loin l'approximation; mais nous n'aurons besoin de considérer les termes de l'ordre de la quatrième puissance de la force perturbatrice que pour quelques cas particuliers où les séries par lesquelles sont exprimés les coefficiens des

inégalités de la longitude, ne sont pas suffisamment convergentes : il sera facile alors de poursuivre le développement de la fonction R, en se bornant à considérer les termes nécessaires au calcul de ces inégalités; quant aux termes dépendans de la cinquième puissance de la force perturbatrice, il n'a pas paru nécessaire, jusqu'ici, d'y avoir égard.

Le développement de la fonction $\delta . \frac{dR}{dv}$ s'effectuerait par les mêmes principes que celui de la fonction δR; il suffira de substituer dans les formules précédentes, à la place de R, le coefficient différentiel $\frac{dR}{dv}$. Ainsi en faisant, pour simplifier, $R_1 = \frac{dR}{dv}$, les termes dépendans du carré de la force perturbatrice seront donnés par la formule

$$\delta . \frac{dR}{dv} = -r \frac{dR_1}{dr} \left(r_1 \delta \frac{1}{r}\right) + \frac{dR_1}{dv} \delta v; \qquad (d)$$

ceux du troisième ordre, en faisant abstraction des termes dépendans de la parallaxe solaire, par la formule

$$\delta . \frac{dR}{dv} = 3R_1 \left(r_1 \delta \frac{1}{r}\right)^2 - 2 \frac{dR_1}{dv} \left(r_1 \delta \frac{1}{r}\right) \delta v + \frac{1}{2} \frac{d^2 R_1}{dv^2} \delta v^2, \quad (e)$$

et de même pour les approximations subséquentes.

14. On peut donc supposer le développement de la fonction R complétement effectué; la valeur de cette quantité formera une suite de *cosinus* dépendans des mêmes argumens que ceux qui entrent dans la valeur relative à la première approximation, et de quelques nouveaux argumens introduits par les approximations successives. De cette expression de R on déduira la valeur de la fonction $r \frac{dR}{dr}$ qui entre dans

la formule (2) par l'équation $r\frac{dR}{dr} = 2R$, pour les termes indépendans de la parallaxe solaire ; quant aux termes affectés de cette parallaxe, d'après ce qui a été dit n° 13, on les déduira aisément des valeurs qui ont servi à former les termes qui leur correspondent dans la fonction R.

Occupons-nous maintenant du développement de la fonction $\int d'R$. La caractéristique d' indiquant la différentielle de la fonction R prise par rapport aux coordonnées de la Lune seulement, désignons par $d''R$ la différentielle de la même fonction prise par rapport aux seules coordonnées du Soleil, et par dR sa différentielle complète, on aura

$$d'R = dR - d''R,$$

et par conséquent,

$$\int d'R = R - \int d''R. \qquad (7)$$

Connaissant la valeur de la fonction R, il ne s'agira donc que de former le développement de la fonction $\int d''R$, ce qui sera toujours plus facile que de calculer $\int d'R$ directement. D'après la signification de la caractéristique d'', on aura

$$d''R = \frac{dR}{dr'}dr' + \frac{dR}{dv'}dv'.$$

En ne considérant que les termes de R indépendans de la parallaxe du Soleil, on a d'ailleurs

$$r'\frac{dR}{dr} = -3R, \quad \frac{dR}{dv'} = -\frac{dR}{dv};$$

on aura donc

$$d''R = -3R\frac{dr'}{dr'} - \frac{dR}{dv}dv'. \qquad (8)$$

En différentiant les valeurs de r' et v' données n° 5, on formera celles des quantités dr' et dv', et l'on observera que chacun des termes qui les composent se trouvera multiplié par le facteur m, qui est une quantité du premier ordre, n° 8; en sorte que la fonction R étant de l'ordre m^2 (n° 6), chacun des termes de la fonction $d''R$ sera au moins déjà de l'ordre m^3. Cette considération, jointe à ce que les valeurs complètes de r' et v' sont renfermées dans les formules du mouvement elliptique, facilite beaucoup le calcul de la fonction $d''R$. En intégrant, on aura ensuite

$$-\int d''R = 3\int R\frac{dr'}{r'} + \int \frac{dR}{dv}dv'. \qquad (9)$$

En substituant cette valeur et celle de R trouvée plus haut dans l'équation (7), on formera la valeur de la fonction $\int d'R$.

La différentielle dr' ne contient aucun terme indépendant de l'excentricité e' de l'orbe solaire; et lorsqu'on fait abstraction de ces termes, on a d'ailleurs $dv' = mdt$, mt représentant le moyen mouvement du Soleil, et t celui de la Lune, n° 13; on pourra donc, dans ce cas, supposer simplement

$$d''R = -\frac{dR}{dv}mdt,$$

et par suite,

$$\int d'R = R + m\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt. \qquad (10)$$

Comme on est d'ailleurs obligé de calculer la fonction $\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt$, qui entre dans l'expression de la lon-

gitude, la fonction $\int d'\mathrm{R}$ devient, dans ce cas, qui comprend un grand nombre d'inégalités lunaires, extrêmement facile à calculer.

Le développement de la fonction $2\int d'\mathrm{R}$ ainsi effectué, produira une série de *cosinus* dépendans des mêmes argumens que ceux qui composent la fonction $r\frac{d\mathrm{R}}{dr}$; et en représentant généralement par R_i le coefficient du *cosinus* qui porte le n° i dans l'expression de leur somme, i étant un nombre entier différent de zéro, on pourra supposer

$$2\int d'\mathrm{R}+r\frac{d\mathrm{R}}{dr}=2g+2\mathrm{R}_0+\mathrm{R}_1\, e\cos\underset{(1)}{\varphi}+\mathrm{R}_2\, e^2\cos 2\underset{(2)}{\varphi}$$
$$+\mathrm{R}_3\, e^3\cos 3\underset{(3)}{\varphi}+\text{etc.},$$

g étant la constante arbitraire jointe à l'intégrale $\int d'\mathrm{R}$ et R_0 la partie non périodique de la fonction R.

Il nous reste à développer, d'après les mêmes principes, la fonction P′ qui entre dans le second membre de la formule (5). Pour cela, rappelons-nous que nous avons supposé, n° 3,

$$\mathrm{P}=-r_1^3\,\delta\frac{1}{r}+\frac{3}{2}r_1^4\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2-2r_1^5\left(\delta\frac{1}{r}\right)^3+\frac{5}{2}r_1^6\left(\delta\frac{1}{r}\right)^4+\text{etc.},$$

expression dans laquelle on substituera pour r_1^3, r_1^4, r_1^5, etc., leurs valeurs elliptiques, la seule valeur $r_1^3=1$ étant exceptée, et pour $\delta\frac{1}{r}$, $\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2$, $\left(\delta\frac{1}{r}\right)^3$, etc., leurs valeurs résultantes des approximations successives. En réunissant entre eux les termes qui dépendent des mêmes *cosinus*, on conçoit que la

fonction P se trouvera ainsi développée en une suite de termes semblables à ceux qui forment l'expression de $\delta\frac{1}{r}$. Soit généralement P_i le coefficient du terme qui dépend de l'angle qui porte le n° i dans cette suite, en sorte qu'on ait

$$P = P_0 + P_1 e \cos \underset{(1)}{\varphi} + P_2 e^2 \cos 2\underset{(2)}{\varphi} + P_3 e^3 \cos 3\underset{(3)}{\varphi} + \text{etc.}$$

En multipliant chacun des termes de la série précédente par le carré du coefficient du temps dans l'argument du cosinus qui lui correspond, on aura la valeur de la fonction $-\frac{d^2P}{dt^2}$ ou P′ qui entre dans les équations (5) et (6) du n° 13.

15. Les différentes opérations que nous venons d'indiquer étant exécutées, on pourra procéder à l'intégration de ces équations. En effet, d'après ce qui précède, il est facile de voir que chacun des termes qui composeront le second membre de l'équation (5) après son entier développement, introduira dans l'expression de $\frac{1}{r}$ un terme périodique dépendant du même argument que lui; et comme les différentes quantités $r\frac{dR}{dr}$, $\int d'R$ et P′ sont de même forme que R, le développement de la fonction perturbatrice R indiquera d'avance la forme de la série qui représentera la valeur de la fonction $\frac{1}{r}$. D'après cela, et en nous conformant à la notation adoptée plus haut, nous pourrons supposer :

$$
\begin{aligned}
\delta \frac{1}{r} = a_0 & + a_1 \, e \cos \varphi \\
& + a_2 \, e^2 \cos 2\varphi \\
& + a_3 \, e^3 \cos 3\varphi \\
& + a_6 \, e' \cos \varphi' \\
& + a_7 \, e'^2 \cos 2\varphi' \\
& + a_8 \, ee' \cos (\varphi - \varphi') \\
& + a_9 \, ee' \cos (\varphi \pm \varphi') \\
& + a_{10} \, e^2 e' \cos (2\varphi - \varphi') \\
& + a_{11} \, e^2 e' \cos (2\varphi + \varphi') \\
& + a_{12} \, ee'^2 \cos (\varphi - 2\varphi') \\
& + a_{13} \, ee'^2 \cos (\varphi + 2\varphi') \\
& + a_{14} \, e^2 e'^2 \cos (2\varphi - 2\varphi') \\
& + a_{15} \, e^2 e'^2 \cos (2\varphi + 2\varphi') \\
& + a_{16} \, e^3 e' \cos (3\varphi - \varphi') \\
& + a_{17} \, e^3 e' \cos (3\varphi + \varphi') \\
& + a_{30} \cos 2\xi \\
& + a_{31} \, e \cos (2\xi - \varphi) \\
& + a_{32} \, e \cos (2\xi + \varphi) \\
& + a_{33} \, e' \cos (2\xi - \varphi') \\
& + a_{34} \, e' \cos (2\xi + \varphi') \\
& + a_{35} \, e^2 \cos (2\xi -- 2\varphi) \\
& + a_{36} \, e^2 \cos (2\xi + 2\varphi) \\
& + a_{37} \, ee' \cos (2\xi - \varphi - \varphi') \\
& + a_{38} \, ee' \cos (2\xi - \varphi + \varphi') \\
& + a_{39} \, ee' \cos (2\xi + \varphi - \varphi') \\
& + a_{40} \, ee' \cos (2\xi + \varphi + \varphi') \\
& + a_{41} \, e'^2 \cos (2\xi - 2\varphi') \\
& + a_{42} \, e'^2 \cos (2\xi + 2\varphi') \\
& + a_{43} \, e^3 \cos (2\xi - 3\varphi) \\
& + a_{44} \, e^3 \cos (2\xi + 3\varphi) \\
& + a_{45} \, e^2 e' \cos (2\xi - 2\varphi - \varphi') \\
& + a_{46} \, e^2 e' \cos (2\xi - 2\varphi + \varphi') \\
& + a_{47} \, e^2 e' \cos (2\xi + 2\varphi - \varphi') \\
& + a_{48} \, e^2 e' \cos (2\xi + 2\varphi + \varphi') \\
& + a_{49} \, ee'^2 \cos (2\xi - \varphi - 2\varphi') \\
& + a_{50} \, ee'^2 \cos (2\xi - \varphi + 2\varphi') \\
& + a_{51} \, ee'^2 \cos (2\xi + \varphi - 2\varphi') \\
& + a_{52} \, e^4 \cos (2\xi - 4\varphi) \\
& + a_{53} \, e^3 e' \cos (2\xi - 3\varphi - \varphi') \\
& + a_{54} \, e^3 e' \cos (2\xi - 3\varphi + \varphi') \\
& + a_{55} \, e^2 e'^2 \cos (2\xi - 2\varphi - 2\varphi') \\
& + a_{56} \, e^2 e'^2 \cos (2\xi + 2\varphi + 2\varphi') \\
& + a_{70} \, \frac{a}{a'} \cos \xi
\end{aligned}
$$

$$+ a_{71} \frac{a}{a'} e \cos(\xi - \varphi)$$

$$+ a_{72} \frac{a}{a'} e \cos(\xi + \varphi)$$

$$+ a_{73} \frac{a}{a'} e' \cos(\xi - \varphi')$$

$$+ a_{74} \frac{a}{a'} e' \cos(\xi + \varphi')$$

$$+ a_{75} \frac{a}{a'} e^2 \cos(\xi - 2\varphi)$$

$$+ a_{76} \frac{a}{a'} e^2 \cos(\xi + 2\varphi)$$

$$+ a_{77} \frac{a}{a'} ee' \cos(\xi - \varphi - \varphi')$$

$$+ a_{78} \frac{a}{a'} ee' \cos(\xi - \varphi + \varphi')$$

$$+ a_{79} \frac{a}{a'} ee' \cos(\xi + \varphi + \varphi')$$

$$+ a_{80} \frac{a}{a'} \cos 3\xi$$

$$+ a_{81} \frac{a}{a'} e \cos(3\xi - \varphi)$$

$$+ a_{82} \frac{a}{a'} e \cos(3\xi + \varphi)$$

$$+ a_{83} \frac{a}{a'} e' \cos(3\xi - \varphi')$$

$$+ a_{84} \frac{a}{a'} e' \cos(3\xi + \varphi')$$

$$+ a_{85} \frac{a}{a'} e^2 \cos(3\xi - 2\varphi)$$

$$+ a_{86} \cos 4\xi$$
$$+ a_{87}\, e \cos(4\xi - \varphi)$$
$$+ a_{88}\, e \cos(4\xi + \varphi)$$
$$+ a_{89}\, e' \cos(4\xi - \varphi')$$
$$+ a_{90}\, e' \cos(4\xi + \varphi')$$
$$+ a_{91}\, e^2 \cos(4\xi - 2\varphi)$$
$$+ a_{92}\, e^2 \cos(4\xi + 2\varphi)$$
$$+ a_{93}\, ee' \cos(4\xi - \varphi - \varphi')$$
$$+ a_{94}\, ee' \cos(4\xi - \varphi + \varphi')$$
$$+ a_{95}\, e^3 \cos(4\xi - 3\varphi)$$
$$+ a_{96}\, e^2e' \cos(4\xi - 2\varphi - \varphi')$$
$$+ a_{97}\, e^2e' \cos(4\xi - 2\varphi + \varphi')$$
$$+ a_{98}\, ee'^2 \cos(4\xi - \varphi - 2\varphi')$$
$$+ a_{99}\, ee'^2 \cos(4\xi - \varphi + 2\varphi')$$
$$+ a_{102} \cos 6\xi$$
$$+ a_{103}\, e \cos(6\xi - \varphi)$$
$$+ a_{104}\, e^2 \cos(6\xi - 2\varphi)$$

Chacun des coefficiens indéterminés a_0, a_1, a_2, etc.; qui entrent dans cette expression, porte le numéro qui se rapporte à l'argument du cosinus qu'il multiplie, ces mêmes numéros demeurant affectés constamment aux mêmes argumens dans tout le cours de cette théorie. Nous exprimerons la valeur de l'accroissement de la longitude δv par une suite semblable à la précédente, dans laquelle les *cosinus* seront simplement changés en *sinus* et multipliés par de nouveaux coefficiens pareillement indéterminés; enfin une notation analogue nous servira à exprimer, sous une forme très commode pour le calcul des inégalités qui la composent, la valeur de la variation δs de la tangente de la *latitude*.

Cela posé, si dans les équations (5) ou (6) (n° 13), on substitue pour r_1 sa valeur elliptique, et pour $\delta \frac{1}{r}$ la série précédente; qu'on remplace les fonctions P', $2\int d'R + r\frac{dR}{dr}$ par les suites de termes que nous avons employées pour représenter le développement de ces quantités, et qu'on égale respectivement à zéro les coefficiens des mêmes *cosinus* dans ces équations, en ne considérant d'abord que la partie non périodique ou indépendante du temps t, on aura

$$a_0 + 2g + 2R_0 = 0, \tag{11}$$

R_0 représentant la partie non périodique de la fonction $R + \delta R$.

La comparaison des termes qui dépendent de l'argument φ donnera l'équation

$$a_1(c^2 - 1) + (c^2 - 1) = c^2 P_1 + R_1. \tag{12}$$

En comparant ainsi les coefficiens des *cosinus* dépendans des mêmes argumens, et en se rappelant la signification des lettres ξ, φ, φ', n° 6, on trouvera, pour déterminer les coefficiens arbitraires qui entrent dans l'expression du rayon vecteur, les équations suivantes :

$$a_2\,(4c^2-1)+(c^2-1)=4c^2P_2+R_2,$$
$$a_3\,(9c^2-1)+\frac{9}{8}(c^2-1)=9c^2P_3+R_3,$$
$$a_6\,(m^2-1)=m^2P_6+R_6,$$
$$a_7\,(4m^2-1)=4m^2P_7+R_7,$$
$$a_8\,[(c-m)^2-1]=(c-m)^2P_8+R_8,$$
$$a_9\,[(c+m)^2-1]=(c+m)^2P_9+R_9,$$
$$a_{10}[(2c-m)^2-1]=(2c-m)^2P_{10}+R_{10},$$
$$a_{11}[(2c+m)^2-1]=(2c+m)^2P_{11}+R_{11},$$
$$a_{12}[(c-2m)^2-1]=(c-2m)^2P_{12}+R_{12},$$
$$a_{13}[(c+2m)^2-1]=(c+2m)^2P_{13}+R_{13},$$
$$a_{14}[(3c-m)^2-1]=(3c-m)^2P_{14}+R_{14},$$
$$a_{15}[(3c+m)^2-1)=(3c+m)^2P_{15}+R_{15},$$
$$a_{20}[(2-2m)^2-1)=(2-2m)^2P_{20}+R_{20},$$
$$a_{21}[(2-2m-c)^2-1]=(2-2m-c)^2P_{21}+R_{21},$$
$$a_{22}[(2-2m+c)^2-1]=(2-2m+c)^2P_{22}+R_{22},$$
$$a_{23}[(2-3m)^2-1]=(2-3m)^2P_{23}+R_{23},$$
$$a_{24}[(2-m)^2-1]=(2-m)^2P_{24}+R_{24},$$
$$a_{25}[(2-2m-2c)^2-1]=(2-2m-2c)^2P_{25}+R_{25},$$
$$a_{26}[(2-2m+2c)^2-1]=(2-2m+2c)^2P_{26}+R_{26},$$
$$a_{37}[(2-3m-c)^2-1]=(2-3m-c)^2P_{37}+R_{37},$$
$$a_{38}[(2-m-c)^2-1]=(2-m-c)^2P_{38}+R_{38},$$
$$a_{39}[(2-3m+c)^2-1]=(2-3m+c)^2P_{39}+R_{39},$$
$$a_{40}[(2-m+c)^2-1]=(2-m+c)^2P_{40}+R_{40},$$
$$a_{41}[(2-4m)^2-1]=(2-4m)^2P_{41}+R_{41},$$
$$3a_{42}=4P_{42}+R_{42},$$
$$a_{43}[(2-2m-3c)^2-1]=(2-2m-3c)^2P_{43}+R_{43},$$
$$a_{44}[(2-2m+3c)^2-1]=(2-2m+3c)^2P_{44}+R_{44},$$
$$a_{45}[(2-3m-2c)^2-1]=(2-3m-2c)^2P_{45}+R_{45},$$
$$a_{46}[(2-m-2c)^2-1]=(2-m-2c)^2P_{46}+R_{46},$$
$$a_{47}[(2-3m+2c)^2-1]=(2-3m+2c)^2p_{47}+R_{47},$$
$$a_{48}[(2-m+2c)^2-1]=(2-m+2c)^2P_{48}+R_{48},$$
$$a_{49}[(2-4m-c)^2-1]=(2-4m-c)^2P_{49}+R_{49},$$
$$a_{50}[(2-c)^2-1]=(2-c)^2P_{50}+R_{50},$$

$$a_{61}[(2-4m+c)^2-1]=(2-4m+c)^2 P_{61}+R_{61},$$
$$a_{62}[(2-2m-4c)^2-1]=(2-2m-4c)^2 P_{62}+R_{62},$$
$$a_{63}[(2-3m-3c)^2-1]=(2-3m-3c)^2 P_{63}+R_{63},$$
$$a_{64}[(2-m-3c)^2-1]=(2-m-3c)^2 P_{64}+R_{64},$$
$$a_{65}[(2-4m-2c)^2-1]=(2-4m-2c)^2 P_{65}+R_{65},$$
$$a_{66}[(2+2c)^2-1]=(2+2c)^2 P_{66}+R_{66},$$
$$a_{70}[(1-m)^2-1]=(1-m)^2 P_{70}+R_{70},$$
$$a_{71}[(1-m-c)^2-1]=(1-m-c)^2 P_{71}+R_{71},$$
$$a_{72}[(1-m+c)^2-1]=(1-m-c)^2 P_{72}+R_{72},$$
$$a_{73}[(1-2m)^2-1]=(1-2m)^2 P_{73}+R_{73},$$
$$a_{74}[(1-m+m)^2-1]=P_{74}+R_{74},$$
$$a_{75}[(1-m-2c)^2-1]=(1-2m-2c)^2 P_{75}+R_{75},$$
$$a_{76}[(1-m+2c)^2-1]=(1-2m+2c)^2 P_{76}+R_{76},$$
$$a_{77}[(1-2m-c)^2-1]=(1-2m-c)^2 P_{77}+R_{77},$$
$$a_{78}[(1-c)^2-1]=(1-c)^2 P_{78}+R_{78},$$
$$a_{79}[(1+c)^2-1]=(1+c)^2 P_{79}+R_{79},$$
$$a_{80}[(3-3m)^2-1]=(3-3m)^2 P_{80}+R_{80},$$
$$a_{81}[(3-3m-c)^2-1]=(3-3m-c)^2 P_{81}+R_{81},$$
$$a_{82}[(3-3m+c)^2-1]=(3-3m+c)^2 P_{82}+R_{82},$$
$$a_{83}[(3-4m)^2-1]=(3-4m)^2 P_{83}+R_{83},$$
$$a_{84}[(3-2m)^2-1]=(3-2m)^2 P_{84}+R_{84},$$
$$a_{85}[(3-3m-2c)^2-1]=(3-3m-2c)^2 P_{85}+R_{85},$$
$$a_{86}[(4-4m)^2-1]=(4-4m)^2 P_{86}+R_{86},$$
$$a_{87}[(4-4m-c)^2-1]=(4-4m-c)^2 P_{87}+R_{87},$$
$$a_{88}[(4-4m+c)^2-1]=(4-4m+c)^2 P_{88}+R_{88},$$
$$a_{89}[(4-5m)^2-1]=(4-5m)^2 P_{89}+R_{89},$$
$$a_{90}[(4-3m)^2-1]=(4-3m)^2 P_{90}+R_{90},$$
$$a_{91}[(4-4m-2c)^2-1]=(4-4m-2c)^2 P_{91}+R_{91},$$
$$a_{92}[(4-4m+2c)^2-1]=(4-4m+2c)^2 P_{92}+R_{92},$$
$$a_{93}[(4-5m-c)^2-1]=(4-5m-c)^2 P_{93}+R_{93},$$
$$a_{94}[(4-3m-c)^2-1]=(4-3m-c)^2 P_{94}+R_{94},$$
$$a_{95}[(4-4m-3c)^2-1]=(4-4m-3c)^2 P_{95}+R_{95},$$
$$a_{96}[(4-5m-2c)^2-1]=(4-5m-2c)^2 P_{96}+R_{96},$$
$$a_{97}[(4-3m-2c)^2-1]=(4-3m-2c)^2 P_{97}+R_{97},$$
$$a_{98}[(4-6m-c)^2-1]=(4-6m-c)^2 P_{98}+R_{98},$$
$$a_{99}[(4-2m-c)^2-1]=(4-2m-c)^2 P_{99}+R_{99},$$
$$a_{102}[(6-6m)^2-1]=(6-6m)^2 P_{102}+R_{102},$$
$$a_{103}[(6-6m-c)^2-1]=(6-6m-c)^2 P_{103}+R_{103},$$
$$a_{104}[(6-6m-2c)^2-1]=(6-6m-2c)^2 P_{104}+R_{104}.$$

En remplaçant dans ces équations P_1, P_2, etc., R_0, R_1, R_2, etc., par les valeurs que ces lettres représentent, on en conclura celles des coefficiens indéterminés a_0, a_1, a_2, etc., qui entrent dans l'expression de $\delta\frac{1}{r}$.

16. Il ne nous reste donc qu'à effectuer le développement des diverses fonctions dont nous avons indiqué la formation n° 14; mais cette opération exige d'immenses calculs, et nous serons souvent obligés ici de nous contenter d'en indiquer la marche et d'en présenter les résultats; les explications précédentes suffiront, toutefois, pour que chacun puisse en constater l'exactitude et rétablir les détails de calculs que le défaut d'espace nous force à supprimer.

D'après le principe de la méthode des approximations successives, toutes les inégalités du rayon vecteur et de la longitude du premier ordre par rapport à la force perturbatrice, doivent être déterminées avant de procéder à la seconde approximation. L'expression de la fonction R donnée n° 6, suffit pour les obtenir, et la substitution de ces valeurs dans l'expression de $R + \delta R$ donnera la valeur de la fonction perturbatrice nécessaire à cette seconde approximation, à l'aide de laquelle on déterminera toutes les inégalités du rayon vecteur et de la longitude exactes, aux quantités près du troisième ordre par rapport à la force perturbatrice. On substituera de nouveau ces valeurs dans l'expression de la fonction $R + \delta R$, ce qui donnera la valeur de la fonction perturbatrice nécessaire à la quatrième approximation, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on ait atteint l'ordre de préci-

sion auquel on veut s'arrêter. C'est de cette manière qu'a été formée l'expression de la fonction δR que nous rapportons ci-dessous; mais, pour éviter des répétitions fastidieuses, nous avons réuni les diverses parties de cette fonction obtenues par des approximations successives, et nous y avons ajouté la valeur de la fonction R dépendante de la première puissance des forces perturbatrices, donnée n° 6, de manière à présenter, sous un même point de vue, la valeur complète de la fonction perturbatrice due à l'influence du Soleil sur le mouvement de la Lune.

En faisant dans la valeur de R, n° 6, $m^2 = \frac{m' a^3}{a'^3}$, et en ne considérant d'abord dans le coefficient de chaque *cosinus* que les termes de l'ordre le moins élevé par rapport aux excentricités des orbites du Soleil et de la Lune, nous avons trouvé :

$$
\begin{aligned}
R = {} & \frac{m^2}{4} - \frac{179}{96} m^4 - \frac{97}{16} m^5 - \frac{7681}{576} m^6 - \frac{7103}{288} m^7 - \frac{14028053}{331776} m^8 \\
& + \left(-\frac{m^2}{2} - \frac{135}{32} m^3 - \frac{5903}{384} m^4 - \frac{111843}{2048} m^5 - \frac{12561407}{73728} m^6 - \frac{30757371}{65536} m^7 \right) e \cos \underset{(1)}{\varphi} \\
& + \left(-\frac{m^2}{8} - \frac{45}{8} m^3 - \frac{17755}{768} m^4 - \frac{246863}{2048} m^5 \right) e^2 \cos \underset{(2)}{2\varphi} \\
& - \frac{m^2}{16} e^3 \cos \underset{(3)}{3\varphi} \\
& + \left(\frac{3}{4} m^2 - \frac{163}{16} m^4 - \frac{97}{2} m^5 - \frac{69561}{384} m^6 - \frac{42175}{72} m^7 \right) e' \cos \underset{(6)}{\varphi'} \\
& + \left(\frac{9}{8} m^2 - \frac{1419}{64} m^4 - \frac{1067}{8} m^5 \right) e'^2 \cos \underset{(7)}{2\varphi'} \\
& + \left(\begin{array}{l} -\frac{3}{4} m^2 - \frac{759}{64} m^3 - \frac{9217}{128} m^4 - \frac{1780361}{4096} m^5 \\ -\frac{30891751}{12288} m^6 - \frac{17529000227}{1179648} m^7 \end{array} \right) ee' \cos \underset{(8)}{(\varphi - \varphi')}
\end{aligned}
$$

$$+\left(\begin{array}{l}-\frac{3}{4}m^2-\frac{411}{64}m^3-\frac{1721}{64}m^4-\frac{485321}{4096}m^5\\-\frac{8980597}{24576}m^6-\frac{169406639}{1179648}m^7\end{array}\right)ee'\cos\underset{(9)}{(\varphi+\varphi')}$$

$$+\left(-\frac{3}{16}m^2-\frac{471}{32}m^3\right)e^2e'\cos\underset{(10)}{(2\varphi-\varphi')}$$

$$-\frac{3}{16}m^2e^2e'\cos\underset{(11)}{(2\varphi+\varphi')}$$

$$+\left(-\frac{9}{8}m^2-\frac{2673}{128}m^3-\frac{130593}{1024}m^4\right)ee'^2\cos\underset{(12)}{(\varphi-2\varphi')}$$

$$+\left(-\frac{9}{8}m^2-\frac{1287}{128}m^3-\frac{57399}{1024}m^4\right)ee'^2\cos\underset{(13)}{(\varphi+2\varphi')}$$

$$+\left(\frac{3}{4}m^2-\frac{3}{4}m^4-\frac{19}{12}m^5-\frac{15017}{9216}m^6+\frac{4181}{4320}m^7+\frac{17274979}{2073600}m^8\right)\cos\underset{(30)}{2\xi}$$

$$+\left(-\frac{9}{4}m^2-\frac{15}{16}m^3-\frac{163}{64}m^4-\frac{1877}{3072}m^5+\frac{883085}{36864}m^6+\frac{548674033}{4423680}m^7\right)e\cos\underset{(31)}{(2\xi-\varphi)}$$

$$+\left(\frac{3}{4}m^2+\frac{19}{32}m^4+\frac{635}{512}m^5-\frac{120189}{18432}m^6\right)e\cos\underset{(32)}{(2\xi+\varphi)}$$

$$+\left(\begin{array}{l}\frac{21}{8}m^2+\frac{9}{4}m^3-\frac{9}{4}m^4-\frac{3033}{64}m^5-\frac{1780615}{6144}m^6\\\qquad-\frac{59470747}{46080}m^7\end{array}\right)e'\cos\underset{(33)}{(2\xi-\varphi')}$$

$$+\left(\begin{array}{l}-\frac{3}{8}m^2-\frac{9}{4}m^3+\frac{3}{4}m^4+\frac{6667}{192}m^5+\frac{3950003}{18432}m^6\\+\frac{129162353}{138240}m^7\end{array}\right)e'\cos\underset{(34)}{(2\xi+\varphi')}$$

$$+\left(\begin{array}{l}\frac{15}{8}m^2+\frac{45}{32}m^3+\frac{7243}{512}m^4+\frac{163883}{2048}m^5\\\qquad+\frac{63205131}{147456}m^6+\frac{1040548649}{589824}m^7\end{array}\right)\cos\underset{(35)}{(2\xi-2\varphi)}$$

$$+\left(\frac{3}{4}m^2+\frac{11}{8}m^4\right)e^2\cos\underset{(36)}{(2\xi+2\varphi)}$$

$$+\left(\begin{array}{l}-\frac{63}{8}m^2-\frac{71}{16}m^3+\frac{2769}{256}m^4+\frac{1317679}{6144}m^5\\+\frac{73260295}{49152}m^6+\frac{558448049}{81920}m^7\end{array}\right)ee'\cos\underset{(37)}{(2\xi-\varphi-\varphi')}$$

$$+\left(\begin{array}{l}\frac{9}{8}m^2+\frac{3}{8}m^3-\frac{12433}{256}m^4-\frac{2463029}{6144}m^5\\\qquad-\frac{373495189}{147456}m^6-\frac{65161394443}{4423680}m^7\end{array}\right)ee'\cos\underset{(38)}{(2\xi-\varphi+\varphi')}$$

$$+\left(\frac{21}{8}m^2+\frac{135}{32}m^3+\frac{4627}{256}m^4+\frac{67059}{1024}m^5\right)ee'\cos(2\xi+\underset{(39)}{\varphi}-\varphi')$$

$$+\left(-\frac{3}{8}m^2-\frac{135}{32}m^3-\frac{1831}{256}m^4-\frac{3919}{1024}m^5\right)ee'\cos(2\xi+\underset{(40)}{\varphi}+\varphi')$$

$$+\left(\frac{51}{8}m^2+\frac{153}{16}m^3-\frac{9}{8}m^4-\frac{315907}{1536}m^5\right)e'^2\cos(2\xi\underset{(41)}{-}2\varphi')$$

$$-\left(\frac{9}{16}m^3-\frac{15}{4}m^4-\frac{6625}{512}m^5\right)e'^2\cos(2\xi\underset{(42)}{+}2\varphi')$$

$$+\left(-\frac{7}{32}m^2+\frac{105}{128}m^3\right)e^3\cos(2\xi\underset{(43)}{-}3\varphi)$$

$$+\frac{25}{32}m^2e^3\cos(2\xi\underset{(44)}{+}3\varphi)$$

$$+\left(\frac{105}{16}m^2+\frac{75}{64}m^3\right)e^2e'\cos(2\xi-\underset{(45)}{2\varphi}-\varphi')$$

$$+\left(-\frac{15}{16}m^2+\frac{315}{64}m^3\right)e^2e'\cos(2\xi-\underset{(46)}{2\varphi}+\varphi')$$

$$+\frac{21}{8}m^2e^2e'\cos(2\xi+\underset{(47)}{2\varphi}-\varphi')$$

$$-\frac{3}{8}m^2e^2e'\cos(2\xi+\underset{(48)}{2\varphi}+\varphi')$$

$$+\left(-\frac{153}{8}m^2-\frac{1659}{128}m^3+\frac{59405}{1024}m^4+\frac{12583409}{12288}m^5\right)ee'^2\cos(2\xi-\underset{(49)}{\varphi}-2\varphi')$$

$$+\left(-\frac{1}{2}a_{50}m^2-\frac{63}{128}m^3-\frac{25233}{1024}m^4-\frac{900323}{4096}m^5\right)ee'^2\cos(2\xi-\underset{(50)}{\varphi}+2\varphi')$$

$$+\frac{51}{8}m^2ee'^2\cos(2\xi+\underset{(51)}{\varphi}-2\varphi')$$

$$-\frac{3}{64}m^2e^4\cos(2\xi\underset{(52)}{-}4\varphi)$$

$$-\frac{49}{64}m^2e^3e'\cos(2\xi-\underset{(53)}{3\varphi}-\varphi')$$

$$+\frac{7}{64}m^2e^3e'\cos(2\xi-\underset{(54)}{3\varphi}+\varphi')$$

$$+\frac{255}{16}m^2e^2e'^2\cos(2\xi-\underset{(55)}{2\varphi}-2\varphi')$$

$$+\left(\begin{array}{l}\frac{3}{8}m^2+\frac{165}{64}m^3+\frac{2859}{256}m^4+\frac{55109}{1024}m^5\\+\frac{3719665}{12288}m^6+\frac{66622607}{36864}m^7\end{array}\right)\frac{a}{a'}\cos\underset{(70)}{\xi}$$

$$+\left(-\frac{15}{16}m^2-\frac{765}{128}m^3-\frac{13137}{512}m^4-\frac{1038333}{8192}m^5\right)\frac{a}{a'}e\cos(\xi\underset{(71)}{-}\varphi)$$

$$+\left(-\frac{3}{16}m^2+\frac{75}{128}m^3+\frac{3345}{256}m^4\right)\frac{a}{a'}e\cos(\xi\underset{(72)}{+}\varphi)$$

$$+\left(-\frac{27}{16}m^2+\frac{2667}{128}m^3-\frac{15583}{512}m^4\right)\frac{a}{a'}e'\cos(\xi\underset{(73)}{-}\varphi')$$

$$+\left(-\frac{1}{2}a_{74}m^2+\frac{3}{8}m^2-\frac{387}{128}m^3+\frac{9055}{512}m^4-\frac{79571}{2048}m^5\right)\frac{a}{a'}e'\cos(\xi\underset{(74)}{+}\varphi')$$

$$+\frac{33}{64}m^2\frac{a}{a'}e^2\cos(\xi\underset{(75)}{-}2\varphi)$$

$$+\frac{15}{8}m^2\frac{a}{a'}ee'\cos(\xi-\underset{(77)}{\varphi}-\varphi')$$

$$+\left(\frac{5}{8}m^2-\frac{45}{64}m^3-\frac{367}{64}m^4-\frac{24441}{1024}m^5\right)\frac{a}{a'}\cos\underset{(80)}{3\xi}$$

$$+\left(-\frac{45}{16}m^2-\frac{315}{128}m^3-\frac{247}{64}m^4\right)\frac{a}{a'}e\cos(3\xi\underset{(81)}{-}\varphi)$$

$$+\frac{15}{16}m^2\frac{a}{a'}e\cos(3\xi\underset{(82)}{+}\varphi)$$

$$+\frac{25}{8}m^2\frac{a}{a'}e'\cos(3\xi\underset{(83)}{-}\varphi')$$

$$+\left(\frac{5}{16}m^2-\frac{855}{128}m^3\right)\frac{a}{a'}e'\cos(3\xi\underset{(84)}{+}\varphi')$$

$$+\frac{285}{64}m^2\frac{a}{a'}e^2\cos(3\xi\underset{(85)}{-}2\varphi)$$

$$+\left(\frac{9}{32}m^4+\frac{21}{16}m^5+\frac{61}{16}m^6\right)\cos\underset{(86)}{4\xi}$$

$$+\left(\frac{45}{32}m^3+\frac{957}{128}m^4+\frac{61889}{2048}m^5+\frac{2330023}{24576}m^6\right)e\cos(4\xi\underset{(87)}{-}\varphi)$$

$$+\frac{45}{64}m^4e\cos(4\xi\underset{(88)}{+}\varphi)$$

$$+\left(\frac{63}{32}m^4+\frac{843}{64}m^5\right)e'\cos(4\xi\underset{(89)}{-}\varphi')$$

$$+\left(-\frac{9}{32}m^4-\frac{171}{64}m^5\right)e'\cos(\underset{(90)}{4\xi+\varphi'})$$

$$+\left(-\frac{45}{32}m^3-\frac{4899}{512}m^4-\frac{11183}{512}m^5\right)e^2\cos(\underset{(91)}{4\xi-2\varphi})$$

$$+\frac{81}{64}m^4\ e^2\cos(\underset{(92)}{4\xi+2\varphi})$$

$$+\left(\frac{525}{64}m^3+\frac{7179}{128}m^4+\frac{1048315}{4096}m^5\right)ee'\cos(\underset{(93)}{4\xi-\varphi-\varphi'})$$

$$+\left(-\frac{135}{64}m^3-\frac{681}{64}m^4+\frac{46347}{4096}m^5\right)ee'\cos(\underset{(94)}{4\xi-\varphi+\varphi'})$$

$$-\frac{135}{256}m^3\ e^3\cos(\underset{(95)}{4\xi-3\varphi})$$

$$+\frac{3765}{128}m^3\ ee'^2\cos(\underset{(98)}{4\xi-\varphi-2\varphi'})$$

$$-\frac{45}{128}m^3\ ee'^2\cos(\underset{(99)}{4\xi-\varphi+2\varphi'})$$

$$+\frac{177}{1024}m^4\cos\underset{(102)}{6\xi}$$

$$+\frac{675}{512}m^5\ e\cos(\underset{(103)}{6\xi-\varphi})$$

$$+\frac{675}{256}m^4\ e^2\cos(\underset{(104)}{6\xi-2\varphi}).$$

Si l'on fait abstraction des termes qui dépendent de la parallaxe solaire, en doublant l'expression précédente, on en conclura celle de la fonction $r\frac{dR}{dr}$; quant aux termes qui dépendent de la même parallaxe, ou qui ont pour facteur la très petite quantité $\frac{a}{a'}$, nous avons trouvé :

$$r\frac{d\mathrm{R}}{dr} = \left(\begin{array}{l}\frac{9}{8}m^2 + \frac{165}{32}m^3 + \frac{2445}{128}m^4 + \frac{49845}{512}m^5 + \frac{1201503}{2048}m^6 \\ \quad + \frac{22091483}{6144}m^7\end{array}\right)\frac{a}{a'}\cos\xi \quad (70)$$

$$+ \left(-\frac{45}{16}m^2 - \frac{1755}{128}m^3 - \frac{25725}{512}m^4 - \frac{1920031}{8192}m^5\right)\frac{a}{a'}\, e\cos(\xi - \varphi) \quad (71)$$

$$+ \left(-\frac{9}{16}m^2 - \frac{525}{128}m^3 + \frac{1803}{512}m^4\right)\frac{a}{a'}\, e\cos(\xi + \varphi) \quad (72)$$

$$+ \left(-\frac{9}{4}m^2 + \frac{2703}{64}m^3 - \frac{19021}{256}m^4\right)\frac{a}{a'}\, e'\cos(\xi - \varphi') \quad (73)$$

$$+ \left(-a_{74}m^2 + \frac{9}{8}m^2 - \frac{423}{64}m^3 + \frac{7273}{256}m^4 - \frac{106375}{1024}m^5\right)\frac{a}{a'}\, e'\cos(\xi + \varphi') \quad (74)$$

$$+ \frac{99}{64}m^2\frac{a}{a'}\, e^2\cos(\xi - 2\varphi) \quad (75)$$

$$+ \frac{15}{16}m^2\frac{a}{a'}\, ee'\cos(\xi - \varphi - \varphi') \quad (77)$$

$$+ \left(\frac{15}{8}m^2 - \frac{45}{32}m^3 - \frac{1547}{128}m^4 - \frac{24881}{512}m^5\right)\frac{a}{a'}\cos 3\xi \quad (80)$$

$$+ \left(-\frac{135}{16}m^2 - \frac{675}{128}m^3 - \frac{3523}{512}m^4\right)\frac{a}{a'}\, e\cos(3\xi - \varphi) \quad (81)$$

$$+ \frac{45}{16}m^2\frac{a}{a'}\, e\cos(3\xi + \varphi) \quad (82)$$

$$+ \frac{75}{8}m^2\frac{a}{a'}\, e'\cos(3\xi - \varphi') \quad (83)$$

$$- \frac{1035}{64}m^2\frac{a}{a'}\, e'\cos(3\xi + \varphi') \quad (84)$$

$$+ \frac{855}{64}m^2\frac{a}{a'}\, e^2\cos(3\xi - 2\varphi). \quad (85)$$

La valeur précédente a été déduite de l'équation

$$r\frac{d\mathrm{R}}{dr} = 2\mathrm{R}' + 3\mathrm{R}'',$$

en désignant respectivement par R′ et R″ les termes dépendans de la parallaxe solaire qui résultent du développement de la première et de la seconde partie

de la fonction R, n° 3. En n'ayant égard qu'à ces termes on a, d'ailleurs,

$$R = R' + R''.$$

Au moyen de ces deux équations et des valeurs de R et de $r\frac{dR}{dr}$ que nous venons de donner, il sera facile de retrouver chacune des quantités R' et R'' fournies par le développement de la fonction R, ce qui pourra être utile pour faciliter la vérification de nos calculs.

17. En développant, d'après ce qui a été dit n° 13, la fonction $\frac{dR}{dv}$, nous avons trouvé :

$$\frac{dR}{dv} = \left(\frac{135}{16}m^3 + \frac{2649}{64}m^4 + \frac{158219}{1024}m^5 + \frac{5940301}{12288}m^6\right) e \sin \underset{(1)}{\varphi}$$

$$+ \left(\frac{45}{4}m^3 + \frac{5841}{128}m^4 + \frac{249063}{1024}m^5\right) e^2 \sin \underset{(2)}{2\varphi}$$

$$+ \left(\frac{291}{16}m^5 + \frac{1477}{12}m^6 + \frac{160515}{288}m^7 + \frac{3507895}{1728}m^8\right) e' \sin \underset{(6)}{\varphi'}$$

$$+ \frac{2619}{32}m^6 e'^2 \sin \underset{(7)}{2\varphi'}$$

$$+ \left(\frac{675}{32}m^3 + \frac{2493}{16}m^4 + \frac{2027953}{2048}m^5 + \frac{69776411}{12288}m^6\right) ee' \sin (\varphi \underset{(8)}{-} \varphi')$$

$$+ \left(\frac{495}{32}m^3 + \frac{6147}{64}m^4 + \frac{824065}{2048}m^5 + \frac{3843053}{3072}m^6\right) ee' \sin (\varphi \underset{(9)}{+} \varphi')$$

$$+ \frac{225}{8}m^3 e^2 e' \sin (2\varphi \underset{(10)}{-} \varphi')$$

$$+ \frac{2295}{64}m^3 ee'^2 \sin (\varphi \underset{(12)}{-} 2\varphi')$$

$$+ \frac{1665}{64}m^3 ee'^2 \sin (\varphi \underset{(13)}{+} 2\varphi')$$

$$+ \left(-\frac{3}{2}m^2 + \frac{m^4}{2} + \frac{1093}{1536}m^5 + \frac{579}{40}m^7 + \frac{27328343}{345500}m^8\right) \sin \underset{(30)}{2\xi}$$

$$+\left(\frac{9}{2}m^2+\frac{3}{4}m^4+\frac{45}{8}m^5+\frac{169}{4}m^6\right)e\sin(2\xi \underset{(31)}{-} \varphi)$$

$$+\left(-\frac{3}{2}m^2-\frac{7}{4}m^4-\frac{1035}{256}m^5+\frac{29015}{3072}m^6\right)e\sin(2\xi \underset{(32)}{+} \varphi)$$

$$+\left(\begin{array}{l}-\frac{21}{4}m^2-\frac{9}{2}m^3-\frac{m^4}{2}+\frac{2253}{32}m^5+\frac{1617985}{3072}m^6\\ +\frac{6775397}{2560}m^7\end{array}\right)e'\sin(2\xi \underset{(33)}{-} \varphi')$$

$$+\left(\begin{array}{l}\frac{3}{4}m^2+\frac{9}{2}m^3-\frac{5}{2}m^4-\frac{2253}{32}m^5-\frac{1296103}{3072}m^6\\ \quad -\frac{4753701}{2560}m^7\end{array}\right)e'\sin(2\xi \underset{(34)}{+} \varphi')$$

$$+\left(\begin{array}{l}-\frac{15}{4}m^2+\frac{2711}{256}m^4+\frac{61425}{512}m^5+\frac{20681383}{24576}m^6\\ +\frac{30074255}{8192}m^7\end{array}\right)e^2\sin(2\xi \underset{(35)}{-} 2\varphi)$$

$$+\left(-\frac{3}{2}m^2-\frac{101}{32}m^4\right)e^2\sin(2\xi \underset{(36)}{+} 2\varphi)$$

$$+\left(\begin{array}{l}\frac{63}{4}m^2+\frac{27}{16}m^3-\frac{5469}{128}m^4-\frac{197769}{512}m^5\\ \quad -\frac{17147221}{8192}m^6\end{array}\right)ee'\sin(2\xi - \underset{(37)}{\varphi} - \varphi')$$

$$+\left(\begin{array}{l}-\frac{9}{4}m^2-\frac{27}{16}m^3+\frac{11697}{128}m^4+\frac{381969}{512}m^5\\ +\frac{37813889}{8192}m^6\end{array}\right)ee'\sin(2\xi - \underset{(38)}{\varphi} + \varphi')$$

$$+\left(-\frac{21}{4}m^2-\frac{135}{16}m^3-\frac{4987}{128}m^4-\frac{74079}{512}m^5\right)ee'\sin(2\xi + \underset{(39)}{\varphi} - \varphi')$$

$$+\left(\frac{3}{4}m^2+\frac{135}{16}m^3+\frac{1759}{128}m^4+\frac{4539}{512}m^5\right)ee'\sin(2\xi + \underset{(40)}{\varphi} + \varphi')$$

$$+\left(-\frac{51}{4}m^2-\frac{153}{8}m^3-\frac{55}{4}m^4\right)e'^2\sin(2\xi \underset{(41)}{-} 2\varphi')$$

$$+\left(\frac{9}{8}m^3-9m^4\right)e'^2\sin(2\xi \underset{(42)}{+} 2\varphi')$$

$$+\frac{7}{16}m^2e^3\sin(2\xi \underset{(43)}{-} 3\varphi)-\frac{25}{16}m^2e^3\sin(2\xi \underset{(44)}{+} 3\varphi)$$

$$+\left(-\frac{105}{8}m^2+\frac{135}{16}m^3\right)e^2e'\sin(2\xi - 2\underset{(45)}{\varphi} - \varphi')$$

$$+\left(\frac{15}{8}m^2-\frac{135}{16}m^3\right)e^2\,e'\sin(2\xi-2\underset{(46)}{\varphi}+\varphi')$$

$$-\frac{21}{4}m^2\,e^2\,e'\sin(2\xi+2\underset{(47)}{\varphi}-\varphi')$$

$$+\frac{3}{4}\,m^2\,e^2\,e'\sin(2\xi+2\underset{(48)}{\varphi}+\varphi')$$

$$+\left(\frac{153}{4}m^2+\frac{459}{64}m^3-\frac{93099}{512}m^4\right)ee'^2\sin(2\xi-\underset{(49)}{\varphi}-2\varphi')$$

$$+\left(-\frac{27}{64}m^3+\frac{20817}{512}m^4\right)ee'^2\sin(2\xi-\underset{(50)}{\varphi}+2\varphi')$$

$$-\frac{51}{4}m^2\,ee'^2\sin(2\xi+\underset{(51)}{\varphi}-2\varphi')$$

$$+\left(-\frac{3}{8}m^2-\frac{135}{32}m^3-\frac{2595}{128}m^4-\frac{53347}{512}m^5-\frac{1960985}{3072}m^6\right)\frac{a}{a'}\sin\underset{(70)}{\xi}$$

$$+\left(\frac{15}{16}m^2+\frac{675}{128}m^3+\frac{7551}{512}m^4+\frac{403955}{8192}m^5\right)\frac{a}{a'}\,e\sin(\xi\underset{(71)}{-}\varphi)$$

$$+\left(\frac{3}{16}m^2+\frac{585}{128}m^3+\frac{3381}{512}m^4\right)\frac{a}{a'}\,e\sin(\xi\underset{(72)}{+}\varphi)$$

$$+\left(\frac{9}{2}m^2-\frac{2601}{64}m^3\right)\frac{a}{a'}\,e'\sin(\xi\underset{(73)}{-}\varphi')$$

$$+\left(-\frac{3}{8}m^2+\frac{441}{64}m^3-\frac{5283}{256}m^4\right)\frac{a}{a'}\,e'\sin(\xi\underset{(74)}{+}\varphi')$$

$$+\left(-\frac{15}{8}m^2+\frac{45}{32}m^3+\frac{1419}{128}m^4+\frac{23741}{512}m^5\right)\frac{a}{a'}\sin\underset{(80)}{3\xi}$$

$$+\left(\frac{135}{16}m^2+\frac{585}{128}m^3+\frac{7131}{512}m^4\right)\frac{a}{a'}\,e\sin(3\xi\underset{(81)}{-}\varphi)$$

$$-\frac{45}{16}m^2\frac{a}{a'}\,e\sin(3\xi\underset{(82)}{+}\varphi)-\frac{75}{8}m^2\frac{a}{a'}\,e'\sin(3\xi\underset{(83)}{-}\varphi')$$

$$+\frac{1035}{64}m^3\frac{a}{a'}\,e'\sin(3\xi\underset{(84)}{+}\varphi')$$

$$+\left(-\frac{9}{16}m^4-\frac{21}{8}m^5-\frac{31}{4}m^6\right)\sin\underset{(86)}{4\xi}$$

$$+\left(-\frac{45}{16}m^3-\frac{957}{64}m^4-\frac{62969}{1024}m^5-\frac{2444575}{12288}m^6\right)e\sin(4\xi\underset{(87)}{-}\varphi)$$

$$-\frac{45}{32}m^4\,e\sin(4\xi\underset{(88)}{+}\varphi)$$

$$+\left(-\frac{63}{16}m^4-\frac{843}{32}m^5\right)e'\sin(4\xi\underset{(89)}{-}\varphi')$$

$$+\left(\frac{9}{16}m^4+\frac{171}{32}m^5\right)e'\sin(4\xi\underset{(90)}{+}\varphi')$$

$$+\left(\frac{45}{16}m^2+\frac{2337}{128}m^4+\frac{18091}{512}m^5\right)e^2\sin(4\xi\underset{(91)}{-}2\varphi)$$

$$+\frac{81}{32}m^4e^2\sin(4\xi\underset{(92)}{+}2\varphi)$$

$$+\left(-\frac{525}{32}m^2-\frac{7179}{64}m^4-\frac{1064155}{2048}m^5\right)ee'\sin(4\xi-\underset{(93)}{\varphi}-\varphi')$$

$$+\left(\frac{135}{32}m^2+\frac{681}{32}m^4-\frac{46347}{2048}m^5\right)ee'\sin(4\xi-\underset{(94)}{\varphi}+\varphi')$$

$$-\frac{3765}{64}m^2ee'^2\sin(4\xi-\underset{(98)}{\varphi}-2\varphi')$$

$$+\frac{45}{64}m^2ee'^2\sin(4\xi-\underset{(99)}{\varphi}+2\varphi')$$

$$-\frac{177}{512}m^4\sin\underset{(102)}{6\xi}$$

$$-\frac{675}{256}m^3e\sin(6\xi\underset{(103)}{-}\varphi)$$

$$-\frac{675}{128}m^4e^2\sin(6\xi\underset{(104)}{-}2\varphi).$$

18. On conclura de cette expression la valeur de la fonction $-\int\frac{dR}{dv}dt$, en remplaçant les angles ξ, φ et φ' par leurs valeurs, n° 6, et en multipliant ensuite chaque terme par l'unité divisée par le coefficient du temps, sous le signe *sinus* dont il est affecté. Or, d'après la valeur de c qui sera donnée n° 24, en supposant d'ailleurs, n° 5, $c'=1$, on trouve

Argument.	Facteur pour l'intégration.
φ	$\frac{1}{c}=1+\frac{3}{4}m^2+\frac{225}{32}m^3+\frac{4143}{128}m^4+\frac{287093}{2048}m^5$
2φ	$\frac{1}{2c}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{4}m^2+\frac{225}{32}m^3\right)$

Argument.	Facteur pour l'intégration.
φ'	$\frac{1}{c'm} = \frac{1}{m}$
$2\varphi'$	$\frac{1}{2c'm} = \frac{1}{2m}$
$\varphi - \varphi'$	$\frac{1}{c - c'm} = 1 + m + \frac{7}{4}m^2 + \frac{305}{32}m^3 + \frac{6359}{128}m^4$
$\varphi + \varphi'$	$\frac{1}{c + c'm} = 1 - m + \frac{7}{4}m^2 + \frac{145}{32}m^3 + \frac{2759}{128}m^4$
$2\varphi - \varphi'$	$\frac{1}{2c - c'm} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{m}{2}\right)$
$2\varphi + \varphi'$	$\frac{1}{2c + c'm} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{m}{2}\right)$
$\varphi - 2\varphi'$	$\frac{1}{c - 2c'm} = 1 + 2m$
$\varphi + 2\varphi'$	$\frac{1}{c + 2c'm} = 1 - 2m$
2ξ	$\frac{1}{2 - 2m} = \frac{1}{2}(1 + m + m^2 + m^3 + m^4 + m^5 + m^6)$
$2\xi - \varphi$	$\frac{1}{2 - 2m - c} = 1 + 2m + \frac{13}{4}m^2 - \frac{65}{32}m^3 - \frac{6703}{128}m^4 - \frac{653941}{2048}m^5 - \frac{36113119}{24576}m^6$
$2\xi + \varphi$	$\frac{1}{2 - 2m + c} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{3}m + \frac{25}{36}m^2 + \frac{2569}{864}m^3 + \frac{148469}{10368}m^4\right)$
$2\xi - \varphi'$	$\frac{1}{2 - 2m - c'm} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{2}m + \frac{9}{4}m^2 + \frac{27}{8}m^3 + \frac{81}{16}m^4\right)$
$2\xi + \varphi'$	$\frac{1}{2 - 2m + c'm} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}m + \frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{8}m^3 + \frac{1}{16}m^4\right)$
$2\xi - 2\varphi$	$\frac{1}{2 - 2m - 2c} = -\frac{1}{2m}\left(1 + \frac{3}{4}m + \frac{243}{32}m^2 + \frac{5475}{128}m^3 + \frac{489395}{2048}m^4 + \frac{32943391}{24576}m^5\right)$
$2\xi + 2\varphi$	$\frac{1}{2 - 2m + 2c} = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2}m + \frac{5}{8}m^2\right)$
$2\xi - \varphi - \varphi'$	$\frac{1}{2 - 2m - c - c'm} = 1 + 3m + \frac{33}{4}m^2 + \frac{495}{32}m^3 - \frac{1623}{128}m^4 - \frac{681365}{2048}m^5$
$2\xi - \varphi + \varphi'$	$\frac{1}{2 - 2m - c + c'm} = 1 + m + \frac{1}{4}m^2 - \frac{241}{32}m^3 - \frac{5959}{128}m^4 - \frac{418005}{2048}m^5$

Argument.	Facteur pour l'intégration.
$2\xi+\varphi-\varphi'$	$\frac{1}{2-2m+c-c'm}=\frac{1}{3}\left(1+m+\frac{5}{4}m^2+\frac{123}{32}m^3\right)$
$2\xi+\varphi+\varphi'$	$\frac{1}{2-2m+c+c'm}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}m+\frac{13}{36}m^2+\frac{2201}{864}m^3\right)$
$2\xi-2\varphi'$	$\frac{1}{2-2m-2c'm}=\frac{1}{2}(1+2m+4m^2+8m^3)$
$2\xi+2\varphi'$	$\frac{1}{2-2m+2c'm}=\frac{1}{2}$
$2\xi-3\varphi$	$\frac{1}{2-2m-3c}=-1$
$2\xi+3\varphi$	$\frac{1}{2-2m+3c}=\frac{1}{5}$
$2\xi-2\varphi-\varphi'$	$\frac{1}{2-3m-2c}=-\frac{1}{3m}\left(1+\frac{1}{2}m\right)$
$2\xi-2\varphi+\varphi'$	$\frac{1}{2-m-2c}=-\frac{1}{m}\left(1+\frac{3}{2}m\right)$
$2\xi+2\varphi-\varphi'$	$\frac{1}{2-2m+2c-c'm}=\frac{1}{4}$
$2\xi+2\varphi+\varphi'$	$\frac{1}{2-2m+2c+c'm}=\frac{1}{4}$
$2\xi-\varphi-2\varphi'$	$\frac{1}{2-2m-c-2c'm}=1+4m+\frac{61}{4}m^2+\frac{1631}{32}m^3$
$2\xi-\varphi+2\varphi'$	$\frac{1}{2-2m-c+2c'm}=1$
$2\xi+\varphi-2\varphi'$	$\frac{1}{2-2m+c-2c'm}=\frac{1}{3}$
ξ	$\frac{1}{1-m}=1+m+m^2+m^3+m^4+m^5$
$\xi-\varphi$	$\frac{1}{1-m-c}=-\frac{1}{m}\left(1+\frac{3}{4}m+\frac{243}{32}m^2+\frac{5475}{128}m^3+\frac{489395}{2048}m^4\right)$
$\xi+\varphi$	$\frac{1}{1-m+c}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}m+\frac{5}{8}m^2\right)$
$\xi-\varphi'$	$\frac{1}{1-m-c'm}=1+2m+4m^2$
$\xi+\varphi'$	$\frac{1}{1-m+c'm}=1$
3ξ	$\frac{1}{3-3m}=\frac{1}{3}(1+m+m^2+m^3)$
$3\xi-\varphi$	$\frac{1}{3-3m-c}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{2}m+\frac{15}{8}m^2\right)$

Argument.	Facteur pour l'intégration.
$3\xi+\varphi$	$\frac{1}{3-3m+c} = \frac{1}{4}$
$3\xi-\varphi'$	$\frac{1}{3-3m-c'm} = \frac{1}{3}$
$3\xi+\varphi'$	$\frac{1}{3-3m+c'm} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{3}m\right)$
4ξ	$\frac{1}{4-4m} = \frac{1}{4}(1+m+m^2)$
$4\xi-\varphi$	$\frac{1}{4-4m-c} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{4}{3}m+\frac{55}{36}m^2-\frac{553}{864}m^3\right)$
$4\xi+\varphi$	$\frac{1}{4-4m+c} = \frac{1}{5}$
$4\xi-\varphi'$	$\frac{1}{4-4m-c'm} = \frac{1}{4}\left(1+\frac{5}{4}m\right)$
$4\xi+\varphi'$	$\frac{1}{4-4m+c'm} = \frac{1}{4}\left(1+\frac{3}{4}m\right)$
$4\xi-2\varphi$	$\frac{1}{4-4m-2c} = \frac{1}{2}\left(1+2m+\frac{13}{4}m^2-\frac{65}{32}m^3\right)$
$4\xi+2\varphi$	$\frac{1}{4-4m+2c} = \frac{1}{6}$
$4\xi-\varphi-\varphi'$	$\frac{1}{4-4m-c-c'm} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{5}{3}m+\frac{91}{36}m^2\right)$
$4\xi-\varphi+\varphi'$	$\frac{1}{4-4m-c+c'm} = \frac{1}{3}\left(1+m+\frac{3}{4}m^2\right)$
$4\xi-\varphi-2\varphi'$	$\frac{1}{4-4m-c-2c'm} = \frac{1}{3}$
$4\xi-\varphi+2\varphi'$	$\frac{1}{4-4m-c+2c'm} = \frac{1}{3}$
6ξ	$\frac{1}{6-6m} = \frac{1}{6}$
$6\xi-\varphi$	$\frac{1}{6-6m-c} = \frac{1}{5}$
$6\xi-2\varphi$	$\frac{1}{6-6m-2c} = \frac{1}{4}.$

Cela posé, en multipliant respectivement chacun des termes du développement de la fonction $\frac{dR}{dv}dt$ par le facteur qui lui correspond dans le tableau précédent, nous avons trouvé :

$$-\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt=\left(\frac{135}{16}m^3+\frac{2649}{64}m^4+\frac{164699}{1024}m^5+\frac{7050757}{12288}m^6\right)e\cos\underset{(1)}{\varphi}$$

$$+\left(\frac{45}{8}m^3+\frac{5841}{256}m^4+\frac{257703}{2048}m^5\right)e^2\cos 2\underset{(2)}{\varphi}$$

$$+\left(\frac{291}{16}m^4+\frac{1477}{12}m^5+\frac{160515}{288}m^6+\frac{3507895}{1728}m^7\right)e'\cos\underset{(6)}{\varphi'}$$

$$+\frac{2619}{64}m^4e'^2\cos\underset{(7)}{2\varphi'}$$

$$+\left(\begin{array}{l}\frac{675}{32}m^3+\frac{5661}{32}m^4+\frac{2422657}{2048}m^5\\ \qquad+\frac{87765221}{12288}m^6\end{array}\right)ee'\cos(\varphi\underset{(8)}{-}\varphi')$$

$$+\left(\begin{array}{l}\frac{495}{32}m^3+\frac{5157}{64}m^4+\frac{682801}{2048}m^5\\ \qquad+\frac{6677257}{6144}m^6\end{array}\right)ee'\cos(\varphi\underset{(9)}{+}\varphi')$$

$$+\frac{225}{16}m^3e^2e'\cos(2\varphi\underset{(10)}{-}\varphi')$$

$$+\frac{2295}{64}m^3ee'^2\cos(\varphi\underset{(12)}{-}2\varphi')$$

$$+\frac{1665}{64}m^3ee'^2\cos(\varphi\underset{(13)}{+}2\varphi')$$

$$+\left(\begin{array}{l}-\frac{3}{4}m^2-\frac{3}{4}m^3-\frac{1}{2}m^4-\frac{1}{2}m^5-\frac{443}{3072}m^6\\ +\frac{108953}{15360}m^7+\frac{8057807}{172800}m^8\end{array}\right)e\cos\underset{(30)}{2\xi}$$

$$+\left(\frac{9}{2}m^2+9m^3+\frac{123}{8}m^4-\frac{129}{64}m^5-\frac{46007}{256}m^6\right)e\cos(2\xi\underset{(31)}{-}\varphi)$$

$$+\left(\begin{array}{l}-\frac{1}{2}m^2-\frac{1}{3}m^3-\frac{67}{72}m^4-\frac{22279}{6912}m^5\\ -\frac{440861}{82944}m^6\end{array}\right)e\cos(2\xi\underset{(32)}{+}\varphi)$$

$$+\left(\begin{array}{l}-\frac{21}{8}m^2-\frac{99}{16}m^3-\frac{305}{32}m^4+\frac{669}{32}m^5\\ +\frac{1810657}{6144}m^6+\frac{36154873}{20480}m^7\end{array}\right)e'\cos(2\xi\underset{(33)}{-}\varphi')$$

$$+\left(\begin{array}{l}\frac{3}{8}m^2+\frac{39}{16}m^3-\frac{1}{32}m^4-\frac{1127}{32}m^5\\ -\frac{1404295}{6144}m^6-\frac{64065887}{61440}m^7\end{array}\right)e'\cos(2\xi\underset{(34)}{+}\varphi')$$

$$+\left(\begin{array}{l}\frac{15}{8}m+\frac{45}{32}m^2+\frac{4579}{512}m^3+\frac{33267}{2048}m^4-\frac{2846227}{49152}m^5\\ \qquad -\frac{20956723}{65536}m^6\end{array}\right)e^2\cos\underset{(35)}{(2\xi-2\varphi)}$$

$$+\left(-\frac{3}{8}m^2-\frac{3}{16}m^3-\frac{131}{128}m^4\right)e^2\cos\underset{(36)}{(2\xi+2\varphi)}$$

$$+\left(\begin{array}{l}\frac{63}{4}m^2+\frac{783}{16}m^3+\frac{11811}{128}m^4-\frac{331529}{512}m^5\\ \qquad -\frac{30949909}{8192}m^6\end{array}\right)ee'\cos\underset{(37)}{(2\xi-\varphi-\varphi')}$$

$$+\left(\begin{array}{l}-\frac{9}{4}m^2-\frac{63}{16}m^3+\frac{11409}{128}m^4+\frac{437217}{512}m^5\\ \qquad -\frac{45074753}{8192}m^6\end{array}\right)ee'\cos\underset{(38)}{(2\xi-\varphi+\varphi')}$$

$$+\left(-\frac{7}{4}m^2-\frac{73}{16}m^3-\frac{6907}{384}m^4-\frac{109759}{1536}m^5\right)ee'\cos\underset{(39)}{(2\xi+\varphi-\varphi')}$$

$$+\left(\frac{1}{4}m^2+\frac{139}{48}m^3+\frac{6461}{1152}m^4+\frac{84803}{13824}m^5\right)ee'\cos\underset{(40)}{(2\xi+\varphi+\varphi')}$$

$$+\left(-\frac{51}{8}m^2-\frac{357}{16}m^3-\frac{103}{2}m^4+\frac{26161}{512}m^5\right)e'^2\cos\underset{(41)}{(2\xi-2\varphi')}$$

$$+\left(\frac{9}{16}m^3-\frac{9}{2}m^4\right)e'^2\cos\underset{(42)}{(2\xi+2\varphi')}$$

$$-\frac{7}{16}m^2\,e^3\cos\underset{(43)}{(2\xi-3\varphi)}$$

$$-\frac{5}{16}m^2\,e^3\cos\underset{(44)}{(2\xi+3\varphi)}$$

$$+\left(\frac{35}{8}m-\frac{5}{8}m^2\right)e^2\,e'\cos\underset{(45)}{(2\xi-2\varphi-\varphi')}$$

$$+\left(-\frac{15}{8}m+\frac{45}{8}m^2\right)e^2\,e'\cos\underset{(46)}{(2\xi-2\varphi+\varphi')}$$

$$-\frac{21}{16}m^2\,e^2\,e'\cos\underset{(47)}{(2\xi+2\varphi-\varphi')}$$

$$+\frac{3}{16}m^2\,e^2\,e'\cos\underset{(48)}{(2\xi+2\varphi+\varphi')}$$

$$+\left(\frac{153}{4}m^2+\frac{10251}{64}m^3+\frac{220245}{512}m^4\right)ee'^2\cos\underset{(49)}{(2\xi-\varphi-2\varphi')}$$

$$-\left(-\frac{27}{64}m^4+\frac{20817}{512}m^5\right)ee'^2\cos\underset{(50)}{(2\xi-\varphi+2\varphi')}$$

$$-\frac{17}{4}m^2 ee'^2 \cos(2\xi + \varphi - 2\varphi') \quad (51)$$

$$+\left(-\frac{3}{8}m^2 - \frac{147}{32}m^3 - \frac{3183}{128}m^4 - \frac{66079}{512}m^5 - \frac{2357459}{3072}m^6\right)\frac{a}{a'}\cos\xi \quad (70)$$

$$+\left(-\frac{15}{16}m - \frac{765}{128}m^2 - \frac{13221}{512}m^3 - \frac{1151117}{8192}m^4\right)\frac{a}{a'}e\cos(\xi - \varphi) \quad (71)$$

$$+\left(\frac{3}{32}m^2 + \frac{597}{256}m^3 + \frac{4611}{1024}m^4\right)\frac{a}{a'}e\cos(\xi + \varphi) \quad (72)$$

$$+\left(\frac{9}{2}m^2 - \frac{2025}{64}m^3\right)\frac{a}{a'}e'\cos(\xi - \varphi') \quad (73)$$

$$+\left(-\frac{3}{8}m^2 + \frac{441}{64}m^3 - \frac{5283}{256}m^4\right)\frac{a}{a'}e'\cos(\xi + \varphi') \quad (74)$$

$$+\left(-\frac{5}{8}m^2 - \frac{5}{32}m^3 + \frac{453}{128}m^4 + \frac{29177}{1536}m^5\right)\frac{a}{a'}\cos 3\xi \quad (80)$$

$$+\left(\frac{135}{32}m^2 + \frac{2205}{256}m^3 + \frac{18741}{1024}m^4\right)\frac{a}{a'}e\cos(3\xi - \varphi) \quad (81)$$

$$-\frac{45}{64}m^2\frac{a}{a'}e\cos(3\xi + \varphi) \quad (82)$$

$$-\frac{25}{8}m^2\frac{a}{a'}e'\cos(3\xi - \varphi') \quad (83) \quad + \frac{345}{64}m^2\frac{a}{a'}e'\cos(3\xi + \varphi')$$

$$+\left(-\frac{9}{64}m^4 - \frac{51}{64}m^5 - \frac{175}{64}m^6\right)\cos 4\xi \quad (86)$$

$$+\left(-\frac{15}{16}m^3 - \frac{399}{64}m^4 - \frac{87785}{3072}m^5 - \frac{1236893}{12288}m^6\right)e\cos(4\xi - \varphi) \quad (87)$$

$$-\frac{9}{32}m^4 e\cos(4\xi + \varphi) \quad (88)$$

$$+\left(-\frac{63}{64}m^4 - \frac{2001}{256}m^5\right)e'\cos(4\xi - \varphi') \quad (89)$$

$$+\left(\frac{9}{64}m^4 + \frac{369}{256}m^5\right)e'\cos(4\xi + \varphi') \quad (90)$$

$$+\left(\frac{45}{32}m^3 + \frac{3057}{256}m^4 + \frac{41467}{1024}m^5\right)e^2\cos(4\xi - 2\varphi) \quad (91)$$

$$+\frac{27}{64}m^4 e^2\cos(4\xi + 2\varphi) \quad (92)$$

$$+\left(-\frac{175}{32}m^3 - \frac{8929}{192}m^4 - \frac{4595905}{18432}m^5\right)ee'\cos(4\xi - \varphi - \varphi') \quad (93)$$

$$+\left(\frac{45}{32}m^3+\frac{17}{2}m^4+\frac{1239}{2048}m^5\right)ee'\cos(4\xi-\underset{(94)}{\varphi}+\varphi')$$

$$-\frac{1255}{64}m^2\,ee'^2\cos(4\xi-\underset{(98)}{\varphi}-2\varphi')$$

$$+\frac{15}{64}m^2\,ee'^2\cos(4\xi-\underset{(99)}{\varphi}+2\varphi')$$

$$-\frac{177}{3072}m^4\cos\underset{(102)}{6\xi}$$

$$-\frac{135}{256}m^4\,e\cos(6\xi-\underset{(103)}{\varphi})-\frac{675}{512}m^4\,e^2\cos(6\xi-\underset{(104)}{2\varphi}).$$

19. Au moyen des quantités précédentes, on peut former aisément le développement de la fonction $\int d'\mathrm{R}$. En effet, si l'on ne considère d'abord que les termes indépendans de l'excentricité e' de l'orbe solaire, on aura, nº 14,

$$\int d'\mathrm{R}=\mathrm{R}+m\int\left(\frac{d\mathrm{R}}{dv}\right)dt.$$

Il suffira donc de substituer dans cette formule pour R et $\int\left(\frac{d\mathrm{R}}{dv}\right)dt$ leurs valeurs développées en séries, pour avoir celle de la fonction $\int d'\mathrm{R}$ exprimée de la même manière.

Considérons maintenant les termes dépendans de l'excentricité de l'orbe solaire; nous avons supposé, pour abréger, dans ce cas, nº 14,

$$d''\mathrm{R}=r'\frac{d\mathrm{R}}{dr'}\left(\frac{dr'}{r'}\right)+\frac{d\mathrm{R}}{dv'}dv'.$$

D'après l'expression de R, nº 3, on a $\frac{d\mathrm{R}}{dv'}=-\frac{d\mathrm{R}}{dv}$; quant à la valeur de la fonction $r'\frac{d\mathrm{R}}{dr'}$, il est facile de la déduire de celle de la fonction R, puisqu'en effet on

a, n° 14, pour les termes indépendans de la parallaxe solaire, $r'\frac{dR}{dr'} = -3R$, et pour les termes qui dépendent de cette parallaxe, $r'\frac{dR}{dr'} = -4R$. En négligeant les puissances de l'excentricité de l'orbe solaire supérieures à la seconde, on a, d'ailleurs, n° 5,

$$\frac{r'}{a'} = 1. - e'\cos\varphi' - \tfrac{1}{2}e'^2\cos 2\varphi',$$
$$v' = mt + \varepsilon' + 2e'\sin\varphi' + \tfrac{5}{4}e'^2\sin 2\varphi';$$

d'où il est aisé de conclure :

$$\frac{dr'}{r'} = mdt\,(e'\sin\varphi' + \tfrac{3}{2}e'^2\sin 2\varphi'),$$
$$dv' = mdt\,(1 + 2e'\cos\varphi' + \tfrac{5}{2}e'^2\cos 2\varphi').$$

En substituant ces valeurs dans l'expression de $d''R$ et intégrant, on aura

$$-\int d''R = m\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt - m\int\left\{\begin{array}{l} r'\frac{dR}{dr'}\left(e'\sin\varphi' + \frac{3}{2}e'^2\sin 2\varphi'\right) \\ + \frac{dR}{dv'}\left(2e'\cos\varphi' + \frac{5}{2}e'^2\cos 2\varphi'\right)\end{array}\right\}dt.$$

En substituant dans cette équation à la place de $r'\frac{dR}{dr'}$ et de $\frac{dR}{dv'}$ leurs valeurs en séries déduites de l'expression de R, comme nous l'avons dit plus haut, et en intégrant l'expression résultante, on formera aisément la valeur de la seconde partie de la formule précédente; en joignant cette valeur à celle de la fonction $m\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt$ qui a été donnée n° 18, on aura la valeur de la fonction $\int d''R$. En effectuant les diverses

opérations que nous venons d'indiquer, nous avons trouvé :

$$-\int d''\mathrm{R} = \left(-\frac{3}{4}m^2 + \frac{179}{32}m^4 - \frac{15951}{192}m^6 - \frac{23201}{48}m^7\right) e' \cos \underset{(6)}{\varphi'}$$

$$+\left(-\frac{9}{8}m^2 + \frac{1515}{128}m^4\right) e'^2 \cos \underset{(7)}{2\varphi'}$$

$$+\left(\begin{array}{l} -\frac{3}{4}m^2 - \frac{2343}{64}m^4 - \frac{65903}{256}m^5 - \frac{6212823}{4096}m^6 \\ -\frac{41329681 1}{49152}m^7 \end{array}\right) ee' \cos \underset{(8)}{(\varphi - \varphi')}$$

$$+\left(\begin{array}{l} \frac{3}{4}m^2 - \frac{1173}{64}m^4 - \frac{24445}{256}m^5 - \frac{1589061}{4096}m^6 \\ -\frac{62301745}{49152}m^7 \end{array}\right) ee' \cos \underset{(9)}{(\varphi + \varphi')}$$

$$-\frac{3}{32}m^3 e^2 e' \cos \underset{(10)}{(2\varphi - \varphi')}$$

$$+\left(-\frac{9}{4}m^3 - \frac{3177}{32}m^4\right) ee'^2 \cos \underset{(12)}{(\varphi - 2\varphi')}$$

$$+\left(\frac{9}{4}m^3 - \frac{1197}{32}m^4\right) ee'^2 \cos \underset{(13)}{(\varphi + 2\varphi')}$$

$$+\left(\frac{63}{16}m^3 + \frac{261}{32}m^4 + \frac{747}{64}m^5 - \frac{2417}{128}m^6 - \frac{3603407}{12288}m^7\right) e' \cos \underset{(33)}{(2\xi - \varphi')}$$

$$+\left(-\frac{3}{16}m^3 - \frac{75}{32}m^4 + \frac{25}{64}m^5 + \frac{4683}{128}m^6 + \frac{2827635}{12288}m^7\right) e' \cos \underset{(34)}{(2\xi + \varphi')}$$

$$+\left(\begin{array}{l} -\frac{189}{8}m^3 - \frac{2367}{32}m^4 - \frac{5313}{32}m^5 \\ +\frac{211399}{2048}m^6 + \frac{11650615}{3072}m^7 \end{array}\right) ee' \cos \underset{(37)}{(2\xi - \varphi - \varphi')}$$

$$+\left(\begin{array}{l} \frac{9}{8}m^3 + \frac{135}{32}m^4 - \frac{1359}{16}m^5 \\ -\frac{1734151}{2048}m^6 - \frac{34053917}{6144}m^7 \end{array}\right) ee' \cos \underset{(38)}{(2\xi - \varphi + \varphi')}$$

$$+\left(\frac{21}{8}m^3 + \frac{87}{16}m^4 + \frac{2555}{128}m^5\right) ee' \cos \underset{(39)}{(2\xi + \varphi - \varphi')}$$

$$+\left(-\frac{m^3}{8} - \frac{137}{48}m^4 - \frac{6079}{1152}m^5\right) ee' \cos \underset{(40)}{(2\xi + \varphi + \varphi')}$$

$$+\left(\frac{51}{4}m^3+39m^4+\frac{2633}{32}m^5\right)e'^2\cos(2\xi\underset{(41)}{-}2\varphi')$$

$$+\left(-\frac{9}{8}m^4+\frac{183}{32}m^5\right)e'^2\cos(2\xi\underset{(42)}{+}2\varphi')$$

$$+\left(-\frac{153}{2}m^3-\frac{2589}{8}m^4-\frac{265077}{256}m^5\right)ee'^2\cos(2\xi-\underset{(49)}{\varphi}-2\varphi')$$

$$+\left(\frac{117}{32}m^4-\frac{6963}{128}m^5\right)ee'^2\cos(2\xi-\underset{(50)}{\varphi}+2\varphi')$$

$$+\left(-\frac{27}{8}m^3+\frac{5373}{128}m^4\right)\frac{a}{a'}e'\cos(\xi\underset{(73)}{-}\varphi')$$

$$+\left(-\frac{837}{128}m^4+\frac{13197}{512}m^5\right)\frac{a}{a'}e'\cos(\xi\underset{(74)}{+}\varphi')$$

$$+\frac{5}{32}m^3\frac{a}{a'}e'\cos(3\xi\underset{(84)}{+}\varphi')$$

$$+\frac{315}{256}m^4e'\cos(4\xi\underset{(89)}{-}\varphi')-\frac{27}{256}m^4e'\cos(4\xi\underset{(90)}{+}\varphi')$$

$$+\left(\frac{455}{64}m^4+\frac{44515}{768}m^5\right)ee'\cos(4\xi-\underset{(93)}{\varphi}-\varphi')$$

$$+\left(-\frac{75}{64}m^4-\frac{1797}{256}m^5\right)ee'\cos(4\xi-\underset{(94)}{\varphi}+\varphi').$$

Au moyen de cette valeur, il sera facile de former celle de la fonction $\int d'R$. En effet, dans le cas que nous considérons, on a, nº 14,

$$\int d'R=R-\int d''R$$

En ne considérant donc dans R que les termes dépendans de l'excentricité de l'orbe solaire, et en substituant pour R et $\int d''R$ leurs valeurs en séries, on aura celle de la fonction $\int d'R$ développée de la même manière.

20. Lorsque les valeurs des fonctions $r\frac{dR}{dr}$ et $\int d'R$

seront ainsi déterminées, il sera facile en les réunissant de former le développement de la fonction $2\int d'\mathrm{R} + r\frac{d\mathrm{R}}{dr}$ qui entre dans le second membre de l'équation (2), n° 10. En effet, si l'on fait d'abord abstraction des quantités qui dépendent de la parallaxe solaire, ce qui donne, n° 6, $r\frac{d\mathrm{R}}{dr} = 2\mathrm{R}$, on aura, pour les termes indépendans de l'excentricité de l'orbe solaire,

$$2\int d'\mathrm{R} + r\frac{d\mathrm{R}}{dr} = 4\mathrm{R} + 2m\int\left(\frac{d\mathrm{R}}{dv}\right)dt,$$

et pour les termes dépendans de cette excentricité,

$$2\int d'\mathrm{R} + r\frac{d\mathrm{R}}{dr} = 4\mathrm{R} - 2\int d''\mathrm{R}.$$

En substituant pour R, $\int\left(\frac{d\mathrm{R}}{dv}\right)dt$ et $\int d''\mathrm{R}$ leurs valeurs précédentes dans ces deux formules, nous avons trouvé, abstraction faite de la partie non périodique que nous considérerons séparément, pour la fonction $2\int d'\mathrm{R} + r\frac{d\mathrm{R}}{dr}$, l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
2\int d'\mathrm{R}+r\frac{d\mathrm{R}}{dr} = &\left(\begin{array}{l} -2m^2 - \frac{135}{8}m^3 - \frac{7523}{96}m^4 - \frac{154227}{512}m^5 \\ -\frac{18490571}{18432}m^6 - \frac{148678169}{49152}m^7 \end{array}\right) e \cos \underset{(1)}{\varphi} \\
&+ \left(-\frac{m^2}{2} - \frac{45}{2}m^3 - \frac{19915}{192}m^4 - \frac{270227}{512}m^5\right) e^2 \cos \underset{(2)}{2\varphi} \\
&+ \left(\frac{3}{2}m^2 - \frac{473}{16}m^4 - 194\, m^5 - \frac{3563}{4}m^6 - \frac{238303}{72}m^7\right) c' \sin \underset{(6)}{\varphi'} \\
&+ \left(\frac{9}{4}m^2 - \frac{4161}{64}m^3 - \frac{1067}{2}m^4\right) c'^2 \sin \underset{(7)}{2\varphi'}
\end{aligned}$$

$$+\left(\begin{array}{l}-3m^2-\frac{783}{16}m^3-\frac{1445}{4}m^4-\frac{2307585}{1024}m^5\\ -\frac{80421971}{6144}m^6-\frac{22488561959}{294912}m^7\end{array}\right)ee'\cos(\underset{(8)}{\varphi-\varphi'})$$

$$+\left(\begin{array}{l}-3m^2-\frac{387}{16}m^3-\frac{4615}{32}m^4-\frac{680881}{1024}m^5\\ -\frac{3436945}{1536}m^6-\frac{917027579}{294912}m^7\end{array}\right)ee'\cos(\underset{(9)}{\varphi+\varphi'})$$

$$+\left(-\frac{3}{4}m^2-\frac{945}{16}m^3\right)e^2e'\cos(\underset{(10)}{2\varphi-\varphi'})$$

$$-\frac{3}{4}m^2e^2e'\cos(\underset{(11)}{2\varphi+\varphi'})$$

$$+\left(-\frac{9}{2}m^2-\frac{2817}{32}m^3-\frac{181425}{256}m^4\right)ee'^2\cos(\underset{(12)}{\varphi-2\varphi'})$$

$$+\left(-\frac{9}{2}m^2-\frac{1143}{32}m^3-\frac{76551}{256}m^4\right)ee'^2\cos(\underset{(13)}{\varphi+2\varphi'})$$

$$+\left(\begin{array}{l}3m^2+\frac{3}{2}m^3-\frac{3}{2}m^4-\frac{16}{3}m^5-\frac{12713}{2304}m^6+\frac{287519}{69120}m^7\\ \quad+\frac{19841303}{1036800}m^8\end{array}\right)\cos\underset{(30)}{2\xi}$$

$$+\left(\begin{array}{l}-9m^2-\frac{51}{4}m^3-\frac{451}{16}m^4-\frac{25493}{768}m^5+\frac{920237}{9216}m^6\\ +\frac{946174513}{1105920}m^7\end{array}\right)e\cos(\underset{(31)}{2\xi-\varphi})$$

$$+\left(3m^2+m^3+\frac{73}{24}m^4+\frac{7859}{1152}m^5-\frac{271451}{13824}m^6\right)e\cos(\underset{(32)}{2\xi+\varphi})$$

$$+\left(\begin{array}{l}\frac{21}{2}m^2+\frac{135}{8}m^3+\frac{117}{16}m^4-\frac{5319}{32}m^5-\frac{1838623}{1536}m^6\\ -\frac{509817081}{92160}m^7\end{array}\right)e'\cos(\underset{(33)}{2\xi-\varphi'})$$

$$+\left(\begin{array}{l}-\frac{3}{2}m^2-\frac{75}{8}m^3-\frac{27}{16}m^4+\frac{13409}{96}m^5+\frac{4287179}{4608}m^6\\ +\frac{1160542399}{276480}m^7\end{array}\right)e'\cos(\underset{(34)}{2\xi+\varphi'})$$

$$+\left(\begin{array}{l}\frac{15}{4}m^2+\frac{45}{16}m^3+\frac{9907}{256}m^4+\frac{294499}{1024}m^5\\ +\frac{134948043}{73728}m^6+\frac{2269707805}{294912}m^7\end{array}\right)e^2\cos(\underset{(35)}{2\xi-2\varphi})$$

$$+\left(3m^2+\frac{3}{4}m^3+\frac{47}{8}m^4\right)e^2\cos(\underset{(36)}{2\xi+2\varphi})$$

$$+\left(\begin{array}{l}-\frac{63}{2}m^2-65m^3-\frac{6699}{64}m^4+\frac{807631}{1536}m^5\\+\frac{75797083}{12288}m^6+\frac{21413368747}{61440}m^7\end{array}\right)ee'\cos\underset{(37)}{(2\xi-\varphi-\varphi')}$$

$$+\left(\begin{array}{l}\frac{9}{2}m^2+\frac{15}{4}m^3-\frac{11893}{64}m^4-\frac{2723957}{1536}m^5\\-\frac{435924625}{36864}m^6-\frac{77420804563}{1105920}m^7\end{array}\right)ee'\cos\underset{(38)}{(2\xi-\varphi+\varphi')}$$

$$+\left(\frac{21}{2}m^2+\frac{177}{8}m^3+\frac{5323}{64}m^4+\frac{77279}{256}m^5\right)ee'\cos\underset{(39)}{(2\xi+\varphi-\varphi')}$$

$$+\left(-\frac{3}{2}m^2-\frac{137}{8}m^3-\frac{6589}{192}m^4-\frac{59587}{2304}m^5\right)ee'\cos\underset{(40)}{(2\varphi+\varphi+\varphi')}$$

$$+\left(\frac{51}{2}m^2+\frac{255}{4}m^3+\frac{147}{2}m^4-\frac{252715}{384}m^5\right)e'^2\cos\underset{(41)}{(2\xi-2\varphi')}$$

$$+\left(-\frac{9}{4}m^3+\frac{51}{4}m^4+\frac{8089}{128}m^5\right)e'^2\cos\underset{(42)}{(2\xi+2\varphi')}$$

$$+\left(-\frac{7}{8}m^2+\frac{133}{32}m^3\right)e^3\cos\underset{(43)}{(2\xi-3\varphi)}$$

$$+\frac{25}{8}m^2e^3\cos\underset{(44)}{(2\xi+3\varphi)}$$

$$+\frac{21}{2}m^2e^2e'\cos\underset{(47)}{(2\xi+2\varphi-\varphi')}$$

$$-\frac{3}{2}m^2e^2e'\cos\underset{(48)}{(2\xi+2\varphi+\varphi')}$$

$$+\left(-\frac{153}{2}m^2-\frac{6555}{32}m^3-\frac{106291}{256}m^4+\frac{6221561}{3072}m^5\right)ee'^2\cos\underset{(49)}{(2\xi-\varphi-2\varphi')}$$

$$+\left(-2a_{50}m^2-\frac{63}{32}m^3-\frac{23361}{256}m^4-\frac{1011731}{1024}m^5\right)ee'^2\cos\underset{(50)}{(2\xi-\varphi+2\varphi')}$$

$$+\frac{51}{2}m^2ee'^2\cos\underset{(51)}{(2\xi+\varphi-2\varphi')}$$

$$-\frac{49}{16}m^2e^3e'\cos\underset{(53)}{(2\xi-3\varphi-\varphi')}$$

$$+\frac{7}{16}m^2e^3e'\cos\underset{(54)}{(2\xi-3\varphi+\varphi')}$$

$$+\left(\frac{9}{8}m^4+\frac{177}{32}m^5+\frac{539}{32}m^6\right)\cos\underset{(86)}{4\xi}$$

$$+\left(\frac{45}{8}m^3+\frac{1017}{32}m^4+\frac{68273}{512}m^5+\frac{2681163}{6144}m^6\right)e\cos\underset{(87)}{(4\xi-\varphi)}$$

$$+\frac{45}{16}m^4\, e\cos\underset{(88)}{(4\xi+\varphi)}$$

$$+\left(\frac{63}{8}m^4+\frac{7059}{128}m^5\right)e'\cos\underset{(89)}{(4\xi-\varphi')}$$

$$+\left(-\frac{9}{8}m^4-\frac{1395}{128}m^5\right)e'\cos\underset{(90)}{(4\xi+\varphi')}$$

$$+\left(-\frac{45}{8}m^3-\frac{5259}{128}m^4-\frac{445}{4}m^5\right)e^2\cos\underset{(91)}{(4\xi-2\varphi)}$$

$$+\frac{81}{16}m^4\, e^2\cos\underset{(92)}{(4\xi+2\varphi)}$$

$$+\left(\frac{525}{16}m^3+\frac{3817}{16}m^4+\frac{3501065}{3072}m^5\right)ce'\cos\underset{(93)}{(4\xi-\varphi-\varphi')}$$

$$+\left(-\frac{135}{16}m^3-\frac{1437}{32}m^4+\frac{31971}{1024}m^5\right)ee'\cos\underset{(94)}{(4\xi-\varphi+\varphi')}$$

$$-\frac{135}{64}m^3\, e^3\cos\underset{(95)}{(4\xi-3\varphi)}$$

$$+\frac{3765}{32}m^3\, ee'^2\cos\underset{(98)}{(4\xi-\varphi-2\varphi')}-\frac{45}{32}m^3\, ee'^2\cos\underset{(99)}{(4\xi-\varphi+2\varphi')}$$

$$+\frac{177}{256}m^6\cos\underset{(102)}{6\xi}$$

$$+\frac{675}{128}m^6\, e\cos\underset{(103)}{(6\xi-\xi)}$$

$$+\frac{675}{64}m^4\, c^2\cos\underset{(104)}{(6\xi-2\varphi)}.$$

Si l'on considère maintenant les termes affectés de la parallaxe solaire, que dans l'expression de $\int d'R$ l'on n'ait égard qu'à ces termes, et qu'on substitue pour $r\frac{dR}{dr}$ la valeur que nous avons trouvée n° 16, on aura

$$2\int d'R + r\frac{dR}{dr} = \left(\begin{array}{l}\frac{15}{8}m^2 + \frac{177}{16}m^3 + \frac{405}{8}m^4 + \frac{65209}{256}m^5 \\ \quad + \frac{4455035}{3072}m^6 + \frac{40296641}{4608}m^7\end{array}\right)\frac{a}{a'}\cos \underset{(70)}{\xi}$$

$$+\left(-\frac{45}{16}m^2 - \frac{1755}{128}m^3 - \frac{25557}{512}m^4\right)\frac{a}{a'}e\cos(\xi \underset{(71)}{-} \varphi)$$

$$+\left(-\frac{15}{16}m^2 - \frac{399}{128}m^3 + \frac{12795}{512}m^4\right)\frac{a}{a'}e\cos(\xi \underset{(72)}{+} \varphi)$$

$$+\left(-\frac{45}{8}m^2 + \frac{2469}{32}m^3 - \frac{1639}{32}m^4\right)\frac{a}{a'}e'\cos(\xi \underset{(73)}{-} \varphi')$$

$$+\left(\begin{array}{l}-2a_{74}m^2 + \frac{15}{8}m^2 - \frac{405}{32}m^3 \\ + \frac{3245}{64}m^4 - \frac{66579}{512}m^5\end{array}\right)\frac{a}{a'}e'\cos(\xi \underset{(74)}{+} \varphi')$$

$$+\frac{165}{64}m^2\frac{a}{a'}e^2\cos(\xi \underset{(75)}{-} 2\varphi)$$

$$+\frac{75}{16}m^2\frac{a}{a'}ee'\cos(\xi - \underset{(77)}{\varphi} - \varphi')$$

$$+\left(\frac{25}{8}m^2 - \frac{25}{16}m^3 - \frac{2975}{128}m^4 - \frac{26473}{256}m^5\right)\frac{a}{a'}\cos \underset{(80)}{3\xi}$$

$$+\left(-\frac{225}{16}m^2 - \frac{2385}{128}m^3 - \frac{16295}{512}m^4\right)\frac{a}{a'}e\cos(3\xi \underset{(81)}{-} \varphi)$$

$$+\frac{75}{16}m^2\frac{a}{a'}e\cos(3\xi \underset{(82)}{+} \varphi) + \frac{125}{8}m^2\frac{a}{a'}e'\cos(3\xi \underset{(83)}{-} \varphi')$$

$$+\left(\frac{5}{8}m^2 - \frac{2795}{96}m^3\right)\frac{a}{a'}e'\cos(3\xi \underset{(84)}{+} \varphi')$$

$$+\frac{1425}{64}m^2\frac{a}{a'}e^2\cos(3\xi \underset{(85)}{-} 2\varphi).$$

21. D'après la valeur de $\delta\frac{1}{r}$ qui résulte des approximations successives, et qui sera donnée n° 26, on trouve

$$
\begin{aligned}
\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2 = {} & \frac{19}{36}m^4 + \frac{19}{6}m^5 + \frac{10441}{864}m^6 + \frac{15793}{432}m^7 \\
& + \left(\begin{array}{l} \frac{15}{8}m^3 + \frac{4003}{288}m^4 + \frac{98205}{1536}m^5 + \frac{13265195}{55296}m^6 \\ \quad + \frac{360978071}{442368}m^7 \end{array}\right) e\cos\varphi \\
& + \left(\frac{495}{128}m^3 + \frac{110015}{4608}m^4 + \frac{2430145}{24576}m^5\right) e^2 \cos 2\varphi \\
& + \left(\frac{5}{2}m^4 + \frac{76}{3}m^5 + \frac{13841}{96}m^6 + \frac{32795}{54}m^7\right) e' \cos\varphi' \\
& + \left(\frac{57}{8}m^4 + \frac{209}{3}m^5\right) e'^2 \cos 2\varphi' \\
& + \left(\begin{array}{l} \frac{89}{16}m^3 + \frac{1969}{32}m^4 + \frac{1412995}{3072}m^5 + \frac{77874811}{27648}m^6 \\ \quad + \frac{14258588945}{884736}m^7 \end{array}\right) ee' \cos(\varphi - \varphi') \\
& + \left(\begin{array}{l} \frac{41}{16}m^3 + \frac{1211}{48}m^4 + \frac{1343449}{9216}m^5 + \frac{31860793}{55296}m^6 \\ \quad + \frac{3657783623}{2654208}m^7 \end{array}\right) ee' \cos(\varphi + \varphi') \\
& + \frac{3035}{256}m^3 e^2 e' \cos(2\varphi - \varphi') \\
& + \left(\frac{75}{16}m^3 + \frac{12437}{128}m^4\right) ee'^2 \cos(\varphi - 2\varphi') \\
& + \left(\frac{145}{16}m^3 + \frac{14371}{192}m^4\right) ee'^2 \cos(\varphi + 2\varphi') \\
& + \left(\frac{m^4}{3} + \frac{19}{18}m^5 + \frac{889}{432}m^6 + \frac{33847}{6480}m^7 + \frac{37420849}{1555200}m^8\right) \cos 2\xi \\
& + \left(\begin{array}{l} \frac{5}{8}m^3 + \frac{203}{96}m^4 + \frac{17965}{4608}m^5 + \frac{20195}{55296}m^6 \\ \quad - \frac{32940361}{1327104}m^7 \end{array}\right) e \cos(2\xi - \varphi) \\
& + \left(\frac{41}{48}m^4 - \frac{883}{1152}m^5 - \frac{362933}{13824}m^6\right) e \cos(2\xi + \varphi) \\
& + \left(-\frac{m^4}{3} + \frac{43}{24}m^5 + \frac{4007}{96}m^6 + \frac{334283}{960}m^7\right) e' \cos(2\xi - \varphi') \\
& + \left(-\frac{5}{3}m^4 - \frac{433}{72}m^5 + \frac{14711}{864}m^6 + \frac{7835387}{25920}m^7\right) e' \cos(2\xi + \varphi') \\
& + \left(\begin{array}{l} \frac{5}{16}m^3 - \frac{17025}{3072}m^4 - \frac{181477}{3072}m^5 - \frac{114735145}{294912}m^6 \\ \quad - \frac{11643119759}{5898240}m^7 \end{array}\right) e^2 \cos(2\xi - 2\varphi) \\
& + \frac{209}{96}m^4 e^2 \cos(2\xi + 2\varphi)
\end{aligned}
$$

$$+\left(\begin{array}{l}-\frac{191}{48}m^3-\frac{4409}{192}m^4-\frac{669825}{9216}m^5\\ -\frac{2855317}{36864}m^6-\frac{1125948409}{13271040}m^7\end{array}\right)ee'\cos(2\xi-\varphi-\varphi')$$

$$+\left(\begin{array}{l}-\frac{13}{16}m^3+\frac{3139}{192}m^4+\frac{2153215}{9216}m^5\\ +\frac{212548357}{110592}m^6+\frac{16146745287}{13271040}m^7\end{array}\right)ee'\cos(2\xi-\varphi+\varphi')$$

$$+\left(\frac{21}{8}m^3+\frac{4915}{192}m^4+\frac{137643}{768}m^5\right)ee'\cos(2\xi+\varphi-\varphi')$$

$$+\left(-\frac{21}{8}m^3-\frac{4783}{192}m^4-\frac{289117}{2304}m^5\right)ee'\cos(2\xi+\varphi+\varphi')$$

$$+\left(-\frac{14}{3}m^4-\frac{2069}{144}m^5\right)e'^2\cos(2\xi-2\varphi')$$

$$+\left(-\frac{3}{2}m^4-\frac{27}{16}m^5\right)e'^2\cos(2\xi+2\varphi')$$

$$+\left(-\frac{617}{32}m^3-\frac{52621}{384}m^4-\frac{10893811}{18432}m^5\right)ee'^2\cos(2\xi-\varphi-2\varphi')$$

$$+\left(-\frac{39}{32}m^3-\frac{425}{32}m^4\right)ee'^2\cos(2\xi-\varphi+2\varphi')$$

$$+\left(-\frac{5}{4}m^3-\frac{597}{64}m^4-\frac{39665}{768}m^5-\frac{646359}{2304}m^6-\frac{176170663}{110592}m^7\right)\frac{a}{a'}\cos\xi$$

$$-\frac{225}{128}m^3\frac{a}{a'}e\cos(\xi-\varphi)$$

$$+\left(-\frac{1015}{512}m^3-\frac{6051}{512}m^4\right)\frac{a}{a'}e\cos(\xi+\varphi)$$

$$+\left(\frac{5}{4}m^2-\frac{155}{48}m^3-\frac{3469}{576}m^4\right)\frac{a}{a'}e'\cos(\xi-\varphi')$$

$$+\left(\frac{1}{3}a_{74}m^2+\frac{45}{16}m^3+\frac{1949}{576}m^4+\frac{10195}{1536}m^5\right)\frac{a}{a'}e'\cos(\xi+\varphi')$$

$$+\left(-\frac{15}{16}m^3-\frac{1517}{192}m^4+\frac{35863}{768}m^5\right)\frac{a}{a'}\cos 3\xi$$

$$+\left(-\frac{225}{128}m^2-\frac{7665}{512}m^3-\frac{2328391}{24576}m^4\right)\frac{a}{a'}e\cos(3\xi-\varphi)$$

$$+\left(\frac{5}{4}m^2-\frac{115}{96}m^3\right)\frac{a}{a'}e'\cos(3\xi+\varphi')$$

$$+\left(\frac{1}{2}m^4+\frac{19}{6}m^5+\frac{151}{12}m^6\right)\cos 4\xi$$

$$+\left(\frac{15}{8}m^3+\frac{377}{32}m^4+\frac{27679}{512}m^5+\frac{3867601}{18432}m^6\right)e\cos(4\xi-\varphi)$$

$$+\frac{33}{16}m^4e\cos(4\xi+\varphi)+\left(\frac{7}{2}m^4+\frac{737}{24}m^5\right)e'\cos(4\xi-\varphi')$$

$$+\left(-\frac{m^4}{2}-\frac{43}{8}m^5\right)e'\cos(4\xi+\varphi')$$

$$+\left(\frac{225}{128}m^2+\frac{2805}{256}m^3+\frac{217743}{4096}m^4+\frac{5600543}{24576}m^5\right)e^2\cos(4\xi-2\varphi)$$

$$+\frac{2881}{512}m^4\,e^2\cos(4\xi+2\varphi)$$

$$+\left(\frac{175}{16}m^3+\frac{17459}{192}m^4+\frac{4361533}{9216}m^5\right)ee'\cos(4\xi-\varphi-\varphi')$$

$$+\left(-\frac{45}{16}m^3-\frac{1119}{64}m^4-\frac{7907}{1024}m^5\right)ee'\cos(4\xi-\varphi+\varphi')$$

$$-\frac{555}{64}m^3\,e^3\cos(4\xi-3\varphi)$$

$$+\frac{525}{64}m^3\,e^2\,e'\cos(4\xi-2\varphi-\varphi')-\frac{225}{64}m^3\,ee'^2\cos(4\xi-2\varphi+\varphi')$$

$$+\frac{1255}{32}m^3\,ee'^2\cos(4\xi-\varphi-2\varphi')-\frac{15}{32}m^3\,ee'^2\cos(4\xi-\varphi+2\varphi')$$

$$+\frac{7}{8}m^6\cos 6\xi+\frac{705}{128}m^5\,e\cos(6\xi-\varphi)+\frac{11025}{1024}m^4\,e^2\cos(6\xi-2\varphi);$$

$$\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2=\frac{55}{216}m^6+\frac{19}{12}\,'m$$

$$+\left(\frac{15}{16}m^5+\frac{4139}{576}m^6+\frac{86869}{3072}m^7\right)e\cos\varphi$$

$$+\frac{615}{256}m^5\,e^2\cos 2\varphi.$$

$$+\left(\frac{73}{32}m^5+\frac{12785}{256}m^6+\frac{56041}{96}m^7\right)ee'\cos(\varphi-\varphi')$$

$$+\left(-\frac{213}{32}m^5-\frac{47039}{768}m^6-\frac{1344941}{4608}m^7\right)ee'\cos(\varphi+\varphi')$$

$$+\left(\frac{5}{6}m^6+\frac{133}{18}m^7+\frac{34007}{864}m^8\right)\cos 2\xi$$

$$+\left(\frac{95}{32}m^5+\frac{3673}{128}m^6+\frac{348875}{2048}m^7\right)e\cos(2\xi-\varphi)$$

$$+\left(\frac{45}{32}m^5+\frac{6389}{384}m^6\right)e\cos(2\xi+\varphi)$$

$$+\left(\frac{53}{12}m^6+\frac{2723}{48}m^7\right)e'\cos(2\xi-\varphi')$$

$$+\left(\frac{13}{12}m^6+\frac{2623}{144}m^7\right)e'\cos(2\xi+\varphi')$$

$$+\left(\frac{675}{256}m^4+\frac{3935}{128}m^5\right)e^2\cos(2\xi-2\varphi)$$

$$+\left(\frac{607}{48}m^5+\frac{127025}{768}m^6+\frac{22317947}{18432}m^7\right)ee'\cos(2\xi-\varphi-\varphi')$$

$$+\left(\frac{43}{8}m^5+\frac{22849}{256}m^6+\frac{5320901}{6144}m^7\right)ee'\cos(2\xi-\varphi+\varphi')$$

$$+\frac{39}{4}m^5\,ee'\cos(2\xi+\varphi-\varphi')$$

$$+\frac{9}{16} m^5 ee' \cos(2\xi + \varphi + \varphi')$$
$$+\frac{2081}{64} m^5 ee'^2 \cos(2\xi - \varphi - 2\varphi')$$
$$+\frac{333}{64} m^6 ee'^2 \cos(2\xi - \varphi + 2\varphi')$$
$$+\left(-\frac{125}{64} m^5 - \frac{5307}{256} m^6 - \frac{426943}{3072} m^7\right) \frac{a}{a'} \cos \xi$$
$$-\frac{675}{256} m^4 \frac{a}{a'} e \cos(\xi + \varphi)$$
$$+\frac{5}{8} m^4 \frac{a}{a'} e' \cos(\xi - \varphi') + \left(\frac{95}{48} m^4 + \frac{145}{64} m^5\right) \frac{a}{a'} e' \cos(\xi + \varphi')$$
$$-\frac{75}{64} m^5 \frac{a}{a'} \cos 3\xi - \frac{225}{64} m^4 \frac{a}{a'} e \cos(3\xi - \varphi)$$
$$+\frac{m^6}{4} \cos 4\xi$$
$$+\left(\frac{15}{16} m^5 + \frac{385}{64} m^6\right) e \cos(4\xi - \varphi)$$
$$+\left(\frac{225}{256} m^4 + \frac{3045}{512} m^5\right) e^2 \cos(4\xi - 2\varphi)$$
$$-\frac{23}{32} m^5 ee' \cos(4\xi - \varphi - \varphi')$$
$$-\frac{117}{32} m^5 ee' \cos(4\xi - \varphi + \varphi');$$

$$\left(\delta \frac{1}{r}\right)^4 = \frac{25}{8} m^7 e \cos \varphi$$
$$+\frac{145}{9} m^7 ee' \cos(\varphi - \varphi')$$
$$+\frac{625}{72} m^7 ee' \cos(\varphi + \varphi')$$
$$+\frac{14}{27} m^8 \cos 2\xi$$
$$+\frac{275}{144} m^7 e \cos(2\xi - \varphi)$$
$$-\frac{2765}{864} m^7 ee' \cos(2\xi - \varphi - \varphi')$$
$$-\frac{235}{288} m^7 ee' \cos(2\xi - \varphi + \varphi')$$
$$-\frac{725}{288} m^7 \frac{a}{a'} \cos \xi.$$

22. A l'aide des valeurs précédentes, il est facile de former celle de la fonction que nous avons dési-

gnée par P, n° 13. En effet, si l'on fait d'abord abstraction des termes dépendans de l'excentricité de l'orbe lunaire, on aura simplement

$$P = \tfrac{3}{2}\left(\delta\,\frac{1}{r}\right)^2 - 2\left(\delta\,\frac{1}{r}\right)^3 + \tfrac{5}{2}\left(\delta\,\frac{1}{r}\right)^4 - 3\left(\delta\,\frac{1}{r}\right)^5 + \text{etc.}$$

En substituant pour $\left(\delta\,\frac{1}{r}\right)^2$, $\left(\delta\,\frac{1}{r}\right)^3$, etc., leurs valeurs, abstraction faite des termes qui dépendent de l'excentricité de l'orbe lunaire, nous avons trouvé

$$P = \left(\frac{15}{4}m^4 + 38m^5\right) e' \cos \underset{(6)}{\varphi'}$$

$$+\left(\frac{m^4}{2} + \frac{19}{12}m^5 + \frac{409}{288}m^6 - \frac{29993}{4320}m^7 - \frac{4285195\text{1}}{1036800}m^8\right) \cos \underset{(30)}{2\xi}$$

$$+\left(-\frac{m^4}{2} + \frac{43}{16}m^5 + \frac{10325}{192}m^6 + \frac{785009}{1920}m^7\right) e' \cos (2\xi \underset{(33)}{-} \varphi')$$

$$+\left(-\frac{5}{2}m^4 - \frac{433}{48}m^5 + \frac{13463}{576}m^6 + \frac{7205867}{17280}m^7\right) e' \cos (2\xi \underset{(34)}{+} \varphi')$$

$$+\left(-7m^4 - \frac{2069}{96}m^5\right) e'^2 \cos (2\xi \underset{(41)}{-} 2\varphi') + \left(-\frac{9}{4}m^4 - \frac{81}{32}m^5\right) e'^2 \cos (2\xi \underset{(42)}{+} 2\varphi')$$

$$+\left(-\frac{15}{8}m^2 - \frac{1791}{128}m^3 - \frac{37665}{512}m^5 - \frac{194225}{512}m^6 - \frac{52047133}{24576}m^7\right) \frac{a}{a'} \cos \underset{(70)}{\xi}$$

$$+\left(\frac{15}{8}m^2 - \frac{155}{32}m^3 - \frac{3949}{384}m^4\right) \frac{a}{a'} e' \cos (\xi \underset{(73)}{-} \varphi')$$

$$+\left(\frac{1}{2}a_{74}\,m^2 + \frac{135}{32}m^3 + \frac{143}{128}m^4 + \frac{5555}{1024}m^5\right) \frac{a}{a'} e' \cos (\xi \underset{(74)}{+} \varphi')$$

$$+\left(-\frac{45}{32}m^3 - \frac{1517}{128}m^4 - \frac{34663}{512}m^5\right) \frac{a}{a'} \cos \underset{(80)}{3\xi}$$

$$+\left(\frac{15}{8}m^2 - \frac{115}{64}m^3\right) \frac{a}{a'} e' \cos (3\xi \underset{(84)}{+} \varphi')$$

$$+\left(\frac{3}{4}m^4 + \frac{19}{4}m^5 + \frac{147}{8}m^6\right) \cos \underset{(86)}{4\xi}$$

$$+\left(\frac{21}{4}m^4 + \frac{737}{16}m^5\right) e' \cos (4\xi \underset{(89)}{-} \varphi')$$

$$+\left(-\frac{3}{4}m^4-\frac{129}{16}m^5\right)e'\cos(\underset{(90)}{4\xi+\varphi'})$$

$$+\frac{13}{16}m^6\cos\underset{(107)}{6\xi}.$$

Si l'on veut tenir compte des termes multipliés par l'excentricité e de l'orbe de la Lune, il faudra supposer généralement

$$P=-r_{1}^{3}\left(\delta\frac{1}{r}\right)+\tfrac{3}{2}r_{1}^{4}\left(\delta\frac{1}{r}\right)^{2}-2r_{1}^{5}\left(\delta\frac{1}{r}\right)^{3}$$
$$+\tfrac{5}{2}r_{1}^{6}\left(\delta\frac{1}{r}\right)^{4}-3r_{1}^{7}\left(\delta\frac{1}{r}\right)^{5}+\text{etc.},$$

et substituer à la place de r_{1}^{3}, r_{1}^{4}, r_{1}^{5}, etc. leurs valeurs relatives à l'orbite elliptique données n° 5, la seule valeur $r_{1}^{3}=1$ étant exceptée, n° 13. En remplaçant ensuite $\left(\delta\frac{1}{r}\right)$, $\left(\delta\frac{1}{r}\right)^{2}$, $\left(\delta\frac{1}{r}\right)^{3}$, etc., par leurs valeurs, et réduisant les résultats de cette double substitution, nous avons trouvé, pour les termes de la fonction P qui dépendent de l'excentricité de l'orbe lunaire, l'expression suivante :

$$P=\left(\frac{m^2}{2}+\frac{45}{16}m^3+\frac{3037}{192}m^4+\frac{70621}{1024}m^5+\frac{11545003}{36864}m^6+\frac{278312663}{291912}m^7\right)e\cos\underset{(1)}{\varphi}$$

$$+\left(\frac{m^2}{4}-\frac{945}{128}m^3-\frac{27963}{512}m^4-\frac{2192209}{8192}m^5\right)e^2\cos\underset{(2)}{2\varphi}$$

$$+\left(\begin{array}{l}-\frac{9}{4}m^2+\frac{267}{32}m^3+\frac{8121}{64}m^4+\frac{1843971}{2048}m^5\\+\frac{93280363}{18432}m^6+\frac{15580704017}{589824}m^7\end{array}\right)ee'\cos(\underset{(8)}{\varphi-\varphi'})$$

$$+\left(\begin{array}{l}-\frac{9}{4}m^2+\frac{123}{32}m^3+\frac{1159}{16}m^4+\frac{2746201}{6144}m^5\\+\frac{70869721}{36864}m^6+\frac{10690068551}{1769472}m^7\end{array}\right)ee'\cos(\underset{(9)}{\varphi+\varphi'})$$

$$+\left(\frac{63}{16}m+\frac{3339}{128}m^2+\frac{80529}{512}m^3\right)e^2e'\cos(2\varphi\underset{(10)}{-}\varphi')$$

$$+\left(-\frac{63}{16}m-\frac{2511}{128}m^2\right)e^2e'\cos(2\varphi\underset{(11)}{+}\varphi')$$

$$+\left(-\frac{27}{8}m^2+\frac{225}{32}m^3+\frac{53349}{256}m^4\right)ee'^2\cos(\varphi\underset{(12)}{-}2\varphi')$$

$$+\left(-\frac{27}{8}m^2+\frac{435}{32}m^3+\frac{11195}{64}m^4\right)ee'^2\cos(\varphi\underset{(13)}{+}2\varphi')$$

$$+\frac{189}{64}m\,e^2e'^2\cos(2\varphi\underset{(14)}{-}2\varphi')-\frac{189}{64}m\,e^2e'^2\cos(2\varphi\underset{(15)}{+}2\varphi')$$

$$+\frac{63}{8}m\,e^3e'\cos(3\varphi\underset{(16)}{-}\varphi')-\frac{63}{8}m\,e^3e'\cos(3\varphi\underset{(17)}{+}\varphi')$$

$$+\left(\begin{matrix}\frac{3}{2}m^2+\frac{91}{16}m^3+\frac{2513}{192}m^4+\frac{166087}{9216}m^5-\frac{2423791}{110592}m^6\\-\frac{3929325191}{13271040}m^7\end{matrix}\right)e\cos(2\xi\underset{(31)}{-}\varphi)$$

$$+\left(\frac{3}{2}m^2+\frac{19}{4}m^3+\frac{1075}{96}m^4+\frac{32599}{2304}m^5-\frac{1043173}{27648}m^6\right)e\cos(2\xi\underset{(32)}{+}\varphi)$$

$$+\left(\frac{45}{16}m+\frac{561}{64}m^2+\frac{30233}{1024}m^3+\frac{980665}{12288}m^4+\frac{53785813}{294912}m^5\right)e^2\cos(2\xi\underset{(35)}{-}2\varphi)$$

$$+\left(\frac{99}{32}m^2+\frac{303}{32}m^3+\frac{6141}{256}m^4\right)e^2\cos(2\xi\underset{(36)}{+}2\varphi)$$

$$+\left(\begin{matrix}\frac{21}{4}m^2+\frac{751}{32}m^3+\frac{9115}{128}m^4+\frac{712031}{6144}m^5\\-\frac{8628685}{24576}m^6-\frac{1359912541l}{2949120}m^7\end{matrix}\right)ee'\cos(2\xi\underset{(37)}{-}\varphi-\varphi')$$

$$+\left(\begin{matrix}-\frac{3}{4}m^2-\frac{221}{32}m^3+\frac{6277}{384}m^4+\frac{7352029}{18432}m^5\\+\frac{718107223}{221184}m^6+\frac{5377718385077}{26542080}m^7\end{matrix}\right)ee'\cos(2\xi\underset{(38)}{-}\varphi+\varphi')$$

$$+\left(\frac{21}{4}m^2+\frac{267}{8}m^3+\frac{18439}{128}m^4+\frac{255763}{512}m^5\right)ee'\cos(2\xi\underset{(39)}{+}\varphi-\varphi')$$

$$+\left(-\frac{3}{4}m^2-\frac{77}{8}m^3-\frac{17489}{384}m^4-\frac{599903}{4608}m^5\right)ee'\cos(2\xi\underset{(40)}{+}\varphi+\varphi')$$

$$+\left(-\frac{91}{16}m^2-\frac{7951}{384}m^3\right)e^3\cos(2\xi\underset{(43)}{-}3\varphi)+\frac{83}{16}m^2e^3\cos(2\xi\underset{(44)}{+}3\varphi)$$

$$+\frac{693}{64}m^2 e^2 e' \cos(2\xi + \underset{(47)}{2\varphi} - \varphi') - \frac{99}{64}m^2 e^2 e' \cos(2\xi + \underset{(48)}{2\varphi} + \varphi')$$

$$+\left(\frac{51}{4}m^2 + \frac{4541}{64}m^3 + \frac{227225}{768}m^4 + \frac{31049111}{36864}m^5\right) ee'^2 \cos(2\xi - \underset{(49)}{\varphi} - 2\varphi')$$

$$+\left(\frac{1}{2}a_{50}m^2 - \frac{9}{4}m^3 - \frac{717}{512}m^4 + \frac{39347}{4096}m^5\right) ee'^2 \cos(2\xi - \underset{(50)}{\varphi} + 2\varphi')$$

$$+\frac{51}{4}m^2 ee'^2 \cos(2\xi + \underset{(51)}{\varphi} - 2\varphi') - \frac{165}{64}m e^4 \cos(2\xi \underset{(52)}{-} 4\varphi)$$

$$-\frac{637}{32}m^2 e^3 e' \cos(2\xi - \underset{(53)}{3\varphi} - \varphi') + \frac{91}{32}m^2 e^3 e' \cos(2\xi - \underset{(54)}{3\varphi} + \varphi')$$

$$+\left(-\frac{45}{32}m - \frac{2619}{256}m^2\right)\frac{a}{a'} e \cos(\xi \underset{(71)}{-} \varphi)$$

$$+\left(-\frac{45}{32}m - \frac{243}{32}m^2 - \frac{34107}{1024}m^3 - \frac{321459}{2048}m^4\right)\frac{a}{a'} e \cos(\xi \underset{(72)}{+} \varphi)$$

$$+\frac{135}{32}m^2\frac{a}{a'}e^2 \cos(\xi \underset{(75)}{-} 2\varphi) - \frac{45}{16}m\frac{a}{a'}e^2 \cos(\xi \underset{(76)}{+} 2\varphi)$$

$$+\left(\frac{15}{8} - \frac{135}{16}m\right)\frac{a}{a'} ee' \cos(\xi + \underset{(79)}{\varphi} + \varphi')$$

$$+\left(-\frac{525}{256}m^2 - \frac{21495}{1024}m^3 - \frac{2206631}{16384}m^4\right)\frac{a}{a'} e \cos(3\xi \underset{(81)}{-} \varphi)$$

$$+\frac{75}{128}m^2\frac{a}{a'} e \cos(3\xi \underset{(82)}{+} \varphi) - \frac{375}{64}m^2\frac{a}{a'}e^2 \cos(3\xi \underset{(85)}{-} 2\varphi)$$

$$+\left(\frac{45}{16}m^3 + \frac{1119}{64}m^4 + \frac{400737}{5120}m^5 + \frac{30734947}{102400}m^6\right) e \cos(4\xi \underset{(87)}{-} \varphi)$$

$$+\frac{93}{32}m^4 e \cos(4\xi \underset{(88)}{+} \varphi)$$

$$+\left(\frac{675}{256}m^2 + \frac{8505}{512}m^3 + \frac{681765}{8192}m^4 + \frac{59167}{160}m^5\right) e^2 \cos(4\xi \underset{(91)}{-} 2\varphi)$$

$$+\frac{7521}{1024}m^4 e^2 \cos(4\xi \underset{(92)}{+} 2\varphi)$$

$$+\left(\frac{525}{32}m^3 + \frac{17291}{128}m^4 + \frac{4312549}{6144}m^5\right) ee' \cos(4\xi - \underset{(93)}{\varphi} - \varphi)$$

$$+\left(-\frac{135}{32}m^3 - \frac{3333}{128}m^4 - \frac{24933}{10240}m^5\right) ee' \cos(4\xi - \underset{(94)}{\varphi} + \varphi')$$

$$-\frac{225}{32}m^3 e^3 \cos(4\xi \underset{(95)}{-} 3\varphi)$$

$$+\frac{1575}{128}m^2e^2e'\cos(\underset{(96)}{4\xi-2\varphi-\varphi'})-\frac{675}{128}m^2e^2e'\cos(\underset{(97)}{4\xi-2\varphi+\varphi'})$$

$$+\frac{3765}{64}m^3ee'^2\cos(\underset{(98)}{4\xi-\varphi-2\varphi'})-\frac{45}{64}m^3ee'^2\cos(\underset{(99)}{4\xi-\varphi+2\varphi'})$$

$$+\frac{2115}{256}m^3e\cos(\underset{(103)}{6\xi-\varphi})$$

$$+\frac{33075}{2048}m^4e^2\cos(\underset{(104)}{6\xi-2\varphi}).$$

23. Nous sommes maintenant en état de former les valeurs des quantités P_1, P_2, etc., et R_1, R_2, etc., qui entrent dans les équations de condition du n° 15, et nous aurons ainsi tout ce qui est nécessaire à l'évaluation des coefficiens indéterminés a_0, a_1, a_2, etc., que nous avons introduits dans l'expression du rayon vecteur.

La comparaison des termes non périodiques, ou qui répondent à l'argument zéro dans l'équation (6), n° 13, nous a donné d'abord :

$$a_0+2g+2R_0=0. \qquad (11)$$

Cette équation fera connaître la valeur de a_0 lorsque celle de g sera connue, et réciproquement. Nous avons dit, n° 12, que la constante g devait être déterminée par la condition que le moyen mouvement t de la Lune fût le même dans le mouvement elliptique et dans le mouvement troublé ; or en négligeant l'inclinaison de l'orbe lunaire à l'écliptique, on a

$$\frac{dv}{dt}=\frac{h}{r^2}+\frac{1}{r^2}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt. \qquad (13)$$

On a d'ailleurs, n° 1,

$$\frac{dv^2}{dt^2}=\frac{d^2r}{rdt^2}+\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r}\left(\frac{dR}{dr}\right);$$

d'où en éliminant $\frac{dv}{dt}$ entre ces deux équations, on conclut

$$\left[\frac{h}{r}+\frac{1}{r}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt\right]^2=\frac{rd^2r}{dt^2}+\frac{1}{r}-r\frac{dR}{dr},$$

et par suite

$$\frac{h^2}{r^2}=-\frac{2h}{r^2}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt-\frac{1}{r^2}\left[\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt\right]^2+\frac{rd^2r}{dt^2}+\frac{1}{r}-r\frac{dR}{dr},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{h^2}{r^2}=-\frac{2dv}{dt}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt+\frac{1}{r^2}\left[\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt\right]^2+\frac{rd^2r}{dt^2}+\frac{1}{r}-r\frac{dR}{dr}. \quad (14)$$

Si l'on suppose effectué le développement des fonctions v et $\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt$ en séries, et qu'en négligeant les excentricités et les inclinaisons, on ait

$$\frac{dv}{dt}=\text{M}\cos 2\xi+\text{N}\cos 4\xi,$$

$$\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt=\text{M}'\cos 2\xi+\text{N}'\cos 4\xi,$$

la combinaison de ces valeurs, en n'ayant égard qu'aux termes non périodiques, donnera

$$\frac{2dv}{dt}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt=\text{MM}'+\text{NN}'.$$

Le second terme de cette expression ne produit que des quantités de l'ordre m^8, que nous négligeons; d'après l'expression en série de $\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt$, n° 18, et celle de δv qui sera rapportée n° 30, il sera facile de

former les valeurs de M et M′; on trouvera ainsi, aux quantités près que nous négligeons,

$$\frac{2dv}{dt}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt$$
$$=\left(\frac{11}{4}m^2+\frac{85}{12}m^3+\frac{539}{36}m^4+\frac{3031}{108}m^5\right)\left(\frac{3}{4}m^2+\frac{3}{4}m^3+\frac{m^4}{2}+\frac{m^5}{2}\right)$$
$$=\frac{33}{16}m^4+\frac{59}{8}m^5+\frac{215}{12}m^6+\frac{1339}{36}m^7.$$

Le développement en série de la fonction $\frac{1}{r^2}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt$ sera rapporté n° 28; en négligeant les termes dépendans des excentricités et des inclinaisons, ou ceux qui ne produiraient que des quantités d'un ordre supérieur à celles que nous considérons, on pourra supposer ici

$$\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt=\left(\frac{3}{4}m^2+\frac{3}{4}m^3+\frac{m^4}{2}+\frac{m^5}{2}\right)\cos 2\xi,$$
$$\frac{1}{r^2}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt=\left(\frac{3}{4}m^2+\frac{3}{4}m^3+\frac{3}{4}m^4+\frac{3}{4}m^5\right)\cos 2\xi;$$

d'où l'on conclura

$$\frac{1}{r^2}\left[\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt\right]^2=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}m^2+\frac{3}{4}m^3+\frac{m^4}{2}+\frac{m^5}{2}\right)\left(\frac{3}{4}m^2+\frac{3}{4}m^3+\frac{3}{4}m^4+\frac{3}{4}m^5\right)$$
$$=\frac{9}{32}m^4+\frac{9}{16}m^5+\frac{3}{4}m^6+\frac{15}{16}m^7.$$

En négligeant les quantités de l'ordre des excentricités, on a

$$r=1-\delta\frac{1}{r}+\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2-\left(\delta\frac{1}{r}\right)^3+\text{etc.},$$

et en substituant pour $\delta\frac{1}{r}$, $\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2$, etc., leurs valeurs données par les approximations successives, n° 21 et 26,

on trouve

$$r = -\left(m^2 + \frac{19}{6}m^3 + \frac{125}{18}m^4 + \frac{709}{54}m^5\right)\cos 2\xi,$$

d'où en observant que $\xi = (1 - m)t$, il est facile de conclure

$$\frac{r\,d^2 r}{dt^2} = -2\left(1-m\right)^2\left(m^2 + \frac{19}{6}m^3 + \frac{125}{18}m^4 + \frac{709}{54}m^5\right)^2$$

$$= -2m^4 - \frac{26}{3}m^5 - \frac{49}{2}m^6 - \frac{1552}{27}m^7.$$

Enfin, d'après ce qui précède, en ne considérant que les termes non périodiques et indépendans des excentricités et des inclinaisons, on a, n° 16,

$$\frac{1}{r} = 1 + a_0,$$

$$r\frac{dR}{dr} = 2R = \frac{m^2}{2} - \frac{179}{48}m^4 - \frac{97}{8}m^5 - \frac{7681}{288}m^6 - \frac{7103}{144}m^7.$$

En substituant ces diverses valeurs dans l'équation (14) et réduisant, on trouve

$$\frac{h^2}{r^2} = 1 + a_0 - \frac{m^2}{2} - \frac{5}{96}m^4 - \frac{161}{48}m^5 - \frac{4319}{288}m^6 - \frac{9593}{216}m^7.$$

En négligeant l'excentricité de l'orbe lunaire, on peut supposer

$$\frac{1}{r^2} = 1 + 2\delta\frac{1}{r} + \left(\delta\frac{1}{r}\right)^2;$$

d'où, en vertu des valeurs de $\delta\frac{1}{r}$ et $\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2$, n°s 21 et 26, en n'ayant égard qu'aux termes non périodiques, on conclut

$$\frac{1}{r^2} = 1 + 2a_0 + \frac{19}{36}m^4 + \frac{19}{6}m^5 + \frac{10441}{864}m^6 + \frac{15793}{432}m^7.$$

L'équation précédente donnera donc ainsi

$$h^2 = \frac{1 + a_0 - \frac{m^2}{2} - \frac{5}{96}m^4 - \frac{161}{48}m^5 - \frac{4319}{288}m^6 - \frac{9593}{216}m^7}{1 + 2a_0 + \frac{19}{36}m^4 + \frac{19}{6}m^5 + \frac{10441}{864}m^6 + \frac{15793}{432}m^7},$$

ou bien en effectuant la division, et ayant soin de supposer $a_0 = \frac{m^2}{6} - \frac{179}{288}m^4 - \frac{97}{48}m^5$ dans les termes où a_0 est multiplié par m^2, m^4, etc., les différens termes de la valeur précédente de a_0 étant supposés fournis par les approximations qui précèdent celle à laquelle on veut s'arrêter, on trouvera

$$h^2 = 1 - a_0 - \frac{m^2}{2} - \frac{103}{288}m^4 - \frac{313}{48}m^5 - \frac{35829}{1296}m^6 - \frac{34583}{432}m^7;$$

d'où l'on conclura aisément

$$h = 1 - \frac{1}{2}a_0 - \frac{m^2}{4} - \frac{135}{576}m^4 - \frac{313}{96}m^5 - \frac{11921}{864}m^6 - \frac{35231}{864}m^7.$$

A l'aide de cette valeur et de celle de $\frac{1}{r^2}$ donnée plus haut, on trouve

$$\frac{h}{r^2} = 1 + \frac{3}{2}a_0 - \frac{m^2}{4} + \frac{105}{576}m^4 - \frac{3}{32}m^5 - \frac{313}{216}m^6 - \frac{4041}{864}m^7.$$

Le développement de la fonction $\frac{1}{r^2}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt$, qu'on trouvera n° 28, en n'ayant égard qu'à la partie non périodique et indépendante des excentricités et des inclinaisons, donne

$$\frac{1}{r^2}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt = \frac{3}{4}m^4 + \frac{25}{8}m^5 + \frac{203}{24}m^6 + \frac{2693}{144}m^7.$$

Si l'on substitue les valeurs précédentes dans l'équation (13), en observant que puisque le moyen mouvement est supposé le même dans l'orbite elliptique et dans l'orbite troublée, on doit avoir, en faisant abstraction des termes périodiques, $\frac{dv}{dt} = 1$, on trouvera

$$1 = 1 + \frac{3}{2}a_0 - \frac{m^2}{4} + \frac{179}{192}m^4 + \frac{97}{32}m^5 + \frac{757}{108}m^6 + \frac{4039}{288}m^7.$$

De cette équation on tire

$$a_0 = \frac{m^2}{6} - \frac{179}{288}m^4 - \frac{97}{48}m^5 - \frac{757}{162}m^6 - \frac{4039}{432}m^7;$$

Cette valeur, substituée dans l'expression précédente de h, donne

$$h = 1 - \frac{m^2}{3} + \frac{11}{144}m^4 - \frac{9}{4}m^5 - \frac{29707}{2592}m^6 - \frac{3899}{108}m^7.$$

En substituant de même la valeur de a_0 dans l'équation (11), on en tirerait celle de g; mais cette valeur est inutile, la constante g n'ayant été introduite dans nos formules que pour nous permettre de disposer arbitrairement de l'indéterminée a_0.

24. La comparaison des termes dépendans de l'argument φ nous a donné l'équation suivante

$$(a_1 + 1)(c^2 - 1) = c^2 P_1 + R_1. \qquad (12)$$

Nous avons vu, n° 12, que l'on pouvait disposer à son gré de l'indéterminée a_1, que l'on doit regarder comme une des arbitraires de la théorie; la formule précédente, en la développant, servira donc à déterminer la constante c. Conformément à ce que nous avons dit numéro cité, nous supposerons ici, avec les principaux géomètres qui se sont occupés avant nous de la théorie de la Lune,

$$a_1 = \frac{m^2}{6} - \frac{645}{128}m^3 - \frac{152129}{4608}m^4 - \frac{3747907}{24576}m^5 - \frac{1554906325}{2654208}m^6.$$

En substituant ensuite pour P_1 et R_1 les valeurs des coefficiens qui correspondent à l'argument φ dans le

développement des fonctions P et $2\int d'R + r\frac{dR}{dr}$ donné n°s 20 et 22, c'est-à-dire en supposant

$$P_1 = \frac{m^2}{2} + \frac{45}{16}m^3 + \frac{3037}{192}m^4 + \frac{70621}{1024}m^5 + \frac{11545003}{36864}m^6 + \frac{278312663}{294912}m^7,$$

$$R_1 = -2m^2 - \frac{135}{8}m^3 - \frac{7523}{96}m^4 - \frac{154227}{512}m^5 - \frac{18490571}{18432}m^6 - \frac{148678169}{49152}m^7,$$

l'équation (12) deviendra

$$(c^2-1)\left(1 + \frac{m^2}{6} - \frac{645}{128}m^3 - \frac{152129}{4608}m^4 - \frac{3747907}{24576}m^5\right)$$
$$= c^2\left(\frac{m^2}{2} + \frac{45}{16}m^3 + \frac{3037}{192}m^4 + \frac{70621}{1024}m^5 + \frac{11545003}{36864}m^6 + \frac{278312663}{294912}m^7\right)$$
$$-2m^2 - \frac{135}{8}m^3 - \frac{7523}{96}m^4 - \frac{154227}{512}m^5 - \frac{18490571}{18432}m^6 - \frac{148678169}{49152}m^7.$$

Pour satisfaire à cette équation, supposons

$$c^2 - 1 = \alpha m^2 + \beta m^3 + \gamma m^4 + \delta m^5 + \lambda m^6 + \mu m^7;$$

en substituant cette valeur dans la formule précédente, et égalant les coefficiens des mêmes puissances de m dans les deux membres, on trouvera

$$\alpha = -\frac{3}{2},\quad \beta = -\frac{225}{16},\quad \gamma = -\frac{4035}{64},\quad \delta = -\frac{254693}{1024},\quad \lambda = -\frac{11628907}{12288},$$
$$\mu = -\frac{1084679077}{294912};$$

on aura donc par conséquent

$$c^2 = 1 - \frac{3}{2}m^2 - \frac{225}{16}m^3 - \frac{4035}{64}m^4 - \frac{254693}{1024}m^5 - \frac{11628907}{12288}m^6 - \frac{1084679077}{294912}m^7;$$

d'où il est aisé de conclure

$$c = 1 - \frac{3}{4}m^2 - \frac{225}{32}m^3 - \frac{4071}{128}m^4 - \frac{265493}{2048}m^5 - \frac{12822631}{24576}m^6 - \frac{1273925965}{589824}m^7.$$

Cette équation détermine la vitesse moyenne du périgée lunaire.

25. La valeur de c étant ainsi connue, on la substituera dans les formules obtenues n° 15, en comparant entre eux dans l'expression différentielle du rayon vecteur, les termes qui dépendent des argumens 2φ, φ', etc. Si l'on remplace ensuite dans ces formules les quantités P_2, R_2, P_6, etc., par leurs valeurs résultantes du développement des fonctions P et $2\int d'R + r\frac{dR}{dr}$, on formera les équations suivantes :

$$a_2\left(3-6m^2-\frac{225}{4}m^3\right)-\frac{3}{2}m^2-\frac{225}{16}m^3-\frac{4035}{64}m^4-\frac{254693}{1024}m^5$$
$$=4\left(1-\frac{3}{2}m^2-\frac{225}{16}m^3\right)\left(\frac{m^2}{4}-\frac{945}{128}m^3-\frac{27963}{512}m^4-\frac{2192209}{8192}m^5\right)$$
$$-\frac{m^2}{2}-\frac{45}{2}m^3-\frac{19915}{192}m^4-\frac{270227}{512}m^5,$$

$$a_6(\ m^2-1)=m^2\left(\frac{15}{4}m^4+38m^5\right)+\frac{3}{2}m^3-\frac{473}{16}m^4-194m^5-\frac{3563}{4}m^6$$
$$-\frac{238303}{72}m^7,$$

$$a_7(4m^2-1)=\frac{9}{4}m^3-\frac{4161}{64}m^4-\frac{1067}{2}m^5,$$

$$a_8\left(-2m-\frac{m^2}{2}-\frac{201}{16}m^3-\frac{3135}{64}m^4-\frac{189557}{1024}m^5-\frac{8442991}{12288}m^6\right)$$
$$=\left(1-2m-\frac{m^2}{2}-\frac{201}{16}m^3-\frac{3135}{64}m^4-\frac{189557}{1024}m^5\right)$$
$$\times\left(\begin{array}{l}-\frac{9}{4}m^2+\frac{267}{32}m^3+\frac{8121}{64}m^4+\frac{1843971}{2048}m^5+\frac{93280363}{18432}m^6\\+\frac{15580704017}{589824}m^7\end{array}\right)$$
$$-3m^2-\frac{783}{16}m^3-\frac{1445}{4}m^4-\frac{2307585}{1024}m^5-\frac{80421971}{6144}m^6$$
$$-\frac{22488561959}{294912}m^7,$$

$$a_9\left(2m-\frac{m^2}{2}-\frac{249}{16}m^3-\frac{4935}{64}m^4-\frac{319829}{1024}m^5-\frac{14814823}{12288}m^6\right)$$
$$=\left(1+2m-\frac{m^2}{2}-\frac{249}{16}m^3-\frac{4935}{64}m^4-\frac{319829}{1024}m^5\right)$$
$$\times\left(\begin{array}{l}-\frac{9}{4}m^2+\frac{123}{32}m^3+\frac{1159}{16}m^4+\frac{2746201}{6144}m^5+\frac{70869721}{36864}m^6\\ +\frac{10690068551}{1769472}m^7\end{array}\right)$$
$$-3m^2-\frac{387}{16}m^3-\frac{4615}{32}m^4-\frac{680881}{1024}m^5-\frac{3436945}{1536}m^6-\frac{917027579}{294912}m^7,$$

$$a_{10}(3-4m-5m^2)=(4-4m-5m^2)\left(\frac{63}{16}m+\frac{3339}{128}m^2+\frac{80529}{512}m^3\right)$$
$$-\frac{3}{4}m^2-\frac{945}{16}m^3,$$

$$a_{11}(3+4m)=(4+4m)\left(-\frac{63}{16}m-\frac{2511}{128}m^2\right)-\frac{3}{4}m^2,$$

$$a_{12}\left(-4m+\frac{5}{2}m^2-\frac{177}{16}m^3\right)$$
$$=\left(1-4m+\frac{5}{2}m^2\right)\left(-\frac{27}{8}m^2+\frac{225}{32}m^3+\frac{53349}{256}m^4\right)$$
$$-\frac{9}{2}m^2-\frac{2817}{32}m^3-\frac{181425}{256}m^4,$$

$$a_{13}\left(4m+\frac{5}{2}m^2-\frac{273}{16}m^3\right)$$
$$=\left(1+4m+\frac{5}{2}m^2\right)\left(-\frac{27}{8}m^2+\frac{435}{32}m^3+\frac{11195}{64}m^4\right)$$
$$-\frac{9}{2}m^2-\frac{1143}{32}m^3-\frac{76551}{256}m^4,$$

$$3a_{14}=\frac{4.189}{64}m,$$

$$3a_{15}=-\frac{4.189}{64}m,$$

$$8a_{16}=\frac{9.63}{8}m,$$

$$8a_{17}=-\frac{9.63}{8}m,$$

$$a_{20}(3-8m+4m^2)$$
$$=(4-8m+4m^2)\left(\frac{m^4}{2}+\frac{19}{12}m^5+\frac{409}{288}m^6-\frac{29993}{4320}m^7-\frac{42851951}{1036800}m^8\right)$$
$$+3m^2+\frac{3}{2}m^3-\frac{3}{2}m^4-\frac{16}{3}m^5-\frac{12713}{2304}m^6+\frac{287519}{69120}m^7+\frac{19841303}{1036800}m^8,$$

$$a_{31}\left(-4m+\frac{11}{2}m^2+\frac{177}{16}m^3+\frac{2307}{64}m^4+\frac{146021}{1024}m^5+\frac{7644523}{12288}m^6\right)$$
$$=\left(1-4m+\frac{11}{2}m^2+\frac{177}{16}m^3+\frac{2307}{64}m^4+\frac{146021}{1024}m^5\right)$$
$$\times\left(\frac{3}{2}m^2+\frac{91}{16}m^3+\frac{2513}{192}m^4+\frac{166087}{9216}m^5-\frac{2423791}{110592}m^6-\frac{3929325191}{13271040}m^7\right)$$
$$-9m^2-\frac{51}{4}m^3-\frac{451}{16}m^4-\frac{25493}{768}m^5+\frac{920237}{9216}m^6+\frac{946174513}{1105920}m^7,$$

$$a_{32}\left(8-12m-\frac{m^2}{2}-\frac{627}{16}m^3-\frac{10377}{64}m^4\right)$$
$$=\left(9-12m-\frac{m^2}{2}-\frac{627}{16}m^3-\frac{10377}{64}m^4\right)$$
$$\times\left(\frac{3}{2}m^2+\frac{19}{4}m^3+\frac{1075}{96}m^4+\frac{32599}{2304}m^5-\frac{1043173}{27648}m^6\right)$$
$$+3m^2+m^3+\frac{73}{24}m^4+\frac{7859}{1152}m^5-\frac{271451}{13824}m^6,$$

$$a_{33}(3-12m+9m^2)$$
$$=(4-12m+9m^2)\left(-\frac{m^4}{2}+\frac{43}{16}m^5+\frac{10325}{192}m^6+\frac{785009}{1920}m^7\right)$$
$$+\frac{21}{2}m^2+\frac{135}{8}m^3+\frac{117}{16}m^4-\frac{5319}{32}m^5-\frac{1838623}{1536}m^6-\frac{529817081}{92160}m^7,$$

$$a_{34}(3-4m+m^2)$$
$$=(4-4m+m^2)\left(-\frac{5}{2}m^4-\frac{433}{48}m^5+\frac{13463}{576}m^6+\frac{7205867}{17280}m^7\right)$$
$$-\frac{3}{2}m^2-\frac{75}{8}m^3-\frac{27}{16}m^4+\frac{13409}{96}m^5+\frac{4287179}{4608}m^6+\frac{1160542399}{276480}m^7,$$

$$a_{35}\left(4m^2-6m^3-54m^4-\frac{849}{4}m^5-1\right)$$
$$=\left(4m^2-6m^3-54m^4-\frac{849}{4}m^5-\frac{1297}{2}m^6\right)$$
$$\times\left(\frac{45}{16}m+\frac{561}{64}m^2+\frac{30233}{1024}m^3+\frac{980665}{12288}m^4+\frac{53785813}{294912}m^5\right)$$
$$+\frac{15}{4}m^2+\frac{45}{16}m^3+\frac{9907}{256}m^4+\frac{294499}{1024}m^5+\frac{134948943}{73728}m^6$$
$$+\frac{2269707805}{294912}m^7,$$

$$a_{36}(15-16m-8m^2)$$
$$=(16-16m-8m^2)\left(\frac{99}{32}m^2+\frac{303}{32}m^3+\frac{6141}{256}m^4\right)$$
$$+3m^2+\frac{3}{4}m^3+\frac{47}{8}m^4.$$

$$a_{37}\left(-6m+\frac{21}{2}m^2+\frac{153}{16}m^3+\frac{1407}{64}m^4+\frac{80885}{1024}m^5+\frac{4458607}{12288}m^6\right)$$
$$=\left(1-6m+\frac{21}{2}m^2+\frac{153}{16}m^3+\frac{1407}{64}m^4+\frac{80885}{1024}m^5\right)$$
$$\times\left(\begin{array}{l}\frac{21}{4}m^2+\frac{751}{32}m^3+\frac{9115}{128}m^4+\frac{712031}{6144}m^5-\frac{8628685}{24576}m^6\\ \quad-\frac{13599125411}{2949120}m^7\end{array}\right)$$
$$-\frac{63}{2}m^2-65m^3-\frac{6699}{64}m^4+\frac{807631}{1536}m^5+\frac{75797083}{12288}m^6+\frac{2141368747}{61440}m^7,$$

$$a_{38}\left(-2m+\frac{5}{2}m^2+\frac{201}{16}m^3+\frac{3207}{64}m^4+\frac{211157}{1024}m^5+\frac{10830439}{12288}m^6\right)$$
$$=\left(1-2m+\frac{5}{2}m^2+\frac{201}{16}m^3+\frac{3207}{64}m^4+\frac{211157}{1024}m^5\right)$$
$$\times\left(\begin{array}{l}-\frac{3}{4}m^2-\frac{221}{32}m^3+\frac{6277}{384}m^4+\frac{7352029}{18432}m^5+\frac{718107223}{221184}m^6\\ +\frac{5377183850077}{26542080}m^7\end{array}\right)$$
$$+\frac{9}{2}m^2+\frac{15}{4}m^3-\frac{11893}{64}m^4-\frac{2723957}{1536}m^5-\frac{4359924625}{36864}m^6$$
$$-\frac{77420804563}{1105920}m^7,$$

$$a_{39}\left(8-1\cdot m+\frac{9}{2}m^2-\frac{603}{16}m^3\right)=\left(9-18m+\frac{9}{2}m^2-\frac{603}{16}m^3\right)$$
$$\times\left(\frac{21}{4}m^2+\frac{267}{8}m^3+\frac{18439}{128}m^4+\frac{255763}{512}m^5\right)$$
$$+\frac{21}{2}m^2+\frac{177}{8}m^3+\frac{5323}{64}m^4+\frac{77279}{256}m^5,$$

$$a_{40}\left(8-6m-\frac{7}{2}m^2-\frac{651}{16}m^3\right)=\left(9-6m-\frac{7}{2}m^2-\frac{651}{16}m^3\right)$$
$$\times\left(-\frac{3}{4}m^2-\frac{77}{8}m^3-\frac{17489}{384}m^4-\frac{597903}{4608}m^5\right)$$
$$-\frac{3}{2}m^2-\frac{137}{8}m^3-\frac{6589}{192}m^4-\frac{59587}{2304}m^5,$$

$$a_{41}(3-16m+16m^2)=(4-16m)\left(-7m^4-\frac{2069}{96}m^5\right)$$
$$+\frac{51}{2}m^2+\frac{255}{4}m^3+\frac{147}{2}m^4-\frac{252715}{384}m^5,$$

$$3a_{42}=6\left(-\frac{3}{2}m^4-\frac{27}{16}m^5\right)-\frac{9}{4}m^3+\frac{51}{4}m^4+\frac{8089}{128}m^5,$$

$$a_{43}\left(4m-\frac{m^2}{2}\right)=(1+4m)\left(-\frac{91}{16}m^2-\frac{7951}{384}m^3\right)-\frac{7}{8}m^2+\frac{133}{32}m^3,$$

$$24a_{44} = \frac{25.83}{16}m^2 + \frac{25}{8}m^3,$$

$$15a_{47} = \frac{16.693}{64}m^2 + \frac{21}{2}m^3,$$

$$15a_{48} = -\frac{16.99}{64}m^2 - \frac{3}{2}m^3,$$

$$a_{49}\left(-8m + \frac{35}{2}m^2 + \frac{129}{16}m^3 + \frac{507}{64}m^4\right) = \left(1 - 8m + \frac{35}{2}m^2 + \frac{129}{16}m^3\right)$$
$$\times\left(\frac{51}{4}m^2 + \frac{4541}{64}m^3 + \frac{227225}{768}m^4 + \frac{31049111}{36864}m^5\right).$$
$$-\frac{153}{2}m^2 - \frac{6555}{32}m^3 - \frac{106291}{256}m^4 + \frac{6221561}{3072}m^5,$$

$$a_{50}\left(\frac{3}{2}m^2 + \frac{225}{16}m^3 + \frac{4107}{64}m^4\right)$$
$$= \left(1 + \frac{3}{2}m^2\right)\left(a_{50}\frac{m^2}{2} - \frac{9}{4}m^3 - \frac{717}{512}m^4 + \frac{39347}{4096}m^5\right)$$
$$-2a_{50}m^2 - \frac{63}{32}m^3 - \frac{23361}{256}m^4 - \frac{1011731}{1024}m^5,$$

$$8a_{51} = \frac{9.51}{4}m^2 + \frac{51}{2}m^3,$$

$$3a_{52} = -\frac{4.165}{64}m,$$

$$6m\,a_{53} = -\frac{637}{32}m^2 - \frac{49}{16}m^3,$$

$$2m\,a_{54} = \frac{91}{32}m^2 + \frac{7}{16}m^3,$$

$$a_{70}(-2m + m^2) = (1 - 2m + m^2)$$
$$\times\left(-\frac{15}{8}m^3 - \frac{1791}{128}m^4 - \frac{37665}{512}m^5 - \frac{194225}{512}m^6 - \frac{52047133}{24576}m^7\right)$$
$$+\frac{15}{8}m^2 + \frac{177}{16}m^3 + \frac{405}{8}m^4 + \frac{65209}{256}m^5 + \frac{4455035}{3072}m^6 + \frac{40296641}{4608}m^7,$$

$$a_{71}(m^2 - 1) = \left(m^2 - \frac{3}{2}m^3\right)\left(-\frac{45}{32}m - \frac{2619}{256}m^2\right)$$
$$-\frac{45}{16}m^2 - \frac{1755}{128}m^3 - \frac{25557}{512}m^4,$$

$$a_{72}\left(3-4m-2m^2-\frac{213}{8}m^3\right)=\left(4-4m-2m^2-\frac{213}{8}m^3\right)$$
$$\times\left(-\frac{45}{32}m-\frac{243}{32}m^2-\frac{34107}{1024}m^3-\frac{321459}{2048}m^4\right)$$
$$-\frac{15}{16}m^2-\frac{399}{128}m^3+\frac{12795}{512}m^4,$$

$$a_{73}(-4m+4m^2)=(1-4m+4m^2)\left(\frac{15}{8}m^2-\frac{155}{32}m^3-\frac{3949}{384}m^4\right)$$
$$-\frac{45}{8}m^2+\frac{2469}{32}m^3-\frac{1639}{32}m^4,$$

$$0=\left(\frac{1}{2}a_{74}m^2+\frac{135}{32}m^3+\frac{143}{128}m^4+\frac{5555}{1024}m^5\right)$$
$$-2a_{74}m^2+\frac{15}{8}m^2-\frac{405}{32}m^3+\frac{3245}{64}m^4-\frac{66579}{512}m^5,$$

$$2ma_{76}=\frac{135}{32}m^2+\frac{165}{64}m^3,$$

$$-8a_{78}=\frac{9\cdot 45}{16}m,$$

$$3a_{79}=\frac{15}{2}-\frac{135}{4}m,$$

$$a_{80}(8-18m+9m^2)=(9-18m+9m^2)$$
$$\times\left(-\frac{45}{32}m^3-\frac{1517}{128}m^4-\frac{34663}{512}m^5\right)$$
$$+\frac{25}{8}m^2-\frac{25}{16}m^3-\frac{2975}{128}m^4-\frac{26473}{256}m^5,$$

$$a_{81}(3-12m+12m^2)=(4-12m+12m^2)$$
$$\times\left(-\frac{525}{256}m^2-\frac{21495}{1024}m^3-\frac{2206631}{16384}m^4\right)$$
$$-\frac{225}{16}m^2-\frac{2385}{128}m^3-\frac{16295}{512}m^4,$$

$$15a_{82}=\frac{16.75}{128}m^2+\frac{75}{16}m^3,$$

$$8a_{83}=\frac{125}{8}m^2,$$

$$a_{84}(8-12m)=(9-12m)\left(\frac{15}{8}m^2-\frac{115}{64}m^3\right)+\frac{5}{8}m^2-\frac{2795}{96}m^3,$$

$$-6ma_{85}=-\frac{375}{64}m^2+\frac{1425}{64}m^3,$$

$$a_{86}(15-32m+16m^2)=(16-32m+16m^2)$$
$$\times\left(\frac{3}{4}m^4+\frac{19}{4}m^5+\frac{147}{8}m^6\right)+\frac{9}{8}m^4+\frac{177}{32}m^5+\frac{539}{32}m^6,$$

$$a_{87}\left(8-24m+\frac{41}{2}m^2+\frac{579}{16}m^3\right)=\left(9-24m+\frac{41}{2}m^2+\frac{579}{16}m^3\right)$$
$$\times\left(\frac{45}{16}m^3+\frac{1119}{64}m^4+\frac{400737}{5120}m^5+\frac{30734947}{102400}m^6\right)$$
$$+\frac{45}{8}m^3+\frac{1017}{32}m^4+\frac{68273}{512}m^5+\frac{2681163}{6144}m^6,$$

$$24a_{88}=\frac{25.93}{32}m^4+\frac{45}{16}m^4,$$

$$a_{89}(15-40m)=(16-40m)\left(\frac{21}{4}m^4+\frac{737}{16}m^5\right)+\frac{63}{8}m^4+\frac{7059}{128}m^5,$$

$$a_{90}(15-24m)=(16-24m)\left(-\frac{3}{4}m^4-\frac{129}{16}m^5\right)-\frac{9}{8}m^4-\frac{1395}{128}m^5,$$

$$a_{91}\left(3-16m+22m^2+\frac{177}{4}m^3\right)=\left(4-16m+22m^2+\frac{177}{4}m^3\right)$$
$$\times\left(\frac{675}{256}m^2+\frac{8505}{512}m^3+\frac{681765}{8192}m^4+\frac{59167}{160}m^5\right)$$
$$-\frac{45}{8}m^3-\frac{5259}{128}m^4-\frac{445}{4}m^5,$$

$$35a_{92}=\frac{36.7521}{1024}m^4+\frac{81}{16}m^4,$$

$$a_{93}\left(8-30m+\frac{59}{2}m^2\right)=\left(9-30m+\frac{59}{2}m^2\right)$$
$$\times\left(\frac{525}{32}m^3+\frac{17291}{128}m^4+\frac{4312549}{6144}m^5\right)$$
$$+\frac{525}{16}m^3+\frac{3817}{16}m^4+\frac{3501065}{3072}m^5,$$

$$a_{94}\left(8-18m+\frac{27}{2}m^2\right)=\left(9-18m+\frac{27}{2}m^2\right)$$
$$\times\left(-\frac{135}{32}m^3-\frac{3333}{128}m^4-\frac{24933}{10240}m^5\right)$$
$$-\frac{135}{16}m^3-\frac{1437}{32}m^4+\frac{31971}{1024}m^5,$$

$$-8m\,a_{95}=-\frac{225}{32}m^3-\frac{135}{64}m^3,$$

$$3a_{96}=\frac{4.1575}{128}m^2,\quad 3a_{97}=-\frac{4.675}{128}m^2,$$

$$8a_{98}=\frac{9.3765}{64}m^2+\frac{3765}{32}m^2,$$

$$8a_{99}=-\frac{9.45}{64}m^2-\frac{45}{32}m^2,$$

$$35\, a_{102} = \frac{36.13}{16} m^6 + \frac{177}{256} m^6,$$

$$24\, a_{103} = \frac{25.2115}{256} m^5 + \frac{675}{128} m^5,$$

$$15\, a_{104} = \frac{16.33075}{2048} m^4 + \frac{675}{64} m^4.$$

Par une première approximation, on trouve

$$\delta \frac{1}{r} = \frac{m^2}{6} + \frac{2}{3} m^2 e^2 \cos 2\varphi.$$

On a d'ailleurs, par les formules du mouvement elliptique, n° 5,

$$r_1^3 = -3e \cos \varphi + \frac{e^3}{8} \cos 3\varphi;$$

d'où l'on conclut aisément

$$r_1^3\, \delta \frac{1}{r} = -\frac{47}{48} m^2 e^3 \cos 3\varphi.$$

La fonction P renferme donc le terme suivant :

$$P = \frac{47}{48} m^2 e^3 \cos 3\varphi.$$

La fonction R contient le terme correspondant

$$R = -\frac{m'}{16} m^2 e^3 \cos 3\varphi.$$

Si l'on suppose simplement, ce qui suffit ici, $2\int d'R + r\frac{dR}{dr} = 4R$, il en résultera dans la fonction $2\int d'R + r\frac{dR}{dr}$ le terme

$$2\int d'R + r\frac{dR}{dr} = -\frac{m^2}{4} e^3 \cos 3\varphi.$$

On aura ainsi les valeurs des quantités que nous avons désignées par P_3 et R_3 dans la quatrième des équations de condition du n° 15; en y substituant ces valeurs et faisant $c^2 = 1 - \frac{3}{2} m^2$, cette équation deviendra

$$8 a_2 - \frac{27}{16} m^2 = \frac{9.47}{48} m^2 - \frac{m^2}{4}.$$

La fonction R, n° 16, contient les termes suivans :

$$R = \frac{105}{16} m^2 e^2 e' \cos(2\xi - \underset{(45)}{2\varphi} - \varphi') - \frac{15}{16} m^2 e^2 e' \cos(2\xi - \underset{(46)}{2\varphi} + \varphi')$$
$$+ \frac{255}{16} m^2 e^2 e'^2 \cos(2\xi - \underset{(55)}{2\varphi} - 2\varphi').$$

Ces termes ne renfermant pas le moyen mouvement t de la Lune dans leurs argumens, on aura dans l'ordre de quantités auquel nous nous arrêtons, conformément au théorème énoncé n° 9, $\int d'R = 0$, on peut d'ailleurs s'en assurer par un calcul direct; en n'ayant égard qu'à ces termes, et observant que $r \frac{dR}{dr} = 2R$, on aura donc

$$2\int d'R + r\frac{dR}{dr} = \frac{105}{8} m^2 e^2 e' \cos(2\xi - \underset{(45)}{2\varphi} - \varphi')$$
$$- \frac{15}{8} m^2 e^2 e' \cos(2\xi - \underset{(46)}{2\varphi} + \varphi')$$
$$+ \frac{255}{8} m^2 e^2 e'^2 \cos(2\xi - \underset{(55)}{2\varphi} - 2\varphi').$$

En substituant dans les équations du n° 15, pour R_{45}, R_{46} et R_{47}, leurs valeurs, et en faisant $c = 1$, on formera les équations suivantes :

$$-a_{45} = \frac{105}{8} m^2, \quad -a_{46} = -\frac{15}{8} m^2, \quad -a_{55} = \frac{255}{8} m^2.$$

26. En résolvant les équations précédentes, ou, ce qui sera plus expéditif, en se contentant d'y satisfaire par des suites de coefficiens indéterminés, comme nous en avons donné un exemple n° 24, on trouvera

$$a_2 = \frac{2}{3}m^2 - \frac{405}{32}m^3 - \frac{98549}{1152}m^4 - \frac{2780531}{6144}m^5,$$

$$a_5 = \frac{41}{32}m^3,$$

$$a_6 = -\frac{3}{2}m^3 + \frac{449}{16}m^4 + 194\,m^5 + \frac{14641}{16}m^6 + \frac{249535}{72}m^7,$$

$$a_7 = -\frac{9}{4}m^3 + \frac{3585}{64}m^4 + \frac{1067}{2}m^5,$$

$$a_8 = \frac{21}{8}m + \frac{1113}{64}m^2 + \frac{833}{8}m^3 + \frac{2424209}{4096}m^4 + \frac{64011973}{18432}m^5 + \frac{25186923797}{1179648}m^6,$$

$$a_9 = -\frac{21}{8}m - \frac{837}{64}m^2 - \frac{7063}{128}m^3 - \frac{2909255}{12288}m^4 - \frac{79226543}{73720}m^5 - \frac{17506692727}{3538944}m^6,$$

$$a_{10} = \frac{21}{4}m + \frac{1161}{32}m^2 + \frac{26343}{128}m^3,$$

$$a_{11} = -\frac{21}{4}m - \frac{789}{32}m^2,$$

$$a_{12} = \frac{63}{32}m + \frac{4635}{256}m^2 + \frac{17931}{128}m^3,$$

$$a_{13} = -\frac{63}{32}m - \frac{1965}{256}m^2 - \frac{11849}{512}m^3,$$

$$a_{14} = \frac{63}{16}m + \frac{4923}{128}m^2,$$

$$a_{15} = -\frac{63}{16}m,$$

$$a_{16} = \frac{567}{64}m,$$

$$a_{17} = -\frac{567}{64}m,$$

$$a_{20} = m^2 + \frac{19}{6}m^3 + \frac{131}{18}m^4 + \frac{383}{27}m^5 + \frac{510565}{20736}m^6 + \frac{23140781}{622080}m^7 + \frac{355021217}{9331200}m^8,$$

$$a_{31} = \frac{15}{8}m + \frac{187}{32}m^2 + \frac{31673}{1536}m^3 + \frac{1222495}{18432}m^4 + \frac{96889189}{442368}m^5 + \frac{4474277609}{5308416}m^6,$$

$$a_{32} = \frac{33}{16}m^2 + \frac{101}{16}m^3 + \frac{5897}{384}m^4 + \frac{59585}{2304}m^5 - \frac{55421}{6912}m^6,$$

$$a_{33} = \frac{7}{2}m^2 + \frac{157}{8}m^3 + \frac{3349}{48}m^4 + \frac{16357}{96}m^5 + \frac{67929}{512}m^6 - \frac{430936073}{276480}m^7,$$

$$a_{34} = -\frac{m^2}{2} - \frac{91}{24}m^3 - \frac{1265}{144}m^4 + \frac{23687}{864}m^5 + \frac{16255649}{41472}m^6 + \frac{6057836941}{2488320}m^7,$$

$$a_{35} = -\frac{15}{4}m^2 - \frac{225}{16}m^3 - \frac{18403}{256}m^4 - \frac{240615}{1024}m^5 - \frac{22187645}{24576}m^6 - \frac{478181537}{294912}m^7,$$

$$a_{36} = \frac{7}{2}m^2 + \frac{127}{12}m^3 + \frac{19717}{720}m^4,$$

$$a_{37} = \frac{35}{8}m + \frac{1269}{64}m^2 + \frac{47255}{768}m^3 + \frac{287267}{4096}m^4 - \frac{100840759}{147456}m^5 - \frac{21929926337}{3538944}m^6,$$

$$a_{38} = -\frac{15}{8}m - \frac{97}{64}m^2 + \frac{49997}{768}m^3 + \frac{27347045}{36864}m^4 + \frac{2581130729}{442368}m^5 + \frac{42860960349}{10616832}m^6,$$

$$a_{39} = \frac{231}{32}m^2 + \frac{5727}{128}m^3 + \frac{201653}{1024}m^4 + \frac{29554493}{4096}m^5,$$

$$a_{40} = -\frac{33}{32}m^2 - \frac{1687}{128}m^3 - \frac{179147}{3072}m^4 - \frac{5981477}{36864}m^5,$$

$$a_{41} = \frac{17}{2}m^2 + \frac{799}{12}m^3 + \frac{5849}{18}m^4 + \frac{4033679}{3456}m^5,$$

$$a_{42} = -\frac{3}{4}m^3 + \frac{5}{4}m^4 + \frac{6793}{384}m^5,$$

$$a_{43} = -\frac{105}{64}m - \frac{7703}{768}m^3,$$

$$a_{44} = \frac{2125}{384}m^2,$$

$$a_{45} = -\frac{105}{8}m^2,$$

$$a_{46} = \frac{15}{8}m^2,$$

$$a_{47} = \frac{49}{4} m^2,$$

$$a_{48} = -\frac{7}{4} m^2,$$

$$a_{49} = \frac{255}{32} m + \frac{12011}{256} m^2 + \frac{64759}{384} m^3 + \frac{285253397}{147456} m^4,$$

$$a_{50} = -\frac{45}{32} m - \frac{6219}{256} m^2 - \frac{47017}{256} m^3,$$

$$a_{51} = \frac{561}{32} m^2,$$

$$a_{52} = -\frac{55}{16} m,$$

$$a_{63} = -\frac{245}{64} m,$$

$$a_{64} = \frac{105}{64} m,$$

$$a_{65} = -\frac{255}{8} m^2,$$

$$a_{70} = -\frac{15}{16} m - \frac{81}{16} m^2 - \frac{5817}{256} m^3 - \frac{117755}{1024} m^4 - \frac{2025973}{3072} m^5 - \frac{587741249}{147456} m^6,$$

$$a_{71} = \frac{45}{16} m^2 + \frac{1935}{128} m^3 + \frac{31155}{512} m^4,$$

$$a_{72} = -\frac{15}{8} m - \frac{177}{16} m^2 - \frac{12899}{256} m^3 - \frac{22099}{96} m^4,$$

$$a_{73} = \frac{15}{16} m - \frac{977}{64} m^2 - \frac{10151}{1536} m^3,$$

$$a_{74} = \frac{5}{4} - \frac{45}{8} m + \frac{2211}{64} m^2 - \frac{127603}{1536} m^3,$$

$$a_{75} = \frac{435}{128} m,$$

$$a_{76} = -\frac{405}{128} m,$$

$$a_{79} = \frac{5}{2} - \frac{45}{4} m,$$

$$a_{80} = \frac{25}{64} m^2 - \frac{115}{128} m^3 - \frac{3977}{256} m^4 - \frac{401201}{4096} m^5,$$

$$a_{81} = -\frac{475}{64} m^2 - \frac{14255}{256} m^3 - \frac{1259397}{4096} m^4,$$

$$a_{82} = \frac{15}{16} m^2,$$

$$a_{83} = \frac{125}{64} m^2,$$

$$a_{84} = \frac{35}{16} m^2 - \frac{7975}{1536} m^3,$$

$$a_{85} = -\frac{175}{64} m,$$

$$a_{86} = \frac{7}{8} m^4 + \frac{2737}{480} m^5 + \frac{162869}{7200} m^6,$$

$$a_{87} = \frac{495}{128} m^3 + \frac{13725}{512} m^4 + \frac{5324183}{40960} m^5 + \frac{424920243}{819200} m^6,$$

$$a_{88} = \frac{805}{256} m^4,$$

$$a_{89} = \frac{49}{8} m^4 + \frac{21175}{384} m^5,$$

$$a_{90} = -\frac{7}{8} m^4 - \frac{6097}{640} m^5,$$

$$a_{91} = \frac{225}{64} m^2 + \frac{3195}{128} m^3 + \frac{277207}{2048} m^4 + \frac{10134781}{15360} m^5,$$

$$a_{92} = \frac{1971}{256} m^4,$$

$$a_{93} = \frac{5775}{256} m^3 + \frac{52445}{256} m^4 + \frac{5756331}{49152} m^5,$$

$$a_{94} = -\frac{1485}{256} m^3 - \frac{19695}{512} m^4 - \frac{1976667}{81920} m^5,$$

$$a_{95} = \frac{585}{512} m^2,$$

$$a_{96} = \frac{525}{32} m^2,$$

$$a_{97} = -\frac{225}{32} m^2,$$

$$a_{98} = \frac{41415}{512} m^3,$$

$$a_{99} = -\frac{495}{512} m^2,$$

$$a_{102} = \frac{219}{256} m^6,$$

$$a_{103} = \frac{18075}{2048} m^5,$$

$$a_{104} = \frac{2295}{128} m^4.$$

Inégalités périodiques du mouvement en longitude.

27. Déterminons maintenant les inégalités de la longitude correspondantes à celles que nous venons de considérer dans l'expression du rayon vecteur.

La seconde des équations (A), n° 1, en négligeant les termes dépendans des inclinaisons, donne

$$\frac{dv}{dt} = \frac{h}{r^2} + \frac{1}{r^2}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt. \qquad (15)$$

Pour développer le second membre de cette formule, observons que l'on a

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{r_1^2} + \frac{2}{r_1}\,\delta\frac{1}{r} + \left(\delta\frac{1}{r}\right)^2;$$

r_1, dans le deuxième membre de cette équation, se rapportant uniquement au mouvement elliptique, et $\delta\frac{1}{r}$ désignant la partie de la fonction $\frac{1}{r}$ due aux perturbations.

Par les formules du mouvement dans l'ellipse, on on a, n° 5,

$$\frac{1}{r_1} = 1 + e\cos\varphi + e^2\cos 2\varphi + \frac{9}{8}e^3\cos 3\varphi.$$

En combinant cette valeur avec celle de $\delta\frac{1}{r}$, que l'on peut regarder maintenant comme déterminée, on a trouvé

$$\frac{2}{r_1}\,\delta\,\frac{1}{r} = \frac{m^2}{3} - \frac{179}{144}m^4 - \frac{97}{24}m^5 - \frac{757}{81}m^6 - \frac{4039}{216}m^7$$

$$+\left(\frac{2}{3}m^2 - \frac{645}{64}m^3 - \frac{154993}{2304}m^4 - \frac{3797571}{12288}m^5 - \frac{1567309013}{1327104}m^6\right) e\cos\varphi$$

$$+\left(\frac{11}{6}m^2 - \frac{3885}{128}m^3 - \frac{946249}{4608}m^4 - \frac{26091483}{24576}m^5\right) e^2\cos 2\varphi$$

$$+\frac{181}{48}\,m^2 e^2 \cos 3\varphi$$

$$+\left(-3m^2 + \frac{449}{8}m^4 + 388m^5 + \frac{14641}{8}m^6 + \frac{249535}{36}m^7\right) e'\cos\varphi'$$

$$+\left(-\frac{9}{2}m^2 + \frac{3585}{32}m^4\right) e'^2\cos 2\varphi'$$

$$+\left(\begin{array}{l}\frac{21}{4}m + \frac{1065}{32}m^2 + \frac{833}{4}m^3 + \frac{2481681}{2048}m^4\\ \qquad + \frac{65799877}{9216}m^5 + \frac{25726649621}{589824}m^6\end{array}\right) ee'\cos(\varphi - \varphi')$$

$$+\left(\begin{array}{l}-\frac{21}{4}m - \frac{885}{32}m^2 - \frac{7063}{64}m^3 - \frac{2736839}{6144}m^4\\ \qquad - \frac{72074927}{36864}m^5 - \frac{15887515255}{1769472}m^6\end{array}\right) ee'\cos(\varphi + \varphi')$$

$$+\left(\frac{105}{8}m + \frac{5661}{64}m^2 + \frac{33007}{64}m^3\right) e^2 e'\cos(2\varphi - \varphi')$$

$$+\left(-\frac{105}{8}m - \frac{4089}{64}m^2\right) e^2 e'\cos(2\varphi + \varphi')$$

$$+\left(\frac{63}{16}m + \frac{4347}{128}m^2 + \frac{17931}{64}m^3\right) ee'^2\cos(\varphi - 2\varphi')$$

$$+\left(-\frac{63}{16}m - \frac{2253}{128}m^2 - \frac{11849}{256}m^3\right) ee'^2\cos(\varphi + 2\varphi')$$

$$+\frac{315}{64}\,m\,e^2 e'^2\cos(2\varphi - 2\varphi')$$

$$-\frac{315}{64}\,m\,e^2 e'^2\cos(2\varphi + 2\varphi')$$

$$+\frac{819}{32}\,m\,e^3 e'\cos(3\varphi - \varphi')$$

$$-\frac{819}{32}\,m\,e^3 e'\cos(3\varphi + \varphi')$$

$$+\left(\begin{array}{l}2m^2 + \frac{19}{3}m^3 + \frac{131}{9}m^4 + \frac{766}{27}m^5 + \frac{510565}{10368}m^6\\ \qquad + \frac{23140781}{311040}m^7 + \frac{355021217}{4665600}m^8\end{array}\right)\cos 2\xi$$

$$+\left(\begin{array}{l}\frac{15}{4}m + \frac{203}{32}m^2 + \frac{34105}{768}m^3 + \frac{1289567}{9216}m^4\\ \qquad + \frac{100026725}{221184}m^5 + \frac{4539629929}{2654208}m^6\end{array}\right) e\cos(2\xi - \varphi)$$

$$+\left(\frac{41}{8}m^2+\frac{379}{24}m^3+\frac{21883}{576}m^4+\frac{227779}{3456}m^5+\frac{178039}{20736}m^6\right)e\cos(2\xi+\varphi)$$

$$+\left(\begin{array}{l}7m^2+\frac{157}{4}m^3+\frac{3349}{24}m^4+\frac{16357}{48}m^5+\frac{67929}{256}m^6\\ \quad-\frac{430936073}{138240}m^7\end{array}\right)e'\cos(2\xi-\varphi')$$

$$+\left(\begin{array}{l}-m^2-\frac{91}{12}m^3-\frac{1265}{72}m^4+\frac{23687}{432}m^5+\frac{16255649}{20736}m^6\\ \quad+\frac{6057836941}{1244160}m^7\end{array}\right)e'\cos(2\xi+\varphi')$$

$$+\left(\frac{15}{8}m-\frac{21}{32}m^2-\frac{2221}{512}m^3-\frac{431131}{6144}m^4\right)e^2\cos(2\xi-2\varphi)$$

$$+\left(\frac{161}{16}m^2+\frac{1471}{48}m^3+\frac{445847}{5760}m^4\right)e^2\cos(2\xi+2\varphi)$$

$$+\left(\begin{array}{l}\frac{35}{4}m+\frac{1381}{32}m^2+\frac{54791}{384}m^3+\frac{1290473}{6144}m^4\\ \quad-\frac{88278583}{73728}m^5-\frac{21695163713}{1769472}m^6\end{array}\right)ee'\cos(2\xi-\varphi-\varphi')$$

$$+\left(\begin{array}{l}-\frac{15}{4}m-\frac{113}{32}m^2+\frac{48541}{384}m^3+\frac{271851251}{18432}m^4\\ \quad+\frac{2587194601}{221184}m^5+\frac{430690326563}{5308416}m^6\end{array}\right)ee'\cos(2\xi-\varphi+\varphi')$$

$$+\left(\frac{287}{16}m^2+\frac{6983}{64}m^3+\frac{712127}{1536}m^4+\frac{9913327}{6144}m^5\right)ee'\cos(2\xi+\varphi-\varphi')$$

$$+\left(-\frac{41}{16}m^2-\frac{5789}{192}m^3-\frac{577921}{4608}m^4-\frac{16428463}{55296}m^5\right)ee'\cos(2\xi+\varphi+\varphi')$$

$$+\left(17m^2+\frac{799}{6}m^3+\frac{5849}{9}m^4+\frac{4033679}{1728}m^5\right)e'^2\cos(2\xi-2\varphi')$$

$$-\frac{3}{2}m^2e'^2\cos(2\xi+2\varphi')$$

$$+\left(-\frac{45}{32}m-\frac{6467}{384}m^2\right)e^3\cos(2\xi-3\varphi)$$

$$+\frac{3409}{192}m^2e^3\cos(2\xi+3\varphi)$$

$$+\frac{1127}{32}m^2e^2e'\cos(2\xi+2\varphi-\varphi')$$

$$-\frac{161}{32}m^2e^2e'\cos(2\xi+2\varphi+\varphi')$$

$$+\left(\frac{255}{16}m+\frac{13099}{128}m^2+\frac{77543}{192}m^3+\frac{52482901}{73728}m^4\right)ee'^2\cos(2\xi-\varphi-2\varphi')$$

$$+\left(-\frac{45}{16}m-\frac{6219}{128}m^2-\frac{47113}{128}m^3\right)ee'^2\cos(2\xi-\varphi+2\varphi')$$

$$+\frac{697}{16}m^2ee'^2\cos(2\xi+\varphi-2\varphi')$$

$$+ \frac{15}{32} m e^4 \cos(2\xi - 4\varphi)$$

$$- \frac{105}{32} m e^3 e' \cos(2\xi - 3\varphi - \varphi')$$

$$+ \frac{45}{32} m e^3 e' \cos(2\xi - 3\varphi + \varphi')$$

$$+ \left(\begin{array}{l} -\frac{15}{8} m - \frac{81}{8} m^2 - \frac{5817}{128} m^3 - \frac{117755}{512} m^4 - \frac{2025973}{1536} m^5 \\ \qquad - \frac{587741249}{73728} m^6 \end{array} \right) \frac{a}{a'} \cos\xi$$

$$+ \left(-\frac{75}{16} m - \frac{435}{16} m^2 - \frac{31615}{256} m^3 - \frac{1767601}{3072} m^4 \right) \frac{a}{a'} e \cos(\xi + \varphi)$$

$$+ \left(\frac{15}{8} m - \frac{977}{32} m^2 - \frac{10151}{768} m^3 \right) \frac{a}{a'} e' \cos(\xi - \varphi')$$

$$+ \left(\frac{5}{2} - \frac{45}{4} m + \frac{2211}{32} m^2 - \frac{85099}{256} m^3 \right) \frac{a}{a'} e' \cos(\xi + \varphi')$$

$$+ \frac{375}{64} m \frac{a}{a'} e^2 \cos(\xi - 2\varphi) - \frac{585}{64} m \frac{a}{a'} e^2 \cos(\xi + 2\varphi)$$

$$+ \left(\frac{25}{4} - \frac{225}{8} m \right) \frac{a}{a'} ee' \cos(\xi + \varphi + \varphi')$$

$$+ \left(\frac{25}{32} m^2 - \frac{115}{64} m^3 - \frac{3977}{128} m^4 - \frac{401201}{2048} m^5 \right) \frac{a}{a'} \cos 3\xi$$

$$+ \left(-\frac{925}{64} m^2 - \frac{7185}{64} m^3 - \frac{3873639}{6144} m^4 \right) \frac{a}{a'} e \cos(3\xi - \varphi)$$

$$+ \frac{145}{64} m^2 \frac{a}{a'} e \cos(3\xi + \varphi) + \frac{125}{32} m^2 \frac{a}{a'} e' \cos(3\xi - \varphi')$$

$$+ \left(\frac{35}{8} m^2 - \frac{7975}{768} m^3 \right) \frac{a}{a'} e' \cos(3\xi + \varphi')$$

$$- \frac{175}{32} m^2 \frac{a}{a'} e^2 \cos(3\xi - 2\varphi)$$

$$+ \left(\frac{7}{4} m^4 + \frac{2737}{240} m^5 + \frac{162869}{3600} m^6 \right) \cos 4\xi$$

$$+ \left(\frac{495}{64} m^3 + \frac{13949}{256} m^4 + \frac{3264577}{12288} m^5 + \frac{781534223}{737280} m^6 \right) e \cos(4\xi - \varphi)$$

$$+ \frac{917}{128} m^4 e \cos(4\xi + \varphi)$$

$$+ \left(\frac{49}{4} m^4 + \frac{21175}{96} m^5 \right) e' \cos(4\xi - \varphi')$$

$$+ \left(-\frac{7}{4} m^4 - \frac{6097}{320} m^5 \right) e' \cos(4\xi + \varphi')$$

$$+ \left(\frac{225}{32} m^2 + \frac{6885}{128} m^3 + \frac{305553}{1024} m^4 + \frac{178829717}{122880} m^5 \right) e^2 \cos(4\xi - 2\varphi)$$

$$+ \frac{4971}{256} m^4 e^2 \cos(4\xi + 2\varphi)$$

$$+\left(\frac{5775}{128}m^3+\frac{53229}{128}m^4+\frac{58916531}{24576}m^5\right)ee'\cos(4\xi-\varphi-\varphi')$$

$$+\left(-\frac{1485}{128}m^3-\frac{19919}{256}m^4-\frac{473375}{8192}m^5\right)ee'\cos(4\xi-\varphi+\varphi')$$

$$+\frac{1485}{256}m^2 e^3\cos(4\xi-3\varphi)$$

$$+\frac{525}{16}m^2e^2e'\cos(4\xi-2\varphi-\varphi')-\frac{225}{16}m^2e^2e'\cos(4\xi-2\varphi+\varphi'$$

$$+\frac{41415}{256}m^2e^2e'\cos(4\xi-\varphi-2\varphi')-\frac{495}{256}m^2e^2e'\cos(4\xi-\varphi+2\varphi')$$

$$+\frac{219}{128}m^6\cos 6\xi+\frac{18075}{1024}m^5e\cos(6\xi-\varphi)+\frac{2295}{64}m^4e^2\cos(6\xi-2\varphi).$$

La valeur développée de la fonction $\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2$ a été donnée n° 21, en supprimant les termes qui seraient, par rapport à la quantité m, d'un ordre supérieur à ceux qui entrent dans l'expression de $\frac{2}{r_1}\delta\frac{1}{r}$, et en réunissant ensuite cette valeur à la précédente, on formera celle de la fonction $\frac{2}{r_1}\delta\frac{1}{r}+\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2$; en y joignant la partie de la fonction $\frac{1}{r^2}$ relative au mouvement elliptique, n° 5, dans laquelle on fera abstraction des termes d'un ordre supérieur par rapport à l'excentricité de l'orbe lunaire, à ceux que nous considérons, on trouvera

$$\frac{1}{r^2}=1+\frac{m^2}{3}-\frac{103}{144}m^4-\frac{7}{8}m^5+\frac{7099}{2592}m^6+\frac{7715}{432}m^7$$

$$+\left(2+\frac{2}{3}m^2-\frac{525}{64}m^3-\frac{122969}{2304}m^4-\frac{1003977}{4096}m^5-\frac{1248944333}{1327104}m^6\right)e\cos\underset{(1)}{\varphi}$$

$$+\left(\frac{5}{2}+\frac{11}{6}m^2-\frac{1695}{64}m^3-\frac{418117}{2304}m^4-\frac{11830669}{12288}m^5\right)e^2\cos 2\underset{(2)}{\varphi}$$

$$+\left(\frac{13}{4}+\frac{181}{48}m^2\right)e^3\cos 3\underset{(3)}{\varphi}+\frac{103}{24}e^4\cos 4\underset{(4)}{\varphi}+\frac{1097}{192}e^5\cos 5\underset{(5)}{\varphi}$$

$$+\left(-3m^2+\frac{469}{8}m^4+\frac{1240}{3}m^5+\frac{568599}{288}m^6+\frac{1631009}{216}m^7\right)e'\cos\underset{(6)}{\varphi'}$$

$$+\left(-\frac{9}{2}m^2+\frac{3813}{32}m^4\right)e'^2\cos 2\varphi' \quad (7)$$

$$+\left(\begin{array}{l}\frac{21}{4}m+\frac{1065}{32}m^2+\frac{3421}{16}m^3+\frac{2607697}{2048}m^4\\ \qquad +\frac{35019431}{4608}m^5+\frac{82163936767}{1769472}m^6\end{array}\right)ee'\cos(\varphi-\varphi') \quad (8)$$

$$+\left(\begin{array}{l}-\frac{21}{4}m-\frac{885}{32}m^2-\frac{6899}{64}m^3-\frac{2581831}{6144}m^4\\ \qquad -\frac{66701131}{36864}m^5-\frac{14867969879}{1769472}m^6\end{array}\right)ee'\cos(\varphi+\varphi') \quad (9)$$

$$+\left(\frac{105}{8}m+\frac{5661}{64}m^2+\frac{135063}{256}m^3\right)e^2e'\cos(2\varphi-\varphi') \quad (10)$$

$$-\left(-\frac{105}{8}m-\frac{4089}{64}m^2\right)e^2e'\cos(2\varphi+\varphi') \quad (11)$$

$$+\left(\frac{63}{16}m+\frac{4347}{128}m^2+\frac{18231}{64}m^3\right)ee'^2\cos(\varphi-2\varphi') \quad (12)$$

$$+\left(-\frac{63}{16}m-\frac{2253}{128}m^2-\frac{9529}{256}m^3\right)ee'^2\cos(\varphi+2\varphi') \quad (13)$$

$$+\frac{315}{32}m\,e^2e'^2\cos(2\varphi-2\varphi') \quad (14)$$

$$-\frac{315}{32}m\,e^2e'^2\cos(2\varphi+2\varphi') \quad (15)$$

$$+\frac{819}{32}m\,e^3e'\cos(3\varphi-\varphi') \quad (16)$$

$$-\frac{819}{32}m\,e^3e'\cos(3\varphi+\varphi') \quad (17)$$

$$+\left(\begin{array}{l}2m^2+\frac{19}{3}m^3+\frac{134}{9}m^4+\frac{1589}{54}m^5+\frac{531901}{10368}m^6\\ \qquad +\frac{24765437}{311040}m^7+\frac{116820941}{1166400}m^8\end{array}\right)\cos 2\xi \quad (30)$$

$$+\left(\begin{array}{l}\frac{15}{4}m+\frac{203}{16}m^2+\frac{34585}{768}m^3+\frac{1309055}{9216}m^4\\ \qquad +\frac{100889045}{221184}m^5+\frac{4540599289}{2654208}m^6\end{array}\right)e\cos(2\xi-\varphi) \quad (31)$$

$$+\left(\frac{41}{8}m^2+\frac{379}{24}m^3+\frac{22375}{576}m^4+\frac{112565}{1728}m^5-\frac{732721}{41472}m^6\right)e\cos(2\xi+\varphi) \quad (32)$$

$$+\left(\begin{array}{l}7m^2+\frac{157}{4}m^3+\frac{3341}{24}m^4+\frac{16443}{48}m^5+\frac{707529}{2304}m^6\\ \quad -\frac{382799321}{138240}m^7\end{array}\right)e'\cos(2\xi-\varphi') \qquad (33)$$

$$+\left(\begin{array}{l}-m^2-\frac{91}{12}m^3-\frac{1385}{72}m^4+\frac{21089}{432}m^5+\frac{16608713}{20736}m^6\\ \quad +\frac{6433935517}{1244160}m^7\end{array}\right)e'\cos(2\xi+\varphi') \qquad (34)$$

$$+\left(\frac{15}{8}m-\frac{21}{32}m^2-\frac{2061}{512}m^3-\frac{465181}{6144}m^4\right)e^2\cos(2\xi-2\varphi) \qquad (35)$$

$$+\left(\frac{161}{16}m^2+\frac{1471}{48}m^3+\frac{458387}{5760}m^4\right)e^2\cos(2\xi+2\varphi) \qquad (36)$$

$$+\left(\begin{array}{l}\frac{35}{4}m+\frac{1381}{32}m^2+\frac{53263}{384}m^3+\frac{1149385}{6144}m^4\\ \quad -\frac{93637183}{73728}m^5-\frac{2183218929}{1769472}m^6\end{array}\right)ee'\cos(2\xi-\varphi-\varphi') \qquad (37)$$

$$+\left(\begin{array}{l}-\frac{15}{4}m-\frac{113}{32}m^2+\frac{48229}{384}m^3+\frac{27486469}{18432}m^4\\ \quad +\frac{2638871761}{221184}m^5+\frac{440892647699}{5308416}m^6\end{array}\right)ee'\cos(2\xi-\varphi+\varphi') \qquad (38)$$

$$+\left(\frac{287}{16}m^2+\frac{7151}{64}m^3+\frac{751447}{1536}m^4+\frac{110144471}{6144}m^5\right)ee'\cos(2\xi+\varphi-\varphi') \qquad (39)$$

$$+\left(-\frac{41}{16}m^2-\frac{6293}{192}m^3-\frac{692713}{4608}m^4-\frac{23367271}{55296}m^5\right)ee'\cos(2\xi+\varphi+\varphi') \qquad (40)$$

$$+\left(17\,m^2+\frac{799}{6}m^3+\frac{5807}{9}m^4+\frac{4008851}{1728}m^5\right)e'^2\cos(2\xi-2\varphi') \qquad (41)$$

$$-\frac{3}{2}m^2e'^2\cos(2\xi+2\varphi') \qquad (42)$$

$$-\left(\frac{45}{32}m+\frac{6467}{384}m^2\right)e^3\cos(2\xi-3\varphi) \qquad (43)$$

$$+\frac{3409}{192}m^2e^3\cos(2\xi+3\varphi) \qquad (44)$$

$$+\frac{1127}{32}m^2e^2e'\cos(2\xi+2\varphi-\varphi') \qquad (47)$$

$$-\frac{161}{32}m^2e^2e'\cos(2\xi+2\varphi+\varphi') \qquad (48)$$

$$+\left(\frac{255}{16}m+\frac{13099}{128}m^2+\frac{73841}{192}m^3+\frac{42379669}{73728}m^4\right)ee'^2\cos(2\xi-\underset{(49)}{\varphi}-2\varphi')$$

$$+\left(-\frac{45}{16}m-\frac{6219}{128}m^2-\frac{47269}{128}m^3\right)ee'^2\cos(2\xi-\underset{(50)}{\varphi}+2\varphi')$$

$$+\frac{697}{16}m^2 ee'^2\cos(2\xi+\underset{(51)}{\varphi}-2\varphi')$$

$$+\frac{15}{32}m\,e^4\cos(2\xi\underset{(52)}{-}4\varphi)$$

$$-\frac{105}{32}m\,e^3e'\cos(2\xi-\underset{(53)}{3\varphi}-\varphi')$$

$$+\frac{45}{32}m\,e^3e'\cos(2\xi-\underset{(54)}{3\varphi}+\varphi')$$

$$+\left(\begin{array}{l}-\frac{15}{8}m-\frac{81}{8}m^2-\frac{5977}{128}m^3-\frac{122531}{512}m^4-\frac{2105303}{1536}m^5\\ \qquad-\frac{608424737}{73728}m^6\end{array}\right)\frac{a}{a'}\underset{(70)}{\cos\xi}$$

$$+\left(-\frac{75}{16}m-\frac{435}{16}m^2-\frac{64245}{512}m^3-\frac{1803907}{3072}m^4\right)\frac{a}{a'}e\cos(\xi\underset{(72)}{+}\varphi)$$

$$+\left(\frac{15}{8}m-\frac{937}{32}m^2-\frac{12631}{768}m^3\right)\frac{a}{a'}e'\cos(\xi\underset{(73)}{-}\varphi')$$

$$+\left(\frac{5}{2}-\frac{45}{4}m+\frac{6673}{96}m^2-\frac{84859}{256}m^3\right)\frac{a}{a'}e'\cos(\xi\underset{(74)}{+}\varphi')$$

$$+\frac{375}{64}m\frac{a}{a'}e^2\cos(\xi\underset{(75)}{-}2\varphi)$$

$$-\frac{585}{64}m\frac{a}{a'}e^2\cos(\xi\underset{(76)}{+}2\varphi)$$

$$+\left(\frac{25}{4}-\frac{225}{8}m\right)\frac{a}{a'}ee'\cos(\xi+\underset{(79)}{\varphi}+\varphi')$$

$$+\left(\frac{25}{32}m^2-\frac{175}{64}m^3-\frac{14965}{384}m^4-\frac{1490507}{6144}m^5\right)\frac{a}{a'}\underset{(80)}{\cos 3\xi}$$

$$+\left(-\frac{2075}{128}m^2-\frac{65145}{512}m^3-\frac{17822947}{24576}m^4\right)\frac{a}{a'}e\cos(3\xi\underset{(81)}{-}\varphi)$$

$$+\frac{145}{64}m^2\frac{a}{a'}e\cos(3\xi\underset{(82)}{+}\varphi)$$

$$+\frac{125}{32}m^2\frac{a}{a'}e'\cos(3\xi\underset{(83)}{-}\varphi')$$

$$+\left(\frac{45}{8}m^2-\frac{2965}{256}m^3\right)\frac{a}{a'}e'\cos(3\xi\underset{(84)}{+}\varphi')$$

$$-\frac{175}{32}m\,\frac{a}{a'}e^2\cos(3\xi\underset{(85)}{-}2\varphi)$$

$$+\left(\frac{9}{4}m^4+\frac{3497}{240}m^5+\frac{208169}{3600}m^6\right)\cos\underset{(86)}{4\xi}$$

$$+\left(\frac{615}{64}m^3+\frac{16965}{256}m^4+\frac{3928873}{12288}m^5+\frac{936238263}{737280}m^6\right)e\cos(4\xi\underset{(87)}{-}\varphi)$$

$$+\frac{1181}{128}m^3\,e\cos(4\xi\underset{(88)}{+}\varphi)$$

$$+\left(\frac{63}{4}m^4+\frac{27071}{192}m^5\right)e'\cos(4\xi\underset{(89)}{-}\varphi')$$

$$+\left(-\frac{9}{4}m^4-\frac{7817}{320}m^5\right)e'\cos(4\xi\underset{(90)}{+}\varphi')$$

$$+\left(\frac{1125}{128}m^2+\frac{16575}{256}m^3+\frac{1439955}{4096}m^4+\frac{4309009}{2560}m^5\right)e^2\cos(4\xi\underset{(91)}{-}2\varphi)$$

$$+\frac{12823}{512}m^4\,e^2\cos(4\xi\underset{(92)}{+}2\varphi)$$

$$+\left(\frac{7175}{128}m^3+\frac{194605}{384}m^4+\frac{211641857}{73728}m^5\right)ee'\cos(4\xi-\underset{(93)}{\varphi}-\varphi')$$

$$+\left(-\frac{1845}{128}m^3-\frac{24395}{256}m^4-\frac{536631}{8192}m^5\right)ee'\cos(4\xi-\underset{(94)}{\varphi}+\varphi')$$

$$+\frac{1485}{256}m^2\,e^3\cos(4\xi\underset{(95)}{-}3\varphi)$$

$$+\frac{2625}{64}m^2\,e^2e'\cos(4\xi-\underset{(96)}{2\varphi}-\varphi')$$

$$-\frac{1125}{64}m^2\,e^2e'\cos(4\xi-\underset{(97)}{2\varphi}+\varphi')$$

$$+\frac{51455}{256}m^3\,ee'^2\cos(4\xi-\underset{(98)}{\varphi}-2\varphi')$$

$$- \frac{615}{256} m^5 ee'^2 \cos (4\xi - \underset{(99)}{\varphi} + 2\varphi')$$

$$+ \frac{331}{128} m^6 \cos \underset{(102)}{6\xi}$$

$$+ \frac{23715}{1024} m^5 e \cos \underset{(103)}{(6\xi - \varphi)}$$

$$+ \frac{47745}{1024} m^4 e^2 \cos \underset{(104)}{(6\xi - 2\varphi)}.$$

28. En combinant les différens termes de l'expression précédente avec ceux de la fonction $-\int\left(\frac{dR}{dv}\right) dt$, développée n° 18, on a formé l'expression suivante :

$$\frac{1}{r^2}\int\left(\frac{dR}{dv}\right) dt = \frac{3}{4} m^4 + \frac{25}{8} m^5 + \frac{203}{24} m^6 + \frac{2693}{144} m^7$$

$$+ \left(-\frac{225}{32} m^3 - \frac{4775}{128} m^4 - \frac{949607}{6144} m^5 - \frac{4613925}{8192} m^6\right) e \cos \underset{(1)}{\varphi}$$

$$+ \left(-\frac{915}{64} m^3 - \frac{9559}{128} m^4 - \frac{1420637}{4096} m^5\right) e^2 \cos \underset{(2)}{2\varphi}$$

$$+ \left(-\frac{219}{16} m^4 - \frac{1177}{12} m^5 - \frac{67227}{144} m^6 - \frac{3048661}{1728} m^7\right) e' \cos \underset{(6)}{\varphi'}$$

$$- \frac{1971}{64} m^4 e'^2 \cos \underset{(7)}{2\varphi'}$$

$$+ \left(\begin{array}{l} -\frac{1125}{64} m^3 - \frac{22503}{128} m^4 - \frac{14753213}{12288} m^5 \\ \qquad - \frac{87397015}{12288} m^6 \end{array}\right) ee' \cos \underset{(8)}{(\varphi - \varphi')}$$

$$+ \left(\begin{array}{l} -\frac{825}{64} m^3 - \frac{5919}{64} m^4 - \frac{5518205}{12288} m^5 \\ \qquad - \frac{41572511}{24576} m^6 \end{array}\right) ee' \cos \underset{(9)}{(\varphi + \varphi')}$$

$$- \frac{4575}{128} m^3 e^2 e' \cos \underset{(10)}{(2\varphi - \varphi')}$$

$$- \frac{3825}{128} m^2 \, ee'^2 \cos (\underset{(12)}{\varphi - 2\varphi'})$$

$$- \frac{2775}{128} m^2 \, ee'^2 \cos (\underset{(13)}{\varphi + 2\varphi'})$$

$$+ \left(\frac{3}{4} m^2 + \frac{3}{4} m^3 + \frac{3}{4} m^4 + \frac{3}{4} m^5 + \frac{777}{1024} m^6 - \frac{583}{1024} m^7 - \frac{35411}{3072} m^8 \right) \underset{(30)}{\cos 2\xi}$$

$$+ \left(- \frac{15}{4} m^2 - \frac{33}{4} m^3 - \frac{129}{8} m^4 - \frac{1845}{256} m^5 + \frac{5901}{48} m^6 \right) e \cos (\underset{(31)}{2\xi - \varphi})$$

$$+ \left(\frac{5}{4} m^2 + \frac{13}{12} m^3 + \frac{133}{72} m^4 - \frac{49529}{6912} m^5 - \frac{7013455}{82944} m^6 \right) e \cos (\underset{(32)}{2\xi + \varphi})$$

$$+ \left(\begin{array}{c} \frac{21}{8} m^2 + \frac{99}{16} m^3 + \frac{297}{32} m^4 - \frac{639}{32} m^5 - \frac{1744641}{6144} m^6 \\ - \frac{21137839}{12288} m^7 \end{array} \right) e' \cos (\underset{(33)}{2\xi - \varphi'})$$

$$+ \left(\begin{array}{c} - \frac{3}{8} m^2 - \frac{39}{16} m^3 - \frac{39}{32} m^4 + \frac{1065}{32} m^5 + \frac{479949}{2048} m^6 \\ + \frac{13170899}{12288} m^7 \end{array} \right) e' \cos (\underset{(34)}{2\xi + \varphi'})$$

$$+ \left(- \frac{15}{8} m - \frac{159}{32} m^2 - \frac{9027}{512} m^3 - \frac{91749}{2048} m^4 \right) e^2 \cos (\underset{(35)}{2\xi - 2\varphi})$$

$$+ \left(\frac{29}{16} m^2 + \frac{35}{24} m^3 + \frac{4099}{1152} m^4 \right) e^2 \cos (\underset{(36)}{2\xi + 2\varphi})$$

$$+ \left(\begin{array}{c} - \frac{105}{8} m^2 - \frac{1431}{32} m^3 - \frac{23733}{256} m^4 + \frac{120299}{1024} m^5 \\ + \frac{123884873}{49152} m^6 \end{array} \right) ee' \cos (\underset{(37)}{2\xi - \varphi - \varphi'})$$

$$+ \left(\begin{array}{c} \frac{15}{8} m^2 + \frac{111}{32} m^3 - \frac{17223}{256} m^4 - \frac{769131}{1024} m^5 \\ - \frac{86157095}{16384} m^6 \end{array} \right) ee' \cos (\underset{(38)}{2\xi - \varphi + \varphi'})$$

$$+ \left(\frac{35}{8} m^2 + \frac{407}{32} m^3 + \frac{10925}{256} m^4 + \frac{89905}{1024} m^5 \right) ee' \cos (\underset{(39)}{2\xi + \varphi - \varphi'})$$

$$+ \left(- \frac{5}{8} m^2 - \frac{701}{96} m^3 - \frac{43489}{2304} m^4 - \frac{958315}{27648} m^5 \right) ee' \cos (\underset{(40)}{2\xi + \varphi + \varphi'})$$

$$+\left(\frac{51}{8}m^2+\frac{357}{16}m^3+48m^4-\frac{27969}{512}m^5\right)e'^2\cos(2\xi\underset{(41)}{-}2\varphi')$$

$$-\frac{9}{16}m^2e'^2\cos(2\xi\underset{(42)}{+}2\varphi')$$

$$-\left(\frac{15}{8}m+\frac{43}{8}m^2\right)e^3\cos(2\xi\underset{(43)}{-}3\varphi)$$

$$+\frac{81}{32}m^2e^3\cos(2\xi\underset{(44)}{+}3\varphi)$$

$$+\frac{203}{32}m^2e^2e'\cos(2\xi+\underset{(47)}{2\varphi}-\varphi')$$

$$-\frac{29}{32}m^2e^2e'\cos(2\xi+\underset{(48)}{2\varphi}+\varphi')$$

$$+\left(-\frac{255}{8}m^2-\frac{18717}{128}m^3-\frac{426147}{1024}m^4\right)ee'^2\cos(2\xi-\underset{(49)}{\varphi}-2\varphi')$$

$$+\frac{45}{128}m^2ee'^2\cos(2\xi-\underset{(50)}{\varphi}+2\varphi')$$

$$+\frac{85}{8}m^2ee'^2\cos(2\xi+\underset{(51)}{\varphi}-2\varphi')$$

$$-\frac{75}{32}me^4\cos(2\xi\underset{(52)}{-}4\varphi)$$

$$-\frac{35}{8}me^3e'\cos(2\xi-\underset{(53)}{3\varphi}-\varphi')$$

$$+\frac{15}{8}me^3e'\cos(2\xi-\underset{(54)}{3\varphi}+\varphi')$$

$$+\left(\frac{3}{8}m^2+\frac{249}{64}m^3+\frac{5577}{256}m^4+\frac{356351}{3072}m^5+\frac{6398629}{9216}m^6\right)\frac{a}{a'}\cos\underset{(70)}{\xi}$$

$$+\left(\frac{9}{32}m^2+\frac{909}{256}m^3+\frac{9903}{256}m^4\right)\frac{a}{a'}e\cos(\xi\underset{(72)}{+}\varphi)$$

$$+\left(-\frac{57}{16}m^2+\frac{3315}{128}m^3\right)\frac{a}{a'}e'\cos(\xi\underset{(73)}{-}\varphi')$$

$$+\left(\frac{3}{8}m^2-\frac{183}{32}m^3\right)\frac{a}{a'}e'\cos(\xi\underset{(74)}{+}\varphi')$$

$$+\frac{15}{16}m\frac{a}{a'}e^2\cos(\xi-2\varphi)\quad\text{(75)}$$

$$+\left(\frac{5}{8}m^2-\frac{35}{64}m^3-\frac{2863}{384}m^4-\frac{13467}{384}m^5\right)\frac{a}{a'}\cos 3\xi\quad\text{(80)}$$

$$+\left(-\frac{115}{32}m^2-\frac{755}{256}m^3+\frac{20305}{768}m^4\right)\frac{a}{a'}e\cos(3\xi-\varphi)\quad\text{(81)}$$

$$+\frac{85}{64}m^2\frac{a}{a'}e\cos(3\xi+\varphi)\quad\text{(82)}$$

$$+\frac{25}{8}m^2\frac{a}{a'}e'\cos(3\xi-\varphi')\quad\text{(83)}$$

$$+\left(\frac{15}{16}m^2-\frac{6705}{128}m^3\right)\frac{a}{a'}e'\cos(3\xi+\varphi')\quad\text{(84)}$$

$$+\left(\frac{57}{64}m^4+\frac{251}{64}m^5+\frac{1079}{96}m^6\right)\cos 4\xi\quad\text{(86)}$$

$$+\left(\frac{75}{32}m^3+\frac{1029}{128}m^4+\frac{178285}{6144}m^5+\frac{2516709}{24576}m^6\right)e\cos(4\xi-\varphi)\quad\text{(87)}$$

$$+\frac{91}{32}m^3e\cos(4\xi+\varphi)\quad\text{(88)}$$

$$+\left(\frac{399}{64}m^4+\frac{10153}{256}m^5\right)e'\cos(4\xi-\varphi')\quad\text{(89)}$$

$$+\left(-\frac{57}{64}m^4-\frac{2121}{256}m^5\right)e'\cos(4\xi+\varphi')\quad\text{(90)}$$

$$+\left(-\frac{645}{64}m^3-\frac{14807}{256}m^4-\frac{2788961}{12288}m^5\right)e^2\cos(4\xi-2\varphi)\quad\text{(91)}$$

$$+\frac{1145}{64}m^4e^2\cos(4\xi+2\varphi)\quad\text{(92)}$$

$$+\left(\frac{875}{64}m^3+\frac{1529}{24}m^4+\frac{8301653}{36864}m^5\right)ee'\cos(4\xi-\varphi-\varphi')\quad\text{(93)}$$

$$+\left(-\frac{225}{64}m^3-\frac{1769}{128}m^4+\frac{205053}{4096}m^5\right)ee'\cos(4\xi-\varphi+\varphi')\quad\text{(94)}$$

$$-\frac{225}{64}m^3e^3\cos(4\xi-3\varphi)\quad\text{(95)}$$

$$+\frac{6275}{128}m^2e^2e'\cos(4\xi-\underset{(98)}{\varphi}-2\varphi')$$

$$-\frac{75}{128}m^2e^2e'\cos(4\xi-\underset{(99)}{\varphi}+2\varphi')$$

$$+\frac{1067}{1024}m^4\cos\underset{(102)}{6\xi}$$

$$+\frac{1365}{256}m^4e\cos(\underset{(103)}{6\xi-\varphi})$$

$$+\frac{6525}{1024}m^4e^2\cos(\underset{(104)}{6\xi-2\varphi}).$$

29. Cela posé, v représentant la longitude vraie de la Lune, et t sa longitude moyenne, n° 13, faisons :

$$
\begin{aligned}
v = t + \varepsilon &+ b_1\, e \sin\varphi \\
&+ b_2\, e^2 \sin 2\varphi \\
&+ b_3\, e^3 \sin 3\varphi \\
&+ b_4\, e^4 \sin 4\varphi \\
&+ b_5\, e^5 \sin 5\varphi \\
&+ b_6\, e' \sin\varphi' \\
&+ b_7\, e'^2 \sin 2\varphi' \\
&+ b_8\, ee' \sin(\varphi-\varphi') \\
&+ b_9\, ee' \sin(\varphi+\varphi') \\
&+ b_{10}e^2 e' \sin(2\varphi-\varphi') \\
&+ b_{11}e^2 e' \sin(2\varphi+\varphi') \\
&+ b_{12}ee'^2 \sin(\varphi-2\varphi') \\
&+ b_{13}ee'^2 \sin(\varphi+2\varphi') \\
&+ b_{14}e^2 e'^2 \sin(2\varphi-2\varphi') \\
&+ b_{15}e^2 e'^2 \sin(2\varphi+2\varphi') \\
&+ b_{16}e^3 e' \sin(3\varphi-\varphi') \\
&+ b_{17}e^3 e' \sin(3\varphi+\varphi') \\
&+ b_{20}\sin 2\xi \\
&+ b_{21}e \sin(2\xi-\varphi) \\
&+ b_{22}e \sin(2\xi+\varphi) \\
&+ b_{23}e' \sin(2\xi-\varphi') \\
&+ b_{24}e' \sin(2\xi+\varphi') \\
&+ b_{25}\, e^2 \sin(2\xi-2\varphi) \\
&+ b_{26}\, e^2 \sin(2\xi+2\varphi) \\
&+ b_{27}\, ee' \sin(2\xi-\varphi-\varphi') \\
&+ b_{28}\, ee' \sin(2\xi-\varphi+\varphi')
\end{aligned}
$$

$$+ b_{39}\, ee' \sin(2\xi + \varphi - \varphi')$$
$$+ b_{40}\, ee' \sin(2\xi + \varphi + \varphi')$$
$$+ b_{41}\, e'^2 \sin(2\xi - 2\varphi')$$
$$+ b_{42}\, e'^2 \sin(2\xi + 2\varphi')$$
$$+ b_{43}\, e^3 \sin(2\xi - 3\varphi)$$
$$+ b_{44}\, e^3 \sin(2\xi + 3\varphi)$$
$$+ b_{45}\, e^2\, e' \sin(2\xi - 2\varphi - \varphi')$$
$$+ b_{46}\, e^2\, e' \sin(2\xi - 2\varphi + \varphi')$$
$$+ b_{47}\, e^2\, e' \sin(2\xi + 2\varphi - \varphi')$$
$$+ b_{48}\, e^2\, e' \sin(2\xi + 2\varphi + \varphi')$$
$$+ b_{49}\, ee'^2 \sin(2\xi - \varphi - 2\varphi')$$
$$+ b_{50}\, ee'^2 \sin(2\xi - \varphi + 2\varphi')$$
$$+ b_{51}\, ee'^2 \sin(2\xi + \varphi - 2\varphi')$$
$$+ b_{52}\, e^4 \sin(2\xi - 4\varphi)$$
$$+ b_{53}\, e^3\, e' \sin(2\xi - 3\varphi - \varphi')$$
$$+ b_{54}\, e^3\, e' \sin(2\xi - 3\varphi + \varphi')$$
$$+ b_{55}\, e^2\, e'^2 \sin(2\xi - 2\varphi - 2\varphi')$$
$$+ b_{56}\, e^2\, e'^2 \sin(2\xi + 2\varphi + 2\varphi')$$
$$+ b_{70}\, \frac{a}{a'} \sin \xi$$
$$+ b_{71}\, \frac{a}{a'}\, e \sin(\xi - \varphi)$$
$$+ b_{72}\, \frac{a}{a'}\, e \sin(\xi + \varphi)$$
$$+ b_{73}\, \frac{a}{a'}\, e' \sin(\xi - \varphi')$$
$$+ b_{74}\, \frac{a}{a'}\, e' \sin(\xi + \varphi')$$
$$+ b_{75}\, \frac{a}{a'}\, e^2 \sin(\xi - 2\varphi)$$
$$+ b_{76}\, \frac{a}{a'}\, e^2 \sin(\xi + 2\varphi)$$
$$+ b_{77}\, \frac{a}{a'}\, ee' \sin(\xi - \varphi - \varphi')$$
$$+ b_{78}\, \frac{a}{a'}\, ee' \sin(\xi - \varphi + \varphi')$$
$$+ b_{79}\, \frac{a}{a'}\, ee' \sin(\xi + \varphi + \varphi')$$
$$+ b_{80}\, \frac{a}{a'} \sin 3\xi$$
$$+ b_{81}\, \frac{a}{a'}\, e \sin(3\xi - \varphi)$$

$$
\begin{aligned}
&+ b_{82}\,\frac{a}{a'}\,e \sin(3\xi + \varphi) \\
&+ b_{83}\,\frac{a}{a'}\,e' \sin(3\xi - \varphi') \\
&+ b_{84}\,\frac{a}{a'}\,e' \sin(3\xi + \varphi') \\
&+ b_{85}\,\frac{a}{a'}\,e^2 \sin(3\xi - 2\varphi) \\
&+ b_{86} \sin 4\xi \\
&+ b_{87}\, e \sin(4\xi - \varphi) \\
&+ b_{88}\, e \sin(4\xi + \varphi) \\
&+ b_{89}\, e' \sin(4\xi - \varphi') \\
&+ b_{90}\, e' \sin(4\xi + \varphi') \\
&+ b_{91}\, e^2 \sin(4\xi - 2\varphi) \\
&+ b_{92}\, e^2 \sin(4\xi + 2\varphi) \\
&+ b_{93}\, ee' \sin(4\xi - \varphi - \varphi') \\
&+ b_{94}\, ee' \sin(4\xi - \varphi + \varphi') \\
&+ b_{95}\, e^3 \sin(4\xi - 3\varphi) \\
&+ b_{96}\, e^2 e' \sin(4\xi - 2\varphi - \varphi') \\
&+ b_{97}\, e^2 e' \sin(4\xi - 2\varphi + \varphi') \\
&+ b_{98}\, ee'^2 \sin(4\xi - \varphi - 2\varphi') \\
&+ b_{99}\, ee'^2 \sin(4\xi - \varphi + 2\varphi') \\
&+ b_{102} \sin 6\xi \\
&+ b_{103}\, e \sin(6\xi - \varphi) \\
&+ b_{104}\, e^2 \sin(6\xi - 2\varphi).
\end{aligned}
$$

En différentiant cette valeur on aura celle de la fonction $\frac{dv}{dt}$ qui entre dans l'équation (15), n° 27. Or cette opération revient à changer, dans l'expression précédente, abstraction faite de la partie non périodique, les *sinus* en *cosinus*, après avoir multiplié chaque terme par le coefficient du temps sous le signe *sinus* dont il est affecté. Ces coefficiens sont évidemment les quantités qui forment les diviseurs des fractions développées n° 18; en y substituant donc pour c sa valeur donnée n° 24, et en y faisant $c'=1$,

on aura leurs expressions développées par rapport aux puissances croissantes de la quantité m.

Si maintenant l'on substitue dans l'équation (15), à la place de $\frac{dv}{dt}$, $\frac{1}{r^2}$ et $\frac{1}{r^2}\left(\int \frac{dR}{dv}dt\right)$, les fonctions que ces quantités représentent, qu'on remplace la constante h par sa valeur donnée n° 23, qu'on égale enfin dans les deux membres les coefficiens des *cosinus* dépendans des mêmes argumens, la comparaison des termes non périodiques donnera d'abord :

$$\begin{aligned}1 = &\left(1 - \frac{m^2}{3} + \frac{11}{144}m^4 - \frac{9}{4}m^5 - \frac{29707}{2592}m^6 - \frac{3899}{108}m^7\right)\\ &\times\left(1 + \frac{m^2}{3} - \frac{103}{144}m^4 - \frac{7}{8}m^5 + \frac{7099}{2592}m^6 + \frac{7715}{432}m^7\right)\\ &+ \frac{3}{4}m^4 + \frac{25}{8}m^5 + \frac{203}{24}m^6 + \frac{2693}{144}m^7,\end{aligned}$$

équation identiquement satisfaite ; ce qui est conforme à la condition que nous nous sommes imposée n° 12.

La comparaison des termes périodiques donnera ensuite les équations suivantes :

$$\begin{aligned}b_1&\left(1 - \frac{3}{4}m^2 - \frac{225}{32}m^3 - \frac{4071}{128}m^4 - \frac{265493}{2048}m^5 - \frac{12822631}{24576}m^6\right)\\ &= \left(1 - \frac{m^2}{3} + \frac{11}{144}m^4 - \frac{9}{4}m^5 - \frac{29707}{2592}m^6\right)\\ &\times\left(2 + \frac{2}{3}m^2 - \frac{525}{64}m^3 - \frac{122969}{2304}m^4 - \frac{1003977}{4096}m^5 - \frac{1248944333}{1327104}m^6\right)\\ &- \frac{225}{32}m^3 - \frac{4775}{128}m^4 - \frac{949607}{6144}m^5 - \frac{4613925}{8192}m^6,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_2&\left(2 - \frac{3}{2}m^2 - \frac{225}{16}m^3 - \frac{4071}{64}m^4 - \frac{265493}{1024}m^5\right)\\ &= \left(1 - \frac{m^2}{3} + \frac{11}{144}m^4 - \frac{9}{4}m^5\right)\\ &\times\left(\frac{5}{2} + \frac{11}{16}m^2 - \frac{1695}{64}m^3 - \frac{418117}{2304}m^4 - \frac{11830669}{12288}m^5\right)\\ &- \frac{915}{64}m^3 - \frac{9559}{128}m^4 - \frac{1420637}{4096}m^5.\end{aligned}$$

$$b_3\left(3-\frac{9}{4}m^2\right)=\left(1-\frac{m^2}{3}\right)\left(\frac{13}{4}+\frac{181}{48}m^2\right),$$

$$4b_4=\frac{103}{24},$$

$$5b_5=\frac{1097}{192},$$

$$\begin{aligned}mb_6=&\left(1-\frac{m^2}{3}+\frac{11}{144}m^4-\frac{9}{4}m^5\right)\\&\times\left(-3m^3+\frac{469}{8}m^4+\frac{1240}{3}m^5+\frac{568599}{288}m^6+\frac{1631009}{216}m^7\right)\\&-\frac{219}{16}m^4-\frac{1177}{12}m^5-\frac{67227}{144}m^6-\frac{3048661}{1728}m^7,\end{aligned}$$

$$2mb_7=\left(1-\frac{m^2}{3}\right)\left(-\frac{9}{2}m^3+\frac{3813}{32}m^4\right)-\frac{1971}{64}m^4,$$

$$\begin{aligned}b_8&\left(1-m-\frac{3}{4}m^2-\frac{225}{32}m^3-\frac{4071}{128}m^4-\frac{265493}{2048}m^5\right)\\&=\left(1-\frac{m^2}{3}+\frac{11}{144}m^4-\frac{9}{4}m^5\right)\\&\times\left(\begin{array}{l}\frac{21}{4}m+\frac{1065}{32}m^2+\frac{3421}{16}m^3+\frac{2607697}{2048}m^4+\frac{35019431}{4608}m^5\\\qquad+\frac{82163936767}{1769472}m^6\end{array}\right)\\&-\frac{1125}{64}m^3-\frac{22503}{128}m^4-\frac{14753213}{12288}m^5-\frac{87397015}{12288}m^6,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_9&\left(1+m-\frac{3}{4}m^2-\frac{225}{32}m^3-\frac{4071}{128}m^4-\frac{265493}{2048}m^5\right)\\&=\left(1-\frac{m^2}{3}+\frac{11}{144}m^4-\frac{9}{4}m^5\right)\\&\times\left(\begin{array}{l}-\frac{21}{4}m-\frac{885}{32}m^2-\frac{6899}{64}m^3-\frac{258183I}{6144}m^4-\frac{66701131}{36864}m^5\\\qquad-\frac{14867969879}{1769472}m^6\end{array}\right)\\&-\frac{825}{64}m^3-\frac{5919}{64}m^4-\frac{5518205}{12288}m^5-\frac{41572511}{24576}m^6,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_{10}\left(2-m-\frac{3}{2}m^2\right)=&\left(1-\frac{m^2}{3}\right)\left(\frac{105}{8}m+\frac{5661}{64}m^2+\frac{135063}{256}m^3\right)\\&-\frac{4575}{128}m^3,\end{aligned}$$

$$b_{11}(2+m)=-\frac{105}{8}m-\frac{4089}{64}m^2,$$

$$b_{12}\left(1-2m-\frac{3}{4}m^2\right)=\left(1-\frac{m^2}{3}\right)\left(\frac{63}{16}m+\frac{4347}{128}m^2+\frac{18231}{64}m^3\right)$$
$$-\frac{3825}{128}m^2,$$

$$b_{13}\left(1+2m-\frac{3}{4}m^2\right)=\left(1-\frac{m^2}{3}\right)\left(-\frac{63}{16}m-\frac{2253}{128}m^2-\frac{9529}{256}m^3\right)$$
$$-\frac{2775}{128}m^2,$$

$$2b_{14}=\frac{315}{32}m,$$

$$2b_{15}=-\frac{315}{32}m,$$

$$3b_{16}=\frac{819}{32}m,$$

$$3b_{17}=-\frac{819}{32}m,$$

$$b_{20}(2-2m)=\left(1-\frac{m^2}{3}+\frac{11}{144}m^4-\frac{9}{4}m^5-\frac{29707}{2592}m^6\right)$$
$$\times\left(\begin{array}{l}2m^2+\frac{19}{3}m^3+\frac{134}{9}m^4+\frac{1589}{54}m^5+\frac{531901}{10368}m^6+\frac{24765437}{311040}m^7\\ \quad+\frac{116820941}{1166400}m^8\end{array}\right)$$
$$+\frac{3}{4}m^2+\frac{3}{4}m^3+\frac{3}{4}m^4+\frac{3}{4}m^5+\frac{777}{1024}m^6-\frac{583}{1024}m^7-\frac{35411}{3072}m^8,$$

$$b_{21}\left(1-2m+\frac{3}{4}m^2+\frac{225}{32}m^3+\frac{4071}{128}m^4+\frac{265493}{2048}m^5\right)$$
$$=\left(1-\frac{m^2}{3}+\frac{11}{144}m^4-\frac{9}{4}m^5\right)$$
$$\times\left(\begin{array}{l}\frac{15}{4}m+\frac{203}{16}m^2+\frac{34585}{768}m^3+\frac{1309055}{9216}m^4+\frac{1008890045}{221184}m^5\\ \quad+\frac{4540599289}{2654208}m^6\end{array}\right)$$
$$-\frac{15}{4}m^2-\frac{33}{4}m^3-\frac{129}{8}m^4-\frac{1845}{256}m^5+\frac{5901}{48}m^6,$$

$$b_{22}\left(3-2m-\frac{3}{4}m^2-\frac{225}{32}m^3-\frac{4071}{128}m^4\right)=\left(1-\frac{m^2}{3}+\frac{11}{144}m^4\right)$$
$$\times\left(\frac{41}{8}m^2+\frac{379}{24}m^3+\frac{22375}{576}m^4+\frac{112565}{1728}m^5-\frac{732721}{41472}m^6\right)$$
$$+\frac{5}{4}m^2+\frac{13}{12}m^3+\frac{133}{72}m^4-\frac{49529}{6912}m^5-\frac{7013455}{82944}m^6,$$

$$b_{33}\,(2-3m)=\left(1-\frac{m^2}{3}+\frac{11}{144}m^4-\frac{9}{4}m^5\right)$$
$$\times\left(7m^2+\frac{157}{4}m^3+\frac{3341}{24}m^4+\frac{16443}{48}m^5+\frac{707529}{2304}m^6-\frac{382799321}{138240}m^7\right)$$
$$+\frac{21}{8}m^2+\frac{99}{16}m^3+\frac{297}{32}m^4-\frac{639}{32}m^5-\frac{1744641}{6144}m^6-\frac{21137839}{12288}m^7,$$

$$b_{34}\,(2-m)=\left(1-\frac{m^2}{3}+\frac{11}{144}m^4-\frac{9}{4}m^5\right)$$
$$\times\left(-m^2-\frac{91}{12}m^3-\frac{1385}{72}m^4+\frac{21089}{432}m^5+\frac{16608713}{20736}m^6+\frac{6433935517}{1244160}m^7\right)$$
$$-\frac{3}{8}m^2-\frac{39}{16}m^3-\frac{39}{32}m^4+\frac{1065}{32}m^5+\frac{479949}{2048}m^6+\frac{13170899}{12288}m^7,$$

$$b_{35}\left(-2m+\frac{3}{2}m^2+\frac{225}{16}m^3\right)$$
$$=\left(1-\frac{m^2}{3}\right)\left(\frac{15}{8}m-\frac{21}{32}m^2-\frac{2061}{512}m^3-\frac{465181}{6144}m^4\right)$$
$$-\frac{15}{8}m-\frac{159}{32}m^2-\frac{9027}{512}m^3-\frac{91749}{2048}m^4,$$

$$b_{36}\left(4-2m-\frac{3}{2}m^2\right)$$
$$=\left(1-\frac{m^2}{3}\right)\left(\frac{161}{16}m^2+\frac{1471}{48}m^3+\frac{458387}{5760}m^4\right)$$
$$+\frac{29}{16}m^2+\frac{35}{24}m^3+\frac{4099}{1152}m^4,$$

$$b_{37}\left(1-3m+\frac{3}{4}m^2+\frac{225}{32}m^3+\frac{4071}{128}m^4+\frac{265493}{2048}m^5\right)$$
$$=\left(1-\frac{m^2}{3}+\frac{11}{144}m^4-\frac{9}{4}m^5\right)$$
$$\times\left(\frac{35}{4}m+\frac{1381}{32}m^2+\frac{53263}{384}m^3+\frac{1149385}{6144}m^4-\frac{93637183}{73728}m^5-\frac{2183228929}{1769472}m^6\right)$$
$$-\frac{105}{8}m^2-\frac{1431}{32}m^3-\frac{23733}{256}m^4+\frac{120299}{1024}m^5+\frac{123884873}{49152}m^6,$$

$$b_{38}\left(1-m+\frac{3}{4}m^2+\frac{225}{32}m^3+\frac{4071}{128}m^4+\frac{265493}{2048}m^5\right)$$
$$=\left(1-\frac{m^2}{3}+\frac{11}{144}m^4-\frac{9}{4}m^5\right)$$
$$\times\left(-\frac{15}{4}m-\frac{113}{32}m^2+\frac{48229}{384}m^3+\frac{27486469}{18432}m^4+\frac{2638871761}{221184}m^5+\frac{44089264769}{5308416}m^6\right)$$
$$+\frac{15}{8}m^2+\frac{111}{32}m^3-\frac{17223}{256}m^4-\frac{769131}{1024}m^5-\frac{86157095}{16384}m^6,$$

$$b_{39}\left(3 - 3m - \frac{3}{4}m^2 - \frac{225}{32}m^3\right)$$
$$= \left(1 - \frac{m^2}{3}\right)\left(\frac{287}{16}m^2 + \frac{7151}{64}m^3 + \frac{751447}{1536}m^4 + \frac{11014471}{6144}m^5\right)$$
$$+ \frac{35}{8}m^2 + \frac{407}{32}m^3 + \frac{10925}{256}m^4 + \frac{89905}{1024}m^5,$$

$$b_{40}\left(3 - m - \frac{3}{4}m^2 - \frac{225}{32}m^3\right)$$
$$= \left(1 - \frac{m^2}{3}\right)\left(-\frac{41}{16}m^2 - \frac{6293}{192}m^3 - \frac{692713}{4608}m^4 - \frac{23367271}{55296}m^5\right)$$
$$- \frac{5}{8}m^2 - \frac{701}{96}m^3 - \frac{43489}{2304}m^4 - \frac{958315}{27648}m^5,$$

$$b_{41}(2 - 4m) = \left(1 - \frac{m^2}{3}\right)\left(17m^2 + \frac{799}{6}m^3 + \frac{5807}{9}m^4 + \frac{4008851}{1728}m^5\right)$$
$$+ \frac{51}{8}m^2 + \frac{357}{16}m^3 + 48m^4 - \frac{27969}{512}m^5,$$

$$2b_{42} = -\frac{3}{2}m^2 - \frac{9}{16}m^2,$$

$$b_{43}(1 + 2m) = \left(\frac{45}{32}m + \frac{6467}{384}m^2\right) + \frac{15}{8}m + \frac{43}{8}m^2,$$

$$5b_{44} = \frac{3409}{192}m^2 + \frac{81}{32}m^2,$$

$$4b_{47} = \frac{1127}{32}m^2 + \frac{203}{32}m^2,$$

$$4b_{48} = -\frac{161}{32}m^2 - \frac{29}{32}m^2,$$

$$b_{49}\left(1 - 4m + \frac{3}{4}m^2 + \frac{225}{32}m^3\right)$$
$$= \left(1 - \frac{m^2}{3}\right)\left(\frac{255}{16}m + \frac{13099}{128}m^2 + \frac{73841}{192}m^3 + \frac{42379669}{73728}m^4\right)$$
$$- \frac{255}{8}m^2 - \frac{18717}{128}m^3 - \frac{426147}{1024}m^4,$$

$$b_{50}\left(1 + \frac{3}{4}m^2\right) = \left(1 - \frac{m^2}{3}\right)\left(-\frac{45}{16}m - \frac{6219}{128}m^2 - \frac{47269}{128}m^3\right) + \frac{45}{128}m^2,$$

$$3b_{51} = \frac{697}{16}m^2 + \frac{85}{8}m^2,$$

$$2b_{52} = -\frac{15}{32}m + \frac{75}{32}m,$$

$$b_{53} = \frac{105}{32}m + \frac{35}{8}m,$$

$$b_{54} = -\frac{45}{32}m - \frac{15}{8}m,$$

$$b_{70}(1-m) = \left(1 - \frac{m^2}{3} + \frac{11}{144}m^4 - \frac{9}{4}m^6\right)$$
$$\times\left(-\frac{15}{8}m - \frac{81}{8}m^2 - \frac{5977}{128}m^3 - \frac{122531}{512}m^4 - \frac{2105303}{1536}m^5 - \frac{608424737}{73728}m^6\right)$$
$$+\frac{3}{8}m^2 + \frac{249}{64}m^3 + \frac{5577}{256}m^4 + \frac{356351}{3072}m^5 + \frac{6398629}{9216}m^6,$$

$$b_{71}\left(2 - m - \frac{3}{4}m^2 - \frac{225}{32}m^3\right)$$
$$= \left(1 - \frac{m^2}{3}\right)\left(-\frac{75}{16}m - \frac{435}{16}m^2 - \frac{64245}{512}m^3 - \frac{1803907}{3072}m^4\right)$$
$$+\frac{9}{32}m^2 + \frac{909}{256}m^3 + \frac{9903}{256}m^4,$$

$$b_{72}(1-2m) = \left(1 - \frac{m^2}{3}\right)\left(\frac{15}{8}m - \frac{937}{32}m^2 - \frac{12631}{768}m^3\right) - \frac{57}{16}m^2 + \frac{3315}{128}m^3,$$

$$b_{74} = \left(1 - \frac{m^2}{3}\right)\left(\frac{5}{2} - \frac{45}{4}m + \frac{6673}{96}m^2 - \frac{84859}{256}m^3\right) + \frac{3}{8}m^2 - \frac{183}{32}m^3,$$

$$b_{75} = -\frac{375}{64}m - \frac{15}{16}m,$$

$$3\,b_{78} = -\frac{585}{64}m,$$

$$2\,b_{79} = \frac{25}{4} - \frac{225}{8}m,$$

$$b_{80}(3-3m) = \left(1 - \frac{m^2}{3}\right)\left(\frac{25}{32}m^2 - \frac{175}{64}m^3 - \frac{14965}{384}m^4 - \frac{1490507}{6144}m^5\right)$$
$$+\frac{5}{8}m^2 - \frac{35}{64}m^3 - \frac{2863}{384}m^4 - \frac{13467}{384}m^5,$$

$$b_{81}\left(2 - 3m + \frac{3}{4}m^2\right) = \left(1 - \frac{m^2}{3}\right)\left(-\frac{2075}{128}m^2 - \frac{65145}{512}m^3 - \frac{17822947}{24576}m^4\right)$$
$$-\frac{115}{32}m^2 - \frac{755}{256}m^3 + \frac{20305}{768}m^4,$$

$$4\,b_{82} = \frac{145}{64}m^2 + \frac{85}{64}m^2,$$

$$3\,b_{83} = \frac{125}{32}m^2 + \frac{25}{8}m^2,$$

$$b_{84}(3 - 2m) = \left(\frac{45}{8}m^2 - \frac{2965}{256}m^3\right) + \frac{15}{16}m^2 - \frac{6705}{128}m^3,$$

$$b_{15} = -\frac{175}{32}m,$$

$$b_{16}(4-4m) = \left(1-\frac{m^2}{3}\right)\left(\frac{9}{4}m^4 + \frac{3497}{240}m^5 + \frac{208169}{3600}m^6\right)$$
$$+\frac{57}{64}m^4 + \frac{251}{64}m^5 + \frac{1079}{96}m^6,$$

$$b_{17}\left(3-4m+\frac{3}{4}m^2+\frac{225}{32}m^3\right)$$
$$= \left(1-\frac{m^2}{3}\right)\left(\frac{615}{64}m^3 + \frac{16965}{256}m^4 + \frac{3928873}{12288}m^5 + \frac{936238263}{737280}m^6\right)$$
$$+\frac{75}{32}m^3 + \frac{1029}{128}m^4 + \frac{178285}{6144}m^5 + \frac{2516709}{24576}m^6,$$

$$5b_{18} = \frac{1181}{128}m^3 + \frac{91}{32}m^3,$$

$$b_{19}(4-5m) = \left(\frac{63}{4}m^4 + \frac{27071}{192}m^5\right) + \frac{399}{64}m^4 + \frac{10153}{256}m^5,$$

$$b_{20}(4-3m) = \left(-\frac{9}{4}m^4 - \frac{7817}{320}m^5\right) - \frac{57}{64}m^4 - \frac{2121}{256}m^5,$$

$$b_{21}\left(2-4m+\frac{3}{2}m^2+\frac{225}{16}m^3\right)$$
$$= \left(1-\frac{m^2}{3}\right)\left(\frac{1125}{128}m^2 + \frac{16575}{256}m^3 + \frac{1439955}{4096}m^4 + \frac{4309009}{2560}m^5\right)$$
$$-\frac{645}{64}m^3 - \frac{14807}{256}m^4 - \frac{2788961}{12288}m^5,$$

$$6b_{22} = \frac{12823}{512}m^4 + \frac{1145}{64}m^4,$$

$$b_{23}\left(3-5m+\frac{3}{4}m^2\right)$$
$$= \left(1-\frac{m^2}{3}\right)\left(\frac{7175}{128}m^3 + \frac{194605}{384}m^4 + \frac{211641857}{73728}m^5\right)$$
$$+\frac{875}{64}m^3 + \frac{1529}{24}m^4 + \frac{8301653}{36864}m^5,$$

$$b_{24}\left(3-3m+\frac{3}{4}m^2\right) = \left(1-\frac{m^2}{3}\right)\left(-\frac{1845}{128}m^3 - \frac{24395}{256}m^4 - \frac{536631}{8192}m^5\right)$$
$$-\frac{225}{64}m^3 - \frac{1769}{128}m^4 + \frac{205053}{4096}m^5,$$

$$b_{25} = \frac{1485}{256}m^2 - \frac{225}{64}m^2,$$

$$2b_{26} = \frac{2625}{64}m^2,$$

$$2\,b_{97} = -\frac{1125}{64}m^2,$$

$$3\,b_{98} = \frac{51455}{256}m^3 + \frac{6275}{128}m^3,$$

$$3\,b_{99} = -\frac{615}{256}m^3 - \frac{75}{128}m^3.$$

$$6\,b_{101} = \frac{331}{128}m^6 + \frac{1067}{1024}m^6,$$

$$5\,b_{102} \doteq \frac{23715}{1024}m^5 + \frac{1365}{256}m^5,$$

$$4\,b_{104} = \frac{47745}{1024}m^4 + \frac{6525}{1024}m^4.$$

30. En multipliant respectivement les seconds membres de ces équations après les avoir développés par l'unité divisée par les coefficients qui multiplient les quantités b_1, b_2, etc., dans le premier membre, on aura les valeurs de ces quantités ; ces facteurs sont précisément ceux que nous avons considérés dans le n° 18, où on les trouvera tout formés. On pourra d'ailleurs, si on le juge plus commode, se contenter de satisfaire aux équations précédentes par le procédé des coefficiens indéterminés, comme nous l'avons fait n° 24. On a trouvé ainsi pour les coefficiens arbitraires introduits dans l'expression de la longitude, n° 29, les valeurs suivantes :

$$b_1 = 2 + \frac{3}{2}m^2 - \frac{75}{64}m^3 - \frac{6659}{256}m^4 - \frac{4884375}{36864}m^5 - \frac{65756819}{147456}m^6,$$

$$b_2 = \frac{5}{4} + \frac{23}{16}m^2 - \frac{1485}{128}m^3 - \frac{5597}{64}m^4 - \frac{12036265}{24576}m^5,$$

$$b_3 = \frac{13}{12} + \frac{41}{24}m^2,$$

$$b_4 = \frac{103}{96},$$

$$b_6 = \frac{1097}{960},$$

$$b_7 = -3m + \frac{735}{16}m^3 + \frac{1261}{4}m^4 + \frac{142817}{96}m^5 + \frac{3257665}{576}m^6,$$

$$b_8 = \frac{21}{4}m + \frac{1233}{32}m^2 + \frac{15165}{64}m^3 + \frac{2844993}{2048}m^4 + \frac{307187071}{36864}m^5 + \frac{91720676239}{1769472}m^6,$$

$$b_9 = -\frac{21}{4}m - \frac{717}{32}m^2 - \frac{3215}{32}m^3 - \frac{2806183}{6144}m^4 - \frac{19962409}{9216}m^5 - \frac{18084760319}{1769472}m^6,$$

$$b_{10} = \frac{105}{16}m + \frac{6081}{128}m^2 + \frac{139475}{512}m^3,$$

$$b_{11} = -\frac{105}{16}m - \frac{3669}{128}m^2,$$

$$b_{12} = \frac{63}{16}m + \frac{5355}{128}m^2 + \frac{43557}{128}m^3,$$

$$b_{13} = -\frac{63}{16}m - \frac{1245}{128}m^2 - \frac{10519}{256}m^3,$$

$$b_{14} = \frac{315}{64}m,$$

$$b_{15} = -\frac{315}{64}m,$$

$$b_{16} = \frac{273}{32}m,$$

$$b_{17} = -\frac{273}{32}m,$$

$$b_{20} = \frac{11}{8}m^2 + \frac{59}{12}m^3 + \frac{893}{72}m^4 + \frac{2855}{108}m^5 + \frac{8304449}{165888}m^6 + \frac{102859909}{1244160}m^7 + \frac{3748175501}{37324800}m^8,$$

$$b_{21} = \frac{15}{4}m + \frac{263}{16}m^2 + \frac{50377}{768}m^3 + \frac{1973903}{9216}m^4 + \frac{127960397}{221184}m^5 + \frac{3464046433}{2654208}m^6,$$

$$b_{22} = \frac{17}{8}m^2 + \frac{169}{24}m^3 + \frac{10495}{576}m^4 + \frac{126001}{3456}m^5 + \frac{1228925}{41472}m^6,$$

$$b_{33} = \frac{77}{16}m^2 + \frac{479}{16}m^3 + \frac{7551}{64}m^4 + \frac{127385}{384}m^5 + \frac{17924309}{36864}m^6 - \frac{872999227}{552960}m^7,$$

$$b_{34} = -\frac{11}{16}m^2 - \frac{257}{48}m^3 - \frac{7337}{576}m^4 + \frac{124223}{3456}m^5 + \frac{178759285}{331776}m^6 + \frac{16839339119}{4976640}m^7,$$

$$b_{35} = \frac{45}{16}m + \frac{53}{4}m^2 + \frac{276049}{3072}m^3 + \frac{8005693}{18432}m^4,$$

$$b_{36} = \frac{95}{32}m^2 + \frac{913}{96}m^3 + \frac{148693}{5760}m^4,$$

$$b_{37} = \frac{35}{4}m + \frac{1801}{32}m^2 + \frac{32429}{128}m^3 + \frac{1507947}{2048}m^4 + \frac{1202189}{8192}m^5 - \frac{26036432933}{1769472}m^6,$$

$$b_{38} = -\frac{15}{4}m - \frac{173}{32}m^2 + \frac{49045}{384}m^3 + \frac{29183005}{18432}m^4 + \frac{2827212637}{221184}m^5 + \frac{470658148655}{5308416}m^6,$$

$$b_{39} = \frac{119}{16}m^2 + \frac{3131}{64}m^3 + \frac{115757}{512}m^4 + \frac{5346351}{6144}m^5.$$

$$b_{40} = -\frac{17}{16}m^2 - \frac{2633}{192}m^3 - \frac{280873}{4608}m^4 - \frac{9677359}{55296}m^5,$$

$$b_{41} = \frac{187}{16}m^2 + \frac{9707}{96}m^3 + \frac{78625}{144}m^4 + \frac{60894013}{27648}m^5,$$

$$b_{42} = -\frac{33}{32}m^3,$$

$$b_{43} = \frac{105}{32}m + \frac{6011}{384}m^2,$$

$$b_{44} = \frac{779}{192}m^2,$$

$$b_{47} = \frac{665}{64}m^2,$$

$$b_{48} = -\frac{95}{64}m^2,$$

$$b_{49} = \frac{255}{16}m + \frac{17179}{128}m^2 + \frac{291049}{384}m^3 + \frac{217024381}{73728}m^4.$$

$$b_{50} = -\frac{45}{16}m - \frac{6219}{128}m^2 - \frac{23417}{64}m^3,$$

$$b_{51} = \frac{289}{16} m^2,$$

$$b_{52} = \frac{15}{16} m,$$

$$b_{53} = \frac{245}{32} m,$$

$$b_{54} = -\frac{105}{32} m,$$

$$b_{70} = -\frac{15}{8} m - \frac{93}{8} m^2 - \frac{6887}{128} m^3 - \frac{137197}{512} m^4 + \frac{4630061}{3072} m^5 - \frac{220740555}{24576} m^6,$$

$$b_{72} = -\frac{75}{32} m - \frac{117}{8} m^2 - \frac{70015}{1024} m^3 - \frac{1951597}{6144} m^4,$$

$$b_{73} = \frac{15}{8} m - \frac{931}{32} m^2 - \frac{37909}{768} m^3,$$

$$b_{74} = \frac{5}{2} - \frac{45}{4} m + \frac{6629}{96} m^2 - \frac{128987}{768} m^3,$$

$$b_{75} = -\frac{435}{64} m,$$

$$b_{76} = -\frac{195}{64} m,$$

$$b_{78} = \frac{25}{8} - \frac{225}{16} m,$$

$$b_{80} = \frac{15}{32} m^2 - \frac{5}{8} m^3 - \frac{259}{16} m^4 - \frac{666249}{6144} m^5,$$

$$b_{81} = -\frac{2535}{256} m^2 - \frac{81865}{1024} m^3 - \frac{7584049}{16384} m^4,$$

$$b_{82} = \frac{115}{128} m^2,$$

$$b_{83} = \frac{75}{32} m^2,$$

$$b_{84} = \frac{35}{16} m^2 - \frac{1405}{256} m^3,$$

$$b_{85} = -\frac{175}{32} m,$$

$$b_{86} = \frac{201}{256} m^4 + \frac{649}{120} m^5 + \frac{647623}{28800} m^6,$$

$$b_{87} = \frac{255}{64} m^3 + \frac{7701}{256} m^4 + \frac{631995}{4096} m^5 + \frac{4710067791}{737280} m^6,$$

$$b_{88} = \frac{309}{128} m^4,$$

$$b_{89} = \frac{1407}{256} m^4 + \frac{19981}{384} m^5,$$

$$b_{90} = -\frac{301}{256} m^4 - \frac{5611}{640} m^5,$$

$$b_{91} = \frac{1125}{256} m^2 + \frac{18495}{512} m^3 + \frac{1755883}{8192} m^4 + \frac{66847963}{61440} m^5,$$

$$b_{92} = \frac{21983}{3072} m^4,$$

$$b_{93} = \frac{2975}{128} m^3 + \frac{43949}{192} m^4 + \frac{103321481}{73728} m^5,$$

$$b_{94} = -\frac{765}{128} m^3 - \frac{10841}{256} m^4 - \frac{363727}{8192} m^5,$$

$$b_{95} = \frac{585}{256} m^2,$$

$$b_{96} = \frac{2625}{128} m^3,$$

$$b_{97} = -\frac{1125}{128} m^2,$$

$$b_{98} = \frac{21335}{256} m^3,$$

$$b_{99} = -\frac{255}{256} m^3.$$

$$b_{101} = \frac{3715}{6144} m^6,$$

$$b_{103} = \frac{5835}{1024} m^5,$$

$$b_{104} = \frac{27135}{2048} m^4.$$

31. Nous avons déterminé, dans ce qui précède, les coefficiens des inégalités dépendantes des deux argumens φ' et $2\xi - 2\varphi$, dans l'expression de la *longitude vraie*, en portant la précision jusqu'aux quantités de l'ordre m^6 pour la première, et jusqu'aux quantités de l'ordre m^4 pour la seconde; mais on verra, quand nous réduirons nos formules en nom-

bres, que le peu de convergence des séries qui expriment les deux coefficiens dont il s'agit, fait que les résultats de cette approximation sont encore trop éloignés de représenter les observations, pour que l'on puisse s'y arrêter. Nous allons donc porter plus loin la précision; mais comme les inégalités dont nous nous occupons sont comprises dans la classe de celles qui ne renferment point le moyen mouvement t de la Lune dans leurs argumens, et qu'elles tombent par conséquent dans le cas d'exception dont nous avons parlé n° 9 (*), pour éviter l'inconvénient qu'offre, relativement à ces inégalités, l'usage de la formule (15), n° 27, nous emploierons à leur détermination une formule particulière, qui abrégera beaucoup le travail que cette recherche exige. Lorsqu'on pousse les approximations aussi loin qu'on le fait aujourd'hui, afin de rapprocher le plus qu'il est possible l'analyse des observations, *il faut varier les formules selon la nature des inégalités*, de manière à atteindre toujours, par la voie la plus directe, le but qu'on se propose; non-seulement on évite ainsi les opérations inutiles, avantage qui n'est pas à dédaigner dans une théorie aussi compliquée, mais encore, ce qui est plus important, on diminue considérablement les chances d'erreurs, presque toujours inséparables des longs calculs.

La formule (B), n° 2, est la plus commode que l'on puisse employer pour le calcul des inégalités in-

---

(*) Page 70.

dépendantes du mouvement moyen de la Lune, toutes les fois que l'on peut négliger le carré de la très petite quantité α par rapport à laquelle on suppose la fonction perturbatrice développée. Cette formule, en supprimant les termes dépendans de la latitude, peut s'écrire ainsi :

$$d.\delta v = \frac{d.(2d.r\delta r - dr\delta r) - dt^2\left[3\int d'.\delta R + 2\delta.r\frac{dR}{dr} - \frac{\delta r}{r}\left(r\frac{dR}{dr}\right)\right]}{r^2 dv},$$

ou bien, en substituant à la place de $r^2 dv$ sa valeur $dt\left[h + \int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt\right]$, tirée de l'équation (15), n° 27,

$$\left.\begin{aligned}\frac{d.\delta v}{dt} = {} & \frac{2d^2.r\delta r - d.(dr\delta r)}{hdt^2} \\ & - \frac{1}{h}\left[3\int d'.\delta R + 2\delta.r\frac{dR}{dr} - \frac{\delta r}{r}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \frac{d.\delta v}{dt}\left[\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt\right]\right.\end{aligned}\right\} (16),$$

la caractéristique δ se rapportant, n° 2, à la très petite quantité α par rapport à laquelle on suppose la fonction perturbatrice développée, et les quantités qui n'en sont point affectées devant être regardées comme indépendantes de cet élément.

On peut observer que la première partie de l'expression précédente étant une différentielle exacte, elle demeure, après l'intégration, du même ordre que dans l'équation différentielle, ce qui facilite sa détermination : on doit remarquer encore que le premier terme $2d^2.r\delta r$ de cette partie de la valeur de $\frac{d.\delta v}{dt}$, étant une différentielle seconde, se trouvera

multiplié par le facteur m^2 dans l'expression différentielle des inégalités du genre de celles que nous considérons, circonstance qui permettra de ne porter l'approximation dans le calcul du rayon vecteur, que jusqu'aux quantités d'un ordre inférieur d'une unité à celui des termes qu'on veut conserver dans l'expression finie de la *longitude*. Enfin, la propriété remarquable dont jouit la fonction $\int d'\text{R}$, de ne renfermer aucun terme de l'ordre m^2 ou m^3 relativement aux inégalités qui sont indépendantes du moyen mouvement de la Lune, n° 9, doit encore servir à simplifier le calcul, et faire préférer, par conséquent, pour la détermination des inégalités de cette espèce, les formules qui dépendent de la fonction $\int d'\text{R}$ à celles qui dépendraient, comme la formule (15), de la fonction $\int\left(\frac{d\text{R}}{dv}\right)dt$.

Appliquons la formule (16) au calcul de l'inégalité de la longitude dépendante de l'argument φ', c'est-à-dire de l'inégalité que les astronomes ont nommée *équation annuelle*, et que son importance commande de déterminer avec une grande précision. Nous supposerons ici que la caractéristique δ se rapporte à l'excentricité de l'orbe solaire, et nous substituerons, pour le rayon vecteur r et pour les quantités entourées de parenthèses dans la formule (16), les parties de leurs valeurs qui sont indépendantes de cette excentricité.

En négligeant l'excentricité de l'orbe lunaire, on a

$$\delta r = -\delta\frac{1}{r} + \left(\delta\frac{1}{r}\right)^2 - \left(\delta\frac{1}{r}\right)^3 + \text{etc.}$$

D'après les valeurs de $\delta \frac{1}{r}$, $\left(\delta \frac{1}{r}\right)^2$, $\left(\delta \frac{1}{r}\right)^3$, n°s 21 et 26, on a conçlu de cette formule

$$\begin{aligned}\delta r = &\left(\frac{3}{2}m^2 - \frac{409}{16}m^4 - \frac{506}{3}m^5 - \frac{73921}{96}m^6\right) e' \cos \varphi' \\ &+ \left(-\frac{7}{2}m^2 - \frac{157}{8}m^3 - \frac{3365}{48}m^4 - \frac{16185}{96}m^5\right) e' \cos (2\xi - \varphi') \\ &+ \left(\frac{m^2}{2} + \frac{91}{24}m^3 + \frac{1025}{144}u^4 - \frac{28883}{864}m^5\right) e' \cos (2\xi + \varphi').\end{aligned}$$

On a d'ailleurs, n° 23,

$$r = 1 - \frac{m^2}{6} + \frac{331}{288}m^4 - \left(m^2 + \frac{19}{6}m^3 + \frac{125}{18}m^4 + \frac{709}{24}m^5\right) \cos 2\xi;$$

d'où il est aisé de conclure

$$r\delta r = \left(\frac{3}{2}m^2 - \frac{389}{16}m^4 - 156\, m^5 - \frac{44611}{64}m^6\right) e' \cos \varphi',$$

$$\frac{dr\,\delta r}{dt} = \left(-4\,m^4 - \frac{385}{12}m^5 - \frac{10301}{72}m^6 - \frac{179575}{432}m^7\right) e' \sin \varphi',$$

et par suite

$$\frac{2\,d^2.\,r\delta r}{dt^2} = \left(-3\,m^4 + \frac{389}{8}m^6 + 312\, m^7 + \frac{44611}{32}m^8\right) e' \cos \varphi',$$

$$\frac{d.(dr\,\delta r)}{dt^2} = \left(-4\,m^5 - \frac{385}{12}m^6 - \frac{10301}{72}m^7 - \frac{179575}{432}m^8\right) e' \cos \varphi'.$$

En retranchant l'une de l'autre ces deux expressions, on trouve

$$\begin{aligned}&\frac{2\,d^2.r\delta r - d.(dr\,\delta r)}{dt^2} \\ &= \left(-3m^4 + 4m^5 + \frac{1937}{24}m^6 + \frac{32765}{72}m^7 + \frac{1563647}{864}m^8\right) e' \cos \varphi'.\end{aligned}$$

En portant l'approximation jusqu'aux quantités de

l'ordre m^8 dans le développement de la fonction R, j'ai trouvé

$$R = \left(\begin{array}{l} \frac{3}{4}m^3 - \frac{163}{16}m^4 - \frac{97}{2}m^5 - \frac{69561}{384}m^6 - \frac{42175}{72}m^7 \\ - \frac{42244531}{27648}m^8 \end{array} \right) e' \cos \varphi'. \quad (b)$$

On a d'ailleurs, n° 17,

$$\frac{dR}{dv} = \left(\frac{291}{16}m^5 + \frac{1477}{12}m^6 + \frac{160515}{288}m^7 + \frac{3507895}{1728}m^8 \right) e' \sin \varphi',$$

et par suite

$$m\int \left(\frac{dR}{dv}\right) dt = \left(-\frac{291}{16}m^4 - \frac{1477}{12}m^5 - \frac{160515}{288}m^6 - \frac{3507895}{1728}m^7 \right) e' \cos \varphi'.$$

La fonction $\frac{dR}{dv'}$ ne contenant aucun terme constant, on peut supposer simplement, n° 19,

$$-\int d''R = m\int \left(\frac{dR}{dv}\right) dt - m\int \left(r'\frac{dR}{dr'}\right) e' \sin \varphi', \quad (17)$$

équation dans laquelle il faudra substituer pour $r'\frac{dR}{dr'}$ la partie non périodique de son développement. Or on a généralement $r'\frac{dR}{dr'} = -3R$; en n'ayant donc égard, dans la valeur de R, n° 16, qu'au terme constant, on aura

$$r'\frac{dR}{dr'} = -\frac{3}{4}m^3 + \frac{179}{32}m^4 + \frac{291}{16}m^5 + \frac{7681}{192}m^6 + \frac{7103}{96}m^7 + \frac{14028053}{110592}m^8,$$

d'où l'on conclura

$$m\int \left(r'\frac{dR}{dr'}\right) e' \sin \varphi' = \left(\begin{array}{l} \frac{3}{4}m^3 - \frac{179}{32}m^4 - \frac{291}{16}m^5 - \frac{7681}{192}m^6 \\ - \frac{7103}{96}m^7 - \frac{14028053}{110592}m^8 \end{array} \right) e' \cos \varphi'.$$

En substituant cette valeur et celle de $m\int\left(\frac{d\mathrm{R}}{dv}\right)dt$ dans l'équation (17), on trouve

$$-\int d''\mathrm{R}=\left(-\frac{3}{4}m^3+\frac{179}{32}m^4-\frac{15951}{192}m^6-\frac{69603}{144}m^7-\frac{210477227}{110592}m^8\right)e'\cos\varphi'.$$

On a d'ailleurs, n° 14,

$$\int d'\mathrm{R}=\mathrm{R}-\int d''\mathrm{R}.$$

En ajoutant donc la valeur précédente à celle de R donnée plus haut, on trouve

$$\int d'\mathrm{R}=\left(\begin{array}{c}-\frac{147}{32}m^4-\frac{97}{2}m^5-\frac{101463}{384}m^6-\frac{153953}{144}m^7\\ -\frac{379455351}{110592}m^8\end{array}\right)e'\cos\varphi'. \quad (a)$$

On voit que les termes de l'ordre m^2 et m^3 ont disparu de cette valeur; ce qui est conforme au théorème énoncé n° 9.

En faisant abstraction des termes dépendans de la parallaxe solaire, on a $r\frac{d\mathrm{R}}{dr}=2\mathrm{R}$; en vertu de la valeur de R, n° 16, on aura donc

$$\begin{aligned} r\frac{d\mathrm{R}}{dr}=&\frac{m^2}{2}-\frac{179}{48}m^4-\frac{97}{8}m^5-\frac{7681}{288}m^6\\ &+\left(\frac{3}{2}m^2-\frac{3}{2}m^4-\frac{19}{6}m^5-\frac{15017}{4608}m^6\right)\cos 2\xi\\ &+\frac{9}{16}m^4\cos 4\xi. \end{aligned}$$

La fonction δr contient les termes

$$\delta r=-\frac{511}{256}m^4e'\cos(4\xi-\varphi')+\frac{73}{256}m^4e'\cos(4\xi+\varphi').$$

En ajoutant ces termes à la valeur de δr rapportée plus haut, et en combinant l'expression résultante avec celle de la fonction $\frac{1}{r}$, n° 26, bornée aux termes

suivans :

$$\frac{1}{r}=1+\frac{m^2}{6}-\frac{179}{288}m^4+\left(m^2+\frac{19}{6}m^3+\frac{131}{18}m^4\right)\cos 2\xi+\frac{7}{8}m^4\cos 4\xi,$$

j'ai trouvé

$$\begin{aligned}\frac{\delta r}{r}=&\left(\frac{3}{2}m^2-\frac{429}{16}m^4-\frac{544}{3}m^5-\frac{161795}{192}m^6\right)e'\cos\varphi'\\ &-\left(\frac{7}{2}m^2+\frac{157}{8}m^3+\frac{1119}{16}m^4+\frac{16271}{96}m^5+\frac{521977}{4608}m^6\right)e'\cos(2\xi-\varphi')\\ &-\left(-\frac{1}{2}m^2-\frac{91}{24}m^3-\frac{1145}{144}m^4+\frac{26285}{864}m^5+\frac{15917561}{41472}m^6\right)e'\cos(2\xi+\varphi').\end{aligned}$$

A l'aide de ces valeurs on formera la suivante :

$$-\frac{\delta r}{r}\left(r\frac{dR}{dr}\right)=\left(\begin{matrix}\frac{3}{2}m^4+\frac{95}{8}m^5+\frac{6071}{96}m^6+\frac{69743}{288}m^7\\ +\frac{569189}{864}m^8\end{matrix}\right)e'\cos\varphi'. \qquad (c)$$

La valeur de δv, nº 29, donne, en la différentiant,

$$\begin{aligned}\frac{d.\delta v}{dt}=&(2-3m)\,b_{33}\,e'\cos(2\xi-\varphi')+(2-m)\,b_{34}\,e'\cos(2\xi+\varphi')\\ &+4b_{89}\,e'\cos(4\xi-\varphi')+4b_{90}\,e'\cos(4\xi+\varphi');\end{aligned}$$

d'où, en substituant pour b_{33}, b_{34}, b_{89}, b_{90} leurs valeurs, nº 30, on conclut

$$\begin{aligned}\frac{d.\delta v}{dt}=&\left(\frac{77}{8}m^2+\frac{727}{16}m^3+\frac{4677}{32}m^4+\frac{29713}{96}m^5-\frac{419031}{18432}m^6\right)e'\cos(2\xi-\varphi')\\ &+\left(\begin{matrix}-\frac{11}{8}m^2-\frac{481}{48}m^3-\frac{5795}{288}m^4+\frac{36561}{432}m^5\\ +\frac{172796581}{165888}m^6\end{matrix}\right)e'\cos(2\xi+\varphi')\\ &+\frac{1407}{64}m^4\,e'\cos(4\xi-\varphi')-\frac{201}{64}m^4\,e'\cos(4\xi+\varphi').\end{aligned}$$

On a d'ailleurs, nº 19,

$$\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt=\left(\frac{3}{4}m^2+\frac{3}{4}m^3+\frac{m^4}{2}+\frac{m^5}{2}+\frac{443}{3072}m^6\right)\cos 2\xi+\frac{9}{64}m^4\cos 4\xi.$$

En combinant ces deux expressions, j'ai trouvé

$$\frac{d.\delta v}{dt}\int\left(\frac{d\mathrm{R}}{dv}\right)dt=\left(\begin{array}{c}\frac{99}{32}m^4+\frac{131}{8}m^5+\frac{24041}{384}m^6+\frac{118645}{576}m^7\\+\frac{63277855}{110592}m^8\end{array}\right)e'\cos\varphi'.\ (d)$$

Au moyen des valeurs (a), (b), (c), (d), en observant que $\delta.r\frac{d\mathrm{R}}{dr}=2\delta\mathrm{R}$, on formera la suivante :

$$3\int d'.\delta\mathrm{R}+2\delta.r\frac{d\mathrm{R}}{dr}-\frac{\delta r}{r}\left(r\frac{d\mathrm{R}}{dr}\right)+\frac{d.\delta v}{dt}\left[\int\left(\frac{d\mathrm{R}}{dv}\right)dt\right]$$
$$=\left(\begin{array}{c}3m^2-\frac{799}{16}m^4-\frac{1245}{4}m^5-\frac{133577}{96}m^6\\-\frac{2938705}{576}m^7-\frac{839072251}{55296}m^8\end{array}\right)e'\cos\varphi'.$$

En substituant cette valeur et celle de la fonction $\frac{2d^2.r\delta r-d.(dr\delta r)}{dt^2}$ dans la formule (16), on trouve

$$\frac{d.\delta v}{dt}=\frac{1}{h}\left(\begin{array}{c}-3m^2+\frac{751}{16}m^4+\frac{1261}{4}m^5+\frac{141325}{96}m^6+\frac{3201025}{576}m^7\\+\frac{939145659}{55296}m^8\end{array}\right)e'\cos\varphi'.$$

La valeur de la constante h, n° 23, donne

$$\frac{1}{h}=1+\frac{m^2}{3}+\frac{5}{144}m^4+\frac{9}{4}m^5+\frac{29671}{2592}m^6.$$

On a d'ailleurs, n° 29, $\delta v=b_6\,e'\sin\varphi'$, et en différentiant, $\frac{d.\delta v}{dt}=mb_6\,e'\cos\varphi'$; en substituant ces valeurs dans l'équation précédente, on trouvera enfin

$$b_6=-3m+\frac{735}{16}m^3+\frac{1261}{4}m^4+\frac{142817}{96}m^5+\frac{3257665}{576}m^6+\frac{964471235}{55296}m^7.$$

Les cinq premiers termes de cette valeur s'accor-

dent avec ceux que nous avons déterminés n° 30, en employant la formule générale (15), n° 27; ce qui peut servir de vérification à nos calculs.

32. Calculons, par la même formule (16), les coefficiens des deux inégalités dépendantes des angles $2\xi - 2\varphi - \varphi'$, $2\xi - 2\varphi + \varphi'$, qui, de même que la précédente, ne renferment pas le moyen mouvement t de la Lune dans leurs argumens, et sont comprises comme elle, par conséquent, dans le cas d'exception, n° 9.

Nous supposerons, comme dans le cas précédent, que la caractéristique δ se rapporte à l'excentricité e' de l'orbe solaire et aux quantités qui en dépendent.

En faisant simplement, ce qui suffit ici, $\delta r = -r^2 \delta \frac{1}{r}$, on aura

$$\delta r = -\frac{35}{8} m e e' \cos(2\xi - \varphi - \varphi') + \frac{15}{8} m\, e e' \cos(2\xi - \varphi + \varphi')$$
$$+ \frac{35}{8} m e^2 e' \cos(2\xi - 2\varphi - \varphi') - \frac{15}{8} m e^2 e' \cos(2\varphi - 2\xi + \varphi').$$

On a d'ailleurs

$$r = 1 - e \cos\varphi - \frac{e^2}{2} \cos 2\varphi - \frac{15}{8} m e \cos(2\xi - \varphi),$$

d'où l'on conclut

$$r\delta r = \left(\frac{35}{8} + \frac{35}{16} = \frac{105}{16}\right) m\, e^2\, e' \cos(2\xi - 2\varphi - \varphi')$$
$$+ \left(-\frac{15}{8} - \frac{15}{16} = -\frac{45}{16}\right) m\, e^2\, e' \cos(2\xi - 2\varphi + \varphi'),$$

et par suite

$$\frac{2d.r\delta r}{dt} = \frac{315}{8} m^2\, e^2\, e' \sin(2\xi - 2\varphi - \varphi')$$
$$- \frac{45}{8} m^2\, e^2\, e' \sin(2\xi - 2\varphi + \varphi');$$

on tire encore des valeurs précédentes

$$\frac{dr\,\delta r}{dt} = \left(\frac{35}{16}m + \frac{99}{8}m^2\right) e^2 e' \sin(2\xi - 2\varphi - \varphi')$$
$$+ \left(-\frac{15}{16}m - \frac{103}{32}m^2\right) e^2 e' \sin(2\xi - 2\varphi + \varphi').$$

En retranchant ces deux expressions l'une de l'autre, on trouve

$$\frac{2d.r\delta r - dr\delta r}{dt} = \left(-\frac{35}{16}m + 27m^2\right) e^2 e' \sin(2\xi - 2\varphi - \varphi')$$
$$+ \left(\frac{15}{16}m - \frac{77}{32}m^2\right) e^2 e' \sin(2\xi - 2\varphi + \varphi');$$

d'où, en différentiant, on conclut

$$\frac{d.(2d.r\delta r - dr\delta r)}{dt^2} = \left(\frac{105}{16}m^2 - \frac{2697}{32}m^3\right) e^2 e' \cos(2\xi - 2\varphi - \varphi')$$
$$+ \left(-\frac{15}{16}m^2 + \frac{61}{16}m^3\right) e^2 e' \cos(2\xi - 2\varphi + \varphi').$$

Le développement des fonctions R et $\int\left(\frac{dR}{dv}\right) dt$, nos 16 et 18, donne

$$R = \left(\frac{105}{16}m^2 + \frac{75}{64}m^3\right) e^2 e' \cos(2\xi - 2\varphi - \varphi')$$
$$+ \left(-\frac{15}{16}m^2 + \frac{315}{64}m^3\right) e^2 e' \cos(2\xi - 2\varphi + \varphi'),$$

$$m\int\left(\frac{dR}{dv}\right) dt = \left(-\frac{35}{8}m^2 + \frac{5}{8}m^3\right) e^2 e' \cos(2\xi - 2\varphi - \varphi')$$
$$+ \left(\frac{15}{8}m^2 - \frac{45}{8}m^3\right) e^2 e' \cos(2\xi - 2\varphi + \varphi').$$

On peut supposer d'ailleurs, relativement aux inégalités que nous considérons,

$$r'\frac{dR}{dr'} = -3R = \left(-\frac{45}{8}m^2 - \frac{135}{32}m^3\right) e^2 \cos(2\xi - 2\varphi),$$

$$\frac{dR}{dv'} = -\frac{dR}{dv} = \frac{15}{4}m^2 e^2 \sin(2\xi - 2\varphi).$$

On aura donc

$$r'\frac{dR}{dr'}e'\sin\varphi'+2\frac{dR}{dv'}e'\cos\varphi'=\left(\frac{105}{16}m^2+\frac{135}{64}m^3\right)e^2e'\sin(2\xi-2\varphi-\varphi')$$
$$+\left(\frac{15}{16}m^2-\frac{135}{64}m^3\right)e^2e'\sin(2\xi-2\varphi+\varphi').$$

Pour intégrer cette formule, il faudra multiplier dans le second membre, le coefficient correspondant à la première inégalité par $\frac{1}{3m}(1+\frac{1}{2}m)$, et le coefficient correspondant à la seconde par $\frac{1}{m}(1+\frac{3}{2}m)$; on trouvera ainsi

$$-m\int\left(r'\frac{dR}{dr'}e'\sin\varphi'+2\frac{dR}{dv'}e'\cos\varphi'\right)$$
$$=\left(-\frac{35}{16}m^2-\frac{115}{64}m^3\right)e^2e'\cos(2\xi-2\varphi-\varphi')$$
$$+\left(-\frac{15}{16}m^2+\frac{45}{64}m^3\right)e^2e'\cos(2\xi-2\varphi+\varphi');$$

ajoutant cette valeur à celle de $m\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt$ donnée plus haut, on aura, n° 19,

$$-\int d''R=\left(-\frac{105}{16}m^2-\frac{75}{64}m^3\right)e^2e'\cos(2\xi-2\varphi-\varphi')$$
$$+\left(\frac{15}{16}m^2-\frac{315}{64}m^3\right)e^2e'\cos(2\xi-2\varphi+\varphi').$$

On a d'ailleurs, n° 14,

$$\int d'R=R-\int d''R;$$

en substituant pour R et $\int d''R$ leurs valeurs, on trouve

$$\int d'R=\left[\left(\frac{105}{16}-\frac{105}{16}=0\right)m^2+\left(\frac{75}{64}-\frac{75}{64}=0\right)m^3\right]e^2e'\cos(2\xi-2\varphi-\varphi')$$
$$+\left[\left(-\frac{15}{16}+\frac{15}{16}=0\right)m^2+\left(\frac{315}{64}-\frac{315}{64}=0\right)m^3\right]e^2e'\cos(2\xi-2\varphi+\varphi');$$

d'où l'on voit que les termes en m^2 et en m^3 dispa-

raissent de la fonction $\int d'R$ relativement aux inégalités précédentes, dont les argumens sont indépendans du moyen mouvement de la Lune, ce qui est conforme au théorème général énoncé n° 9.

Comme nous n'aurons égard qu'aux quantités de l'ordre m^3 dans l'expression de la longitude, il nous suffira de supposer ici

$$\begin{aligned}
\frac{\delta r}{r} = &- \frac{21}{8} m\, ee' \cos(\varphi - \varphi) + \frac{21}{8} m\, ee' \cos(\varphi + \varphi') \\
&- \frac{63}{16} m e^2 e' \cos(2\varphi - \varphi') + \frac{63}{16} m e^2 e' \cos(2\varphi - \varphi') \\
&- \frac{35}{8} m\, ee' \cos(2\xi - \varphi - \varphi') + \frac{15}{8} m\, ee' \cos(2\xi - \varphi + \varphi') \\
&+ \frac{35}{16} m e^2 e' \cos(2\xi - 2\varphi - \varphi') - \frac{15}{16} m e^2 e' \cos(2\xi - 2\varphi + \varphi'),
\end{aligned}$$

$$-r\frac{dR}{dr} = -\frac{m^2}{2} + m^2 e \cos\varphi - \frac{3}{2} m^2 \cos 2\xi + \frac{9}{2} m^2 e \cos(2\xi - \varphi),$$

$$\begin{aligned}
\frac{d.\delta v}{dt} = &- 3m^2 e' \cos\varphi' + \frac{21}{4} m\, ee' \cos(\varphi - \varphi') - \frac{21}{4} m\, ee' \cos(\varphi + \varphi') \\
&- \frac{105}{8} m\, e^2 e' \cos(2\xi + \varphi') + \frac{105}{8} m\, e^2 e' \cos(2\xi - \varphi') \\
&+ \frac{35}{4} m\, ee' \cos(2\xi - \varphi - \varphi') - \frac{15}{4} m\, ee' \cos(2\xi - \varphi + \varphi'),
\end{aligned}$$

$$\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt = \frac{3}{4} m^2 \cos 2\xi - \frac{9}{2} m^2 e \cos(2\xi - \varphi) - \frac{15}{8} m\, e^2 \cos(2\xi - 2\varphi).$$

En combinant entre elles ces valeurs, on trouve

$$\begin{aligned}
&-\frac{\delta r}{r}\left(r\frac{dR}{dr}\right) \\
&= \left(-\frac{35}{32} - \frac{189}{64} - \frac{35}{16} + \frac{189}{32} = -\frac{21}{64}\right) m^3 e^2 e' \cos(2\xi - 2\varphi - \varphi') \\
&+ \left(\frac{15}{32} + \frac{189}{64} + \frac{15}{16} - \frac{189}{32} = -\frac{99}{64}\right) m^3 e^2 e' \cos(2\xi - 2\varphi + \varphi'),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{d.\delta v}{dt}\left[\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt\right] \\
&= \left(-\frac{315}{64} + \frac{189}{16} + \frac{45}{16} = \frac{621}{64}\right) m^3 e^2 e' \cos(2\xi - 2\varphi - \varphi') \\
&+ \left(\frac{315}{64} - \frac{189}{16} + \frac{45}{16} = -\frac{261}{64}\right) m^3 e^2 e' \cos(2\xi - 2\varphi + \varphi').
\end{aligned}$$

Au moyen des valeurs précédentes, en observant que l'on a $\delta . r\frac{dR}{dr} = 2\delta R$, on formera la suivante :

$$3\int d'.\delta R + 2\delta . r\frac{dR}{dr} - \frac{\delta r}{r}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \frac{d.\delta v}{dt}\left[\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt\right]$$
$$= \left[\frac{105}{4}m^2 + \left(\frac{75}{16} - \frac{21}{64} + \frac{621}{64} = \frac{225}{16}\right)m^3\right]e^2e'\cos(2\xi - 2\varphi - \varphi')$$
$$+ \left[-\frac{15}{4}m^2 + \left(\frac{315}{16} - \frac{99}{64} - \frac{261}{64} = \frac{225}{16}\right)m^3\right]e^2e'\cos(2\xi - 2\varphi + \varphi').$$

En substituant cette valeur et celle de la fonction $\frac{d.(2d.r\delta r - dr\delta r)}{dt^2}$ dans la formule (16), et supposant $h = 1$, on trouve

$$\frac{d.\delta v}{dt} = \left[\begin{matrix}\left(\frac{105}{16} - \frac{105}{4} = -\frac{315}{16}\right)m^2 \\ +\left(-\frac{2697}{32} - \frac{225}{16} = -\frac{3147}{32}\right)m^3\end{matrix}\right]e^2e'\cos(2\xi - 2\varphi - \varphi')$$
$$+ \left[\begin{matrix}\left(-\frac{15}{16} + \frac{15}{4} = \frac{45}{16}\right)m^2 \\ +\left(\frac{61}{16} - \frac{225}{16} = -\frac{41}{4}\right)m^3\end{matrix}\right]e^2e'\cos(2\xi - 2\varphi + \varphi');$$

mais en ne considérant que les deux inégalités dont nous nous occupons, l'expression de la longitude v, nº 29, donne, en la différentiant,

$$\frac{d.\delta v}{dt} = -3m\left(1 - \frac{m}{2}\right)b_{45}\,e^2\,e'\cos(2\xi - 2\varphi - \varphi')$$
$$- m\left(1 - \frac{3}{2}m\right)b_{46}\,e^2\,e'\cos(2\xi - 2\varphi + \varphi').$$

En comparant cette valeur à la précédente, on trouve

$$b_{45} = \frac{105}{16}m + \frac{577}{16}m^2,$$

$$b_{46} = -\frac{45}{16}m + \frac{193}{32}m^2.$$

33. La même formule (16) va nous servir à calculer les coefficiens des inégalités dépendantes de la parallaxe solaire qui ont pour argument $\xi - \varphi'$ et $\xi - \varphi - \varphi'$, et qui se trouvent, comme les précédentes, comprises dans le cas d'exception énoncé n° 9. Commençons par la première.

Nous supposerons ici que la caractéristique δ se rapporte aux quantités relatives à la parallaxe solaire, ou qui sont multipliées par le facteur très petit $\frac{a}{a'}$, dans l'expression du rayon vecteur et de la longitude. Comme on néglige le carré de cette parallaxe, on peut faire $\delta r = - r^2 \delta \frac{1}{r}$, et par suite

$$r\delta r = - r^3 \delta \frac{1}{r}, \quad dr\delta r = - r^2 dr \delta \frac{1}{r}. \qquad (m)$$

Au moyen de la valeur de $\frac{1}{r}$ obtenue précédemment n°s 15 et 26, on forme aisément la suivante :

$$\begin{aligned} r^2 = 1 &+ \left(-3 + \frac{3}{2}m^2 + \frac{3375}{128}m^3\right) e \cos \varphi \\ &- \left(3m^2 + \frac{19}{6}m^3\right) \cos 2\xi \\ &+ \left(-\frac{45}{8}m - \frac{369}{32}m^2 - \frac{20025}{512}m^3\right) e \cos (2\xi - \varphi) \\ &- \frac{3}{16}m^2 e \cos (2\xi + \varphi); \end{aligned}$$

d'où, en différentiant, on tire

$$\begin{aligned} r^2 dr = &\left(1 - \frac{5}{4}m^2 - \frac{2025}{128}m^3\right) e \sin \varphi + \left(2m^2 + \frac{13}{3}m^3\right) \sin 2\xi \\ &+ \left(\frac{15}{8}m + \frac{3}{32}m^2 + \frac{3459}{512}m^3\right) e \sin(2\xi - \varphi) + \frac{3}{16}m^2 e \sin(2\xi + \varphi). \end{aligned}$$

On a d'ailleurs, par les n^{os} cités,

$$\delta\frac{1}{r}=\left(-\frac{15}{16}m-\frac{51}{16}m^2-\frac{5817}{256}m^3-\frac{117755}{1024}m^4\right)\frac{a}{a'}\cos\xi$$
$$+\left(\frac{45}{16}m^2+\frac{1935}{128}m^3\right)\frac{a}{a'}e\cos(\xi-\varphi)$$
$$+\left(-\frac{15}{8}m-\frac{177}{16}m^2\right)\frac{a}{a'}e\cos(\xi+\varphi)$$
$$+\frac{25}{64}m^2\frac{a}{a'}\cos 3\xi-\frac{475}{64}m^2\frac{a}{a'}\cos(3\xi-\varphi).$$

En combinant ces valeurs, on forme les suivantes :

$$r^2\delta\frac{1}{r}=\left(\frac{45}{32}m+\frac{3339}{256}m^2+\frac{72657}{1024}m^3\right)\frac{a}{a'}e\cos(\xi-\varphi)$$
$$\left(\frac{r^2dr}{dt}\right)\delta\frac{1}{r}=\left(\frac{15}{32}m+\frac{423}{256}m^2+\frac{4209}{1024}m^3+\frac{103979}{16384}m^4\right)\frac{a}{a'}e\sin(\xi-\varphi).$$

En différentiant ces valeurs on en conclut, en vertu des équations (m),

$$2d^2.r\delta r=\left(\frac{45}{16}m^3+\frac{2799}{128}m^4+\frac{33183}{512}m^5\right)dt^2\frac{a}{a'}e\cos(\xi-\varphi),$$

$$d.(dr\delta r)=\left(\frac{15}{32}m^2+\frac{333}{256}m^3-\frac{435}{1024}m^4-\frac{381139}{16384}m^5\right)dt^2\frac{a}{a'}e\cos(\xi-\varphi).$$

En retranchant la seconde valeur de la première, on trouve

$$\frac{2d^2.r\delta r-d.(dr\delta r)}{dt^2}=\left(\begin{array}{c}-\frac{15}{32}m^2+\frac{387}{256}m^3+\frac{22827}{1024}m^4\\+\frac{1442995}{16384}m^5\end{array}\right)\frac{a}{a'}e\cos(\xi-\varphi);\quad(a)$$

le développement des fonctions R et $\frac{dR}{dv}$ a donné, n°s 16 et 17,

$$R=\left(-\frac{15}{16}m^2-\frac{765}{128}m^3-\frac{13137}{512}m^4-\frac{1038333}{8192}m^5\right)\frac{a}{a'}e\cos(\xi-\varphi),$$

$$\frac{dR}{dv}=\left(\frac{15}{16}m^2+\frac{675}{128}m^3+\frac{7551}{512}m^4+\frac{403955}{8192}m^5\right)\frac{a}{a'}e\sin(\xi-\varphi).$$

En multipliant cette dernière valeur par le facteur

$$\frac{m}{1-m-c} = -\left(1+\frac{3}{4}m+\frac{243}{32}m^2+\frac{5475}{128}m^3\right),$$

on aura, n° 18,

$$m\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt = \left(\frac{15}{16}m^2+\frac{765}{128}m^3+\frac{13221}{512}m^4+\frac{1151117}{8192}m^5\right)\frac{a}{a'}e\cos(\xi-\varphi).$$

En substituant cette valeur et celle de R dans la formule

$$\int d'R = R + m\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt,$$

on trouve

$$\int d'R = \left\{\begin{array}{c}\left(-\frac{15}{16}+\frac{15}{16}=0\right)m^2+\left(-\frac{765}{128}+\frac{765}{128}=0\right)m^3 \\ +\left(-\frac{13137}{512}+\frac{13221}{512}=\frac{21}{128}\right)m^4 \\ +\left(-\frac{1038333}{8192}+\frac{1151117}{8192}=\frac{7049}{512}\right)m^5\end{array}\right\}\frac{a}{a'}e\cos(\xi-\varphi). \quad (b)$$

Les termes en m^2 et en m^3 disparaissent de cette expression, ce qui est conforme au théorème général relatif aux inégalités dont les argumens sont indépendans du moyen mouvement t de la Lune.

En calculant séparément les deux fonctions que nous avons désignées par R′ et R″, n° 16, j'ai trouvé

$$R' = \left(-\frac{135}{32}m^3-\frac{6843}{256}m^4-\frac{149371}{1024}m^5\right)\frac{a}{a'}e\cos(\xi-\varphi),$$

$$R'' = \left(-\frac{15}{16}m^2-\frac{225}{128}m^3+\frac{549}{512}m^4+\frac{156635}{8192}m^5\right)\frac{a}{a'}e\cos(\xi-\varphi);$$

d'où, en vertu de l'équation

$$r\frac{dR}{dr} = 2R' + 3R'',$$

j'ai conclu, n° 16,

$$r\frac{d\mathrm{R}}{dr}=\left(-\frac{45}{16}m^2-\frac{1755}{128}m^3-\frac{25725}{512}m^4-\frac{1920031}{8192}m^5\right)\frac{a}{a'}e\cos(\xi-\varphi). \quad (c)$$

En observant que l'équation $r\delta r=-r^3\delta\frac{1}{r}$ donne $\frac{\delta r}{r}=-r\delta\frac{1}{r}$, j'ai trouvé, d'après la valeur de $\delta\frac{1}{r}$, n°s 15 et 26,

$$\begin{aligned}\frac{\delta r}{r}=&\left(\frac{15}{16}m+\frac{81}{16}m^2+\frac{5657}{256}m^3\right)\frac{a}{a'}\cos\xi\\&+\left(-\frac{15}{32}m-\frac{1593}{256}m^2-\frac{17769}{1024}m^3\right)\frac{a}{a'}e\cos(\xi-\varphi)\\&+\left(\frac{45}{32}m+\frac{273}{32}m^2+\frac{39587}{1024}m^3\right)\frac{a}{a'}e\cos(\xi+\varphi)\\&+\left(-\frac{25}{64}m^2+\frac{55}{128}m^3\right)\frac{a}{a'}e\cos3\xi\\&+\left(\frac{1725}{256}m^2+\frac{49375}{1024}m^3\right)\frac{a}{a'}e\cos(3\xi-\varphi).\end{aligned}$$

On a, d'ailleurs, n° 16,

$$\begin{aligned}r\frac{d\mathrm{R}}{dr}=&\frac{m^2}{2}-\frac{179}{48}m^4+\left(-m^2-\frac{135}{16}m^3-\frac{5903}{192}m^4\right)e\cos\varphi\\&+\left(\frac{3}{2}m^2-\frac{3}{2}m^4\right)\cos2\xi\\&+\left(-\frac{9}{2}m^2-\frac{15}{8}m^3-\frac{163}{32}m^4\right)e\cos(2\xi-\varphi)\\&+\left(\frac{3}{2}m^2+\frac{19}{16}m^4\right)e\cos(2\xi+\varphi)\\&+\frac{45}{16}m^3e\cos(4\xi-\varphi).\end{aligned}$$

En combinant ces valeurs, on trouvera

$$\frac{\delta r}{r}\left(r\frac{d\mathrm{R}}{dr}\right)=\left(-\frac{225}{128}m^3-\frac{10965}{1024}m^4-\frac{47845}{1024}m^5\right)\frac{a}{a'}e\cos(\xi-\varphi). \quad (d)$$

La valeur de δv, n°s 29 et 30, en la différentiant,

donne

$$\frac{d.\delta v}{dt} = \left(-\frac{15}{8}m - \frac{39}{4}m^2 - \frac{5399}{128}m^3\right)\frac{a}{a'}\cos\xi$$
$$+\left(-\frac{75}{16}m - \frac{861}{32}m^2 - \frac{61627}{512}m^3\right)\frac{a}{a'}\,e\cos(\xi+\varphi)$$
$$+\left(\frac{45}{32}m^2 - \frac{105}{32}m^3\right)\frac{a}{a'}\cos 3\xi$$
$$+\left(-\frac{2535}{128}m^2 - \frac{66655}{512}m^3\right)\frac{a}{a'}\,e\cos(3\xi-\varphi).$$

On a d'ailleurs, nº 18.

$$\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt = \left(-\frac{135}{16}m^3 - \frac{2649}{64}m^4\right)e\cos\varphi + \left(\frac{3}{4}m^2 + \frac{3}{4}m^3 + \frac{m^4}{2}\right)\cos 2\xi$$
$$+\left(-\frac{9}{2}m^2 - 9m^3 - \frac{123}{8}m^4\right)e\cos(2\xi-\varphi)$$
$$+\left(\frac{m^3}{2} + \frac{m^4}{3}\right)e\cos(2\xi+\varphi)$$
$$+\frac{15}{16}m^3\,e\cos(4\xi-\varphi).$$

En combinant ces valeurs on trouvera

$$\frac{d.\delta v}{dt}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt = \left(\frac{315}{128}m^3 + \frac{37627}{1024}m^4 + \frac{246903}{2048}m^5\right)\frac{a}{a'}\,e\cos(\xi-\varphi). \quad (e)$$

En substituant les valeurs (a), (b), (c), (d), (e), dans la formule (16), nº 31, on aura

$$\frac{d.\delta v}{dt} = \frac{1}{h}\left\{\begin{array}{l}\left(-\frac{15}{32} + \frac{45}{8} = \frac{165}{32}\right)m^2 \\ +\left(\frac{387}{256} + \frac{1755}{64} - \frac{225}{128} - \frac{315}{128} = \frac{6327}{256}\right)m^3 \\ +\left(\begin{array}{l}\frac{22827}{1024} - \frac{63}{128} + \frac{25725}{256} - \frac{10965}{1024} \\ \qquad - \frac{37627}{1024} = \frac{76631}{1024}\end{array}\right)m^4 \\ +\left(\begin{array}{l}\frac{1442995}{16384} - \frac{21147}{512} + \frac{1920031}{4096} \\ \qquad - \frac{47845}{1024} - \frac{246903}{2048} = \frac{5705671}{16384}\end{array}\right)m^5\end{array}\right\}\frac{a}{a'}\,e\cos(\xi-\varphi).$$

On a d'ailleurs, d'après l'expression de la longitude, n° 29, $\frac{d.\delta v}{dt} = (1 - m - c) b_{7,1} \frac{a}{a'} e \cos(\xi - \varphi)$; en comparant ces deux formules et en observant qu'on peut faire ici $\frac{1}{h} = 1 + \frac{m^2}{3}$, et que, d'après la valeur donnée plus haut du facteur $\frac{m}{1-m-c}$, on a

$$\frac{1}{h(1-m-c)} = -\frac{1}{m}\left(1 + \frac{3}{4}m + \frac{761}{96}m^2 + \frac{5507}{128}m^3\right),$$

on trouvera enfin, toute réduction faite,

$$b_{7,1} = -\frac{165}{32}m - \frac{7317}{256}m^2 - \frac{137467}{1024}m^3 - \frac{13469761}{16384}m^4.$$

Déterminons, par un calcul semblable, le coefficient de l'inégalité dépendante de l'angle $\xi - \varphi - \varphi'$.

La caractéristique δ étant toujours supposée se rapporter aux termes multipliés par le très petit coefficient $\frac{a}{a'}$, d'après les résultats obtenus n° 26, soient simplement

$$\delta r = -\frac{15}{16}\frac{a}{a'}e' \cos(\xi - \varphi') - \frac{5}{4}\frac{a}{a'}e' \cos(\xi + \varphi'),$$

$$dr = dt\left[e \sin\varphi + \frac{15}{8} m e \sin(2\xi - \varphi)\right];$$

on en conclura

$$dr\,\delta r = \left(-\frac{5}{8}\cdot\frac{15}{8} + \frac{15}{32} = -\frac{45}{64}\right) m \frac{a}{a'} ee'\,dt \sin(\xi - \varphi - \varphi');$$

d'où, en différentiant,

$$-d.(dr\,\delta r) = -\frac{45}{32} m^2 \frac{a}{a'} ee'\,dt^2 \cos(\xi - \varphi - \varphi').$$

Le terme $2d^2.r\delta r$ de la formule (16) ne donne aucun terme de l'ordre m^2; on peut donc ici en faire abstraction.

D'après la valeur de $\frac{1}{r}$, nos 15 et 26, on peut supposer encore

$$\delta r = -\frac{5}{4}\frac{a}{a'}e'\cos(\xi+\varphi') - \frac{5}{4}\frac{a}{a'}ee'\cos(\xi+\varphi+\varphi').$$

On a d'ailleurs, par les formules du mouvement dans l'ellipse, $\frac{1}{r} = 1 + e\cos\varphi$; en combinant ces valeurs on trouve

$$\frac{\delta r}{r} = -\frac{5}{4}\frac{a}{a'}e'\cos(\xi+\varphi') - \frac{15}{8}\frac{a}{a'}ee'\cos(\xi+\varphi+\varphi').$$

En vertu du n° 16, on a

$$r\frac{dR}{dr} = 2R = \frac{3}{2}m^2\cos 2\xi - \frac{9}{2}m^2\, e\cos(2\xi-\varphi);$$

d'où l'on conclut

$$\frac{\delta r}{r}\left(r\frac{dR}{dr}\right) = \left(-\frac{45}{32}+\frac{45}{16}=\frac{45}{32}\right)m^2\frac{a}{a'}ee'\cos(\xi-\varphi-\varphi').$$

La valeur de v, nos 29 et 30, donne en la différentiant les termes suivans :

$$\frac{d.\delta v}{dt} = \frac{5}{2}\frac{a}{a'}e'\cos(\xi+\varphi') + \frac{25}{4}\frac{a}{a'}ee'\cos(\xi+\varphi+\varphi').$$

On a d'ailleurs, n° 18,

$$\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt = \frac{3}{4}m^2\cos 2\xi - \frac{9}{2}m^2\, e\cos(2\xi-\varphi);$$

d'où l'on tire

$$\frac{d.\delta v}{dt}\left[\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt\right] = \left(\frac{75}{32}-\frac{45}{8}=-\frac{105}{32}\right)m^2\frac{a}{a'}ee'\cos(\xi-\varphi-\varphi').$$

D'après la valeur de $r\frac{d\text{R}}{dr}$, nº 16, on a

$$2r\frac{d\text{R}}{dr}=\frac{15}{8}m^2\cdot\frac{a}{a'}ee'\cos(\xi-\varphi-\varphi').$$

Enfin la fonction $\int d'\text{R}$ ne renferme aucun terme de l'ordre m^2 relativement à l'inégalité que nous considérons, d'après le théorème général énoncé nº 9, qui comprend toutes les inégalités indépendantes du moyen mouvement de la Lune.

En substituant donc dans la formule (16) les valeurs précédentes, et supposant, ce qui suffit ici, $h=1$, on aura

$$\frac{d.\delta v}{dt}=\left(-\frac{45}{32}+\frac{45}{32}+\frac{105}{32}-\frac{15}{8}=\frac{45}{32}\right)m^2\frac{a}{a'}ee'\cos(\xi-\varphi-\varphi').$$

On a d'ailleurs, d'après l'expression de v, nº 29, $\frac{d.\delta v}{dt}=-2mb_{11}\frac{a}{a'}ee'\cos(\xi-\varphi-\varphi')$; en comparant ces deux valeurs, on trouve

$$b_{11}=-\frac{45}{64}m.$$

34. Passons au calcul des inégalités dépendantes des deux angles $2\varphi'$ et $2\xi-2\varphi$. Ces inégalités, lorsqu'on y substitue pour $2\varphi'$ et $2\xi-2\varphi$ leurs valeurs, ne renferment pas dans leurs argumens le moyen mouvement de la Lune, elles tombent donc dans le même cas d'exception que les précédentes. Mais il n'est plus possible d'employer à leur détermination la formule (16), nº 31, parce que cette formule suppose qu'on peut n'avoir égard qu'à la première puissance de la très petite quantité à laquelle se rapporte la

caractéristique δ, tandis que dans les calculs dont nous allons nous occuper, on doit tenir compte du carré de cette quantité.

Il faut alors, lorsqu'on veut éviter l'emploi de la formule (15), n° 27, pour la détermination de la longitude, recourir aux formules primitives (3), n° 1, qui s'appliquent à toutes les puissances des excentricités et de l'inclinaison de l'orbe lunaire sur l'écliptique.

La première des équations (3), n° 1, en négligeant les termes dépendans de la latitude, devient

$$\frac{r^2dv^2}{dt^2}+\frac{dr^2}{dt^2}-\frac{2}{r}+1=2\int d'\text{R}.$$

On a d'ailleurs, par la formule (15), n° 27,

$$\left(\frac{rdv}{dt}-\frac{h}{r}\right)^2=\frac{1}{r^2}\left[\int\left(\frac{d\text{R}}{dv}\right)dt\right]^2.$$

En éliminant $\frac{r^2dv^2}{dt^2}$ entre ces deux équations, et omettant le terme tout constant qui nous est inutile, on trouve

$$\frac{dv}{dt}=\frac{1}{h}\left\{\frac{h^2}{2r^2}+\frac{1}{r}-\frac{dr^2}{2dt^2}+\int d'\text{R}-\frac{1}{2r^2}\left[\int\left(\frac{d\text{R}}{dv}\right)dt\right]^2\right\}. \quad (17)$$

Cette formule, qui ne renferme que le carré de la fonction $\int\left(\frac{d\text{R}}{dv}\right)dt$, n'est pas sujette aux inconvéniens de la formule (15), et c'est celle que nous emploierons dans les recherches suivantes.

Considérons d'abord l'inégalité qui dépend de l'angle $2\varphi'$ ou du double de l'argument de l'équation annuelle. Comme nous pouvons négliger ici l'excen-

tricité de l'orbe lunaire, il nous suffira de supposer $r = 1 - \delta\frac{1}{r}$, et, en se bornant aux termes qui nous seront utiles, on aura ainsi, n°s 15 et 26,

$$r = -\left(m^2 + \frac{19}{6}m^3\right)\cos 2\xi - \left(\frac{7}{2}m^2 + \frac{157}{8}m^3\right)e'\cos(2\xi - \varphi')$$
$$+\left(\frac{m^2}{2} + \frac{91}{24}m^3\right)e'\cos(2\xi + \varphi') - \left(\frac{17}{2}m^2 + \frac{799}{12}m^3\right)e'^2\cos(2\xi - 2\varphi')$$
$$+\frac{3}{4}m^2 e'^2\cos(2\xi + 2\varphi').$$

Si l'on élève au carré la différentielle de cette quantité, en n'ayant égard qu'aux termes dépendans de l'angle $2\varphi'$, on trouvera

$$\frac{dr^2}{dt^2} = \left(27\,m^4 + \frac{572}{3}m^5\right)\,e'^2\cos 2\varphi'.$$

D'après la valeur de $\frac{1}{r}$, numéros cités, et la valeur de $\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2$, n° 21, on a d'ailleurs,

$$\delta\frac{1}{r} = \left(-\frac{9}{4}m^2 + \frac{3585}{64}m^4 + \frac{1067}{2}m^5\right)e'^2\cos 2\varphi',$$
$$\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2 = \left(\frac{57}{8}m^4 + \frac{209}{3}m^5\right)e'^2\cos 2\varphi';$$

en substituant ces valeurs dans l'équation

$$\frac{1}{r^2} = 2\,\delta\frac{1}{r} + \left(\delta\frac{1}{r}\right)^2,$$

on en conclut:

$$\frac{1}{r^2} = \left(-\frac{9}{2}m^2 + \frac{3813}{32}m^4 + \frac{3410}{3}m^5\right)e'^2\cos 2\varphi'.$$

Il suffit de supposer ici $h = 1 - \frac{m^2}{3}$, et par suite

$h^2 = 1 - \frac{2}{3}m^2$, ce qui donne

$$\frac{h^2}{r^2} = \left(-\frac{9}{2}m^2 + \frac{3909}{32}m^4 + \frac{3410}{3}m^5\right) e'^2 \cos 2\varphi.$$

Nous avons trouvé, nº 14, $\int d'\text{R} = \text{R} - \int d''\text{R}$; d'où il est facile de conclure, d'après les valeurs de R et de $\int d''\text{R}$, nºs 15 et 19,

$$\int d'\text{R} = \left[\begin{array}{l}\left(\frac{9}{8} - \frac{9}{8} = 0\right)m^2 + \left(-\frac{1419}{64} + \frac{1515}{128} = -\frac{1323}{128}\right)m^4 \\ -\frac{1067}{8}m^5\end{array}\right] e'^2 \cos 2\varphi';$$

expression dans laquelle il n'existe point de termes de l'ordre m^2 ou de l'ordre m^3, conformément au théorème énoncé nº 9, relativement aux inégalités qui ne renferment pas le moyen mouvement de la Lune dans leurs argumens.

Enfin, en combinant entre elles les expressions de $-\int\left(\frac{d\text{R}}{dv}\right)dt$ et $\frac{1}{r^2}\int\left(\frac{d\text{R}}{dv}\right)dt$, développées nºs 18 et 28, on trouve

$$\frac{1}{r^2}\left[\int\left(\frac{d\text{R}}{dv}\right)dt\right]^2 = \left(\frac{243}{64}m^4 + \frac{99}{8}m^5\right) e'^2 \cos 2\varphi'.$$

En substituant dans la formule (17) $\delta\frac{1}{r}$ à la place de $\frac{1}{r}$, et ensuite pour $\frac{h^2}{r^2}$, $\delta\frac{1}{r}$, $\frac{dr^2}{dt^2}$, etc., les valeurs précédentes, on aura

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{h}\left\{\begin{array}{l}\left(-\frac{9}{4} - \frac{9}{4} = -\frac{9}{2}\right)m^2 \\ +\left(\frac{3909}{64} + \frac{3585}{64} - \frac{27}{2} - \frac{1323}{128} - \frac{243}{128} = \frac{5647}{64}\right)m^4 \\ +\left(\frac{1705}{3} + \frac{1067}{2} - \frac{286}{3} - \frac{1067}{8} - \frac{99}{16} = \frac{13871}{16}\right)m^5\end{array}\right\} e'^2 \cos 2\varphi'.$$

On peut supposer ici $h = 1 - \frac{m^2}{3}$, et par conséquent $\frac{1}{h} = 1 + \frac{m^2}{3}$; on a d'ailleurs, en n'ayant égard qu'aux termes que nous considérons, $\frac{dv}{dt} = 2mb_7 e'^2 \cos 2\varphi'$; en comparant cette valeur à la précédente, on trouve

$$b_7 = -\frac{9}{4}m + \frac{5751}{128}m^2 + \frac{13871}{32}m^4.$$

35. Calculons par la même formule (17), n° 34, le coefficient de l'inégalité dépendante de l'angle $2\xi - 2\varphi$; c'est, de tous les coefficiens des inégalités lunaires, celui dont la détermination présente peut-être le plus de difficultés, tant à cause du grand nombre de combinaisons qu'il faut considérer dans sa formation, que par l'étendue qu'on est obligé de donner aux approximations, vu le peu de convergence de la série qui l'exprime.

La formule $r = \left(\frac{1}{r_1} + \delta\frac{1}{r}\right)^{-1}$ donne, en la développant,

$$r = r_1 - r_1^2\,\delta\frac{1}{r} + r_1^3\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2 - r_1^4\left(\delta\frac{1}{r}\right)^3 + r_1^5\left(\delta\frac{1}{r}\right)^4 + \text{etc.};$$

d'où, en substituant pour r_1^2, r_1^3, etc., leurs valeurs elliptiques, et pour $\delta\frac{1}{r}$, $\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2$, $\left(\delta\frac{1}{r}\right)^3$, etc., leurs valeurs, nos 15, 26 et 21, j'ai conclu

$$r = \left(-1 + \frac{m^2}{6} + \frac{885}{128}m^3 + \frac{203153}{4608}m^4 + \frac{1654449}{8192}m^5 + \frac{2054236901}{2654208}m^6\right) e\cos\varphi$$
$$+ \left(-\frac{1}{2} - \frac{5}{12}m^2 + \frac{555}{64}m^3 + \frac{127289}{2304}m^4 + \frac{3704825}{12288}m^5\right) e^2\cos 2\varphi$$

$$+\left(-a_{30}+\frac{m^4}{3}+\frac{19}{18}m^5+\frac{529}{432}m^6-\frac{14033}{6480}m^7\right)\cos 2\xi$$

$$+\left(\begin{array}{l} a_{30}-a_{31}+\frac{5}{8}m^3+\frac{155}{96}m^4-\frac{3011}{4608}m^5-\frac{1645069}{55296}m^6 \\ -\frac{123631555 7}{6635520}m^7 \end{array}\right) e\cos(2\xi-\varphi)$$

$$+\left(-\frac{17}{16}m^2-\frac{151}{48}m^3-\frac{8899}{1152}m^4\right) e\cos(2\xi+\varphi)$$

$$+\left(-\frac{19}{16}m^2-\frac{167}{48}m^3\right) e^2\cos(2\xi+2\varphi)$$

$$+\left(-\frac{3}{8}m^4-\frac{1217}{480}m^5\right)\cos 4\xi$$

$$+\left(-\frac{255}{128}m^3-\frac{7629}{512}m^4-\frac{9327797}{122880}m^5\right) e\cos(4\xi-\varphi)$$

$$+\left(-\frac{225}{128}m^2-\frac{3315}{256}m^3-\frac{301959}{4096}m^4-\frac{987347}{5120}m^5\right) e^2\cos(4\xi-2\varphi).$$

Si l'on élève au carré cette quantité après l'avoir différentiée, en ne conservant que les termes dépendans de l'angle $2\xi-2\varphi$, et en ayant soin de substituer à la place de a_{30} et a_{31} leurs valeurs, n° 26, à mesure que ces quantités se présenteront multipliées par les facteurs m^2, m^3, etc., on trouvera, toute réduction faite,

$$\frac{dr^2}{dt^2}=\left(\begin{array}{l} a_{30}+a_{31}-\frac{15}{4}m^2-\frac{101}{8}m^3-\frac{139493}{3072}m^4-\frac{95281}{576}m^5 \\ -\frac{547265839}{884736}m^6-\frac{3479030 1167}{10616832}m^7 \end{array}\right) e^2\cos(2\xi-2\varphi).$$

On a d'ailleurs

$$\frac{1}{r^2}=\frac{2}{r_1}\delta\frac{1}{r}+\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2,$$

en supposant

$$\delta\frac{1}{r}=a_{30}\cos 2\xi+a_{31}\, e\cos(2\xi-\varphi)+a_{32}\, e^2\cos(2\xi-2\varphi),$$

et

$$\frac{1}{r_1}=1+e\cos\varphi+e^2\cos 2\varphi.$$

On en conclut

$$\frac{2}{r_1}\,\delta\frac{1}{r} = (2a_{35} + a_{30} + a_{31})\, e^2 \cos(2\xi - 2\varphi).$$

La valeur de la fonction $\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2$ a été développée n° 21; en ne considérant que le terme de cette valeur dépendant de l'argument $2\xi - 2\varphi$, et l'ajoutant à la quantité qui précède, on trouve

$$\frac{1}{r^2} = \left(\begin{array}{c} 2a_{35} + a_{30} + a_{31} + \frac{5}{16}m^3 - \frac{5675}{1024}m^4 - \frac{181477}{3072}m^5 \\ - \frac{114735145}{294912}m^6 - \frac{11643119759}{5898240}m^7 \end{array}\right) e^2 \cos(2\xi - 2\varphi).$$

On a d'ailleurs, n° 23,

$$h^2 = 1 - \frac{2}{3}m^2 + \frac{19}{72}m^4 - \frac{9}{2}m^5 - \frac{29773}{1296}m^6;$$

d'où, en substituant pour a_{35}, a_{30}, a_{31}, leurs valeurs, n° 26, dans les termes où ces quantités se trouvent multipliées par m^2, m^4, etc., on conclut

$$\frac{h^2}{r^2} = \left(\begin{array}{c} 2a_{35} + a_{30} + a_{31} - \frac{15}{16}m^3 - \frac{5227}{1024}m^4 - \frac{171713}{3072}m^5 \\ - \frac{102388745}{294912}m^6 - \frac{32168495357}{17694720}m^7 \end{array}\right) e^2 \cos(2\xi - 2\varphi).$$

En n'ayant égard qu'à l'inégalité que nous calculons, on a, n° 15,

$$\frac{1}{r} = a_{35}\, e^2 \cos(2\xi - 2\varphi).$$

Des valeurs précédentes il est facile de conclure

$$\frac{h^2}{2r^2} + \frac{1}{r} - \frac{dr^2}{2dt^2} = \left\{\begin{array}{c} 2a_{35} + \frac{15}{8}m^2 + \frac{187}{32}m^3 + \frac{30953}{1536}m^4 \\ + \frac{1009357}{18432}m^5 + \frac{60024901}{442368}m^6 \\ + \frac{19361504941}{26542080}m^7 \end{array}\right\} e^2 \cos(2\xi - 2\varphi);$$

nous avons trouvé, n° 15,

$$a_{11} = \left(-\frac{15}{4} m^2 - \frac{225}{16} m^3 - \frac{18403}{256} m^4 - \frac{240615}{1024} m^5 - \frac{2218 7645}{24576} m^6 - \frac{47818153 7}{294912} \right) e^2 \cos(2\xi - 2\varphi):$$

en substituant cette valeur dans l'expression précédente, on aura

$$\frac{h^2}{2r^2} + \frac{1}{r} - \frac{dr^2}{2dt^2} = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{45}{8} m^2 - \frac{713}{32} m^3 - \frac{189883}{1536} m^4 \\ -\frac{7652783}{18432} m^5 - \frac{738730319}{442368} m^6 \\ -\frac{66711171719}{26542080} m^7 \end{array} \right\} e^2 \cos(2\xi - 2\varphi).$$

Nous pouvons supposer ici, n° 14,

$$\int d'R = R + m \int \left(\frac{dR}{dv} \right) dt,$$

et d'après les valeurs de R et de $\int \left(\frac{dR}{dv} \right) dt$, n°s 16 et 18, en n'ayant égard qu'aux termes dépendans de l'argument $2\xi - 2\varphi$, on trouve

$$\int d'R = \left(\frac{333}{64} m^4 + \frac{16327}{256} m^5 + \frac{17935953}{36864} m^6 + \frac{307289789}{147456} m^7 \right) e^2 \cos(2\xi - 2\varphi).$$

On voit que les termes en m^2 et m^3 ont disparu de cette expression, ce qui est conforme au théorème général énoncé n° 9, relativement aux inégalités qui ne renferment pas le moyen mouvement t de la Lune dans leur argument.

En combinant les valeurs de $-\int \left(\frac{dR}{dv} \right) dt$ et

$\frac{1}{r^2}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt$, données nos 18 et 28, et en ne tenant compte que des termes dépendans de l'angle $2\xi - 2\varphi$, on trouve

$$\frac{1}{r^2}\left[\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt\right]^2 = \left(\frac{5025}{256}m^5 + \frac{157355}{1024}m^6 + \frac{3771967}{49152}m^7\right)e^2\cos(2\xi - 2\varphi);$$

enfin la valeur de v, n° 29, en n'ayant égard qu'au terme qui nous occupe, donne

$$\frac{dv}{dt} = (2 - 2m - 2c)\, b_{22}\, e \cos(2\xi - 2\varphi).$$

Si l'on substitue ces diverses valeurs dans la formule (17), on aura, après les réductions,

$$h(2-2m-2c)\,b_{22} = -\frac{45}{8}m^2 - \frac{713}{32}m^3 - \frac{181891}{1536}m^4 - \frac{6658139}{18432}m^5 - \frac{557487563}{442368}m^6 - \frac{21583320869}{26542080}m^7.$$

D'après les valeurs de h et de $(2 - 2m - 2c)^{-1}$, nos 18 et 23, on trouve

$$\frac{1}{h(2-2m-2c)} = -\frac{1}{2m}\left(1 + \frac{3}{4}m + \frac{761}{96}m^2 + \frac{5507}{128}m^3 + \frac{4451851}{18432}m^4 + \frac{33349727}{24576}m^5\right);$$

en multipliant par ce facteur les deux membres de l'équation précédente, on obtient enfin

$$b_{22} = \frac{45}{16}m + \frac{53}{4}m^2 + \frac{276049}{3072}m^3 + \frac{8005693}{18432}m^4 + \frac{211765213\,1}{884736}m^5 + \frac{15083402581\,1}{13271040}m^6.$$

Les trois premiers termes de cette valeur s'accordent avec ceux que nous avons obtenus par une autre

voie dans le n° 30, ce qui prouve l'exactitude de nos calculs.

36. Calculons encore, de la même manière, le coefficient de l'inégalité dépendante de l'angle $2\xi - 2\varphi - 2\varphi'$.

Dans l'ordre d'approximation auquel nous nous arrêtons, en observant que la fonction $\int d'R$ ne renferme dans l'ordre m^2 et m^3 aucune inégalité du genre de celles que nous considérons n° 9, on peut supposer simplement

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2r^2} + \frac{1}{r} - \frac{dr^2}{2dt^2}. \qquad (18)$$

La formule

$$r = r_1 - r_1^2\, \delta\frac{1}{r} + r_1^3 \left(\delta\frac{1}{r}\right)^2,$$

en substituant pour r_1, r_1^2, r_1^3 leurs valeurs elliptiques, et pour $\left(\delta\frac{1}{r}\right)$, $\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2$ leurs valeurs n°s 26 et 21, donne aisément la suivante :

$$\begin{aligned}
r = 1 &- e\cos\varphi - \frac{e^2}{2}\cos 2\varphi + \frac{21}{8} m\, ee' \cos(\varphi + \varphi') \\
&+ \frac{63}{32} m\, ee'^2 \cos(\varphi + 2\varphi') - \frac{15}{8} m\, e \cos(2\xi - \varphi) \\
&- \frac{35}{8} m\, ee' \cos(2\xi - \varphi - \varphi') - \frac{17}{2} m^2 e'^2 \cos(2\xi - 2\varphi') \\
&- \left(\frac{255}{32} m + \frac{9835}{256} m^2\right) ee'^2 \cos(2\xi - \varphi - 2\varphi');
\end{aligned}$$

d'où, en différentiant, on tire

$$\begin{aligned}
\frac{dr}{dt} = e\sin\varphi &+ e^2 \sin 2\varphi - \frac{21}{8} m\, ee' \sin(\varphi + \varphi') - \frac{63}{32} m\, ee'^2 \sin(\varphi + 2\varphi') \\
&+ \frac{15}{8} m\, e \sin(2\xi - \varphi) + \frac{35}{8} m\, ee' \sin(2\xi - \varphi - \varphi') + 17 m^2 e'^2 \sin(2\xi - 2\varphi') \\
&+ \left(\frac{255}{32} m + \frac{1675}{256} m^2\right) ee'^2 \sin(2\xi - \varphi - 2\varphi')
\end{aligned}$$

En élevant cette valeur au carré et en n'ayant égard qu'aux termes dépendans de l'argument $2\xi-2\varphi-2\varphi'$, on trouve

$$\frac{dr^2}{dt^2}=\left[\frac{255}{32}m+\left(\begin{array}{c}\frac{1675}{256}+17-\frac{945}{256}-\frac{735}{64}\\ =\frac{1071}{128}\end{array}\right)m^2\right]e^2e'^2\cos(2\xi-2\varphi-2\varphi').$$

On a généralement

$$\frac{1}{r^2}=\frac{2}{r_1}\,\delta\frac{1}{r}+\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2.$$

Soient, d'après la valeur de $\frac{1}{r}$, n°s 5, 15 et 26,

$$\delta\frac{1}{r}=\frac{17}{2}m^2e'^2\cos(2\xi-2\varphi')+\left(\frac{255}{32}m+\frac{12011}{256}m^2\right)ee'^2\cos(2\xi-\varphi-2\varphi')$$
$$-\frac{255}{8}m^2e'^2\cos(2\xi-2\varphi-2\varphi'),$$

$$\frac{2}{r_1}=2+2e\cos\varphi+2e^2\cos 2\varphi;$$

on en conclura

$$\frac{2}{r_1}\delta\frac{1}{r}=\left[\frac{255}{32}m+\left(\begin{array}{c}\frac{12011}{256}+\frac{17}{2}-\frac{255}{4}\\ =-\frac{2133}{256}\end{array}\right)m^2\right]ee'\cos(2\xi-2\varphi-2\varphi').$$

En n'ayant égard qu'aux termes que nous considérons, on peut supposer

$$\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2=(a_{13}a_{30}+a_9a_{37})\,e^2e'^2\cos(2\xi-2\varphi-2\varphi');$$

d'où en substituant pour a_{13}, a_{30}, a_9, a_{37} leurs va-

leurs, n° 26, on tire

$$\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2=\left(-\frac{945}{256}-\frac{735}{64}=-\frac{3885}{256}\right)m^2e^2e'^2\cos(2\xi-2\varphi-2\varphi').$$

On aura donc, en réunissant ces valeurs,

$$\frac{1}{r^2}=\left[\frac{255}{32}m+\left(-\frac{2133}{256}-\frac{3885}{256}=-\frac{3009}{128}\right)m^2\right]ee'\cos(2\xi-2\varphi-2\varphi').$$

En substituant enfin à la place de $\frac{dr^2}{dt^2}$ et de $\frac{1}{r^2}$, les valeurs que nous venons de trouver dans la formule (18), et en remplaçant $\frac{1}{r}$ par le terme qui correspond dans son expression, n° 26, à l'inégalité que nous considérons, on aura

$$\frac{dv}{dt}=\left[\begin{array}{l}\left(\frac{255}{64}-\frac{255}{64}=0\right)m\\ \qquad+\left(-\frac{3009}{256}-\frac{255}{8}-\frac{1071}{256}=-\frac{765}{16}\right)m^2\end{array}\right]e^2e'^2\cos(2\xi-2\varphi-2\varphi').$$

On a d'ailleurs, n° 29,

$$\frac{dv}{dt}=-4mb_{11}e^2e'^2\cos(2\xi-2\varphi-2\varphi');$$

en comparant ces deux valeurs on trouve

$$b_{11}=\frac{765}{64}m.$$

Inégalités du mouvement en latitude.

37. Occupons-nous maintenant des inégalités périodiques de la latitude.

Pour les déterminer nous emploierons, conformément à ce qui se pratique dans la théorie des planètes,

n° 32, livre VIe, la troisième des équations différentielles du mouvement troublé,

$$\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{z}{r^3}=\frac{dR}{dz}. \qquad (19)$$

Cette équation, dont la forme est aussi simple qu'on puisse le désirer, fera connaître la valeur de z, et l'on en conclura ensuite la valeur de la tangente s de la latitude au moyen de l'équation

$$s=\frac{z\sqrt{1+s^2}}{r}. \qquad (20)$$

En négligeant dans cette approximation les quantités dépendantes de l'inclinaison du plan de l'orbe lunaire sur l'écliptique d'un ordre supérieur au carré, on aura, n° 1,

$$\frac{dR}{dz}=\frac{1}{r}\left(\frac{dR}{ds}\right)+\frac{s}{r}\left(r\frac{dR}{dr}\right);$$

d'où, en substituant pour $\frac{dR}{ds}$ et $r\frac{dR}{dr}$ leurs valeurs, n° 3, et faisant abstraction des termes qui seraient du même ordre que les quantités que nous négligeons, on tire

$$\frac{dR}{dz}=-\frac{m'rs}{r'^3}-\frac{3m'rs}{r'^4}\cos(v-v').$$

L'équation (19) devient ainsi

$$\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{z}{r^3}+\frac{m'rs}{r'^3}+\frac{3m'rs}{r'^4}\cos(v-v')=0 \qquad (21)$$

Le dernier terme de cette équation ne produisant, dans l'expression de la latitude, que des inégalités dépendantes de la parallaxe solaire ou multipliées par le très petit facteur $\frac{a}{a'}$, nous en ferons d'abord abstraction; en substituant pour rs sa valeur z, l'équation qui détermine cette dernière quantité deviendra simplement ainsi

$$\frac{d^2z}{dt^2} + z\left(\frac{1}{r^3} + \frac{m'}{r'^3}\right) = 0, \qquad (22)$$

ou bien, en faisant

$$\frac{z}{r^3} + \frac{m'z}{r'^3} = z + \pi,$$

π étant une fonction périodique qu'on doit regarder comme une quantité toute connue dans chacune des approximations successives, puisqu'en effet sa valeur, comme on le verra, dépend de quantités déterminées par les approximations précédentes, on aura

$$\frac{d^2z}{dt^2} + z + \pi = 0. \qquad (23)$$

Les inégalités du mouvement en latitude se trouvent ainsi dépendre de l'intégration d'une équation linéaire de même forme que celle qui détermine les inégalités du rayon vecteur, nº 10, et qui s'intégrera par conséquent de la même manière, dès qu'on aura effectué le développement de la fonction π.

Or en supposant, comme nous le faisons, le demi-grand axe a de l'orbe lunaire égal à l'unité, on a,

n° 8, $m' = m^2 a'^3$; on aura donc

$$\pi = z\left(\frac{1}{r^3} + \frac{m^2 a'^3}{r'^3}\right),$$

expression dans laquelle on substituera pour $\frac{a'^3}{r'^3}$ sa valeur, n° 5, et pour $\frac{1}{r^3}$ sa valeur résultante de l'expression du rayon vecteur dans l'orbite troublée de la Lune, trouvée précédemment, la seule valeur $\frac{1}{r^3} = 1$ étant exceptée. Quant à la quantité z qui entre dans l'expression de π, on substituera d'abord à sa place, dans la première approximation, sa valeur elliptique, et l'on déterminera ainsi toutes les inégalités de z dépendantes de la première puissance de l'inclinaison de l'orbe lunaire à l'*écliptique vraie*, qui sont d'un ordre inférieur à m^2. On substituera ensuite dans la fonction π, à la place de z, sa valeur résultante de la première approximation, et en intégrant l'équation résultante, on aura une seconde valeur de z exacte aux quantités de l'ordre m^4 inclusivement, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on soit arrivé au degré d'approximation que l'on veut atteindre.

D'après cela, en faisant abstraction des quantités dépendantes de l'excentricité de l'orbe lunaire, on a

$$\frac{1}{r^3} = 1 + 3\delta\frac{1}{r} + 3\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2 + \left(\delta\frac{1}{r}\right)^3;$$

si l'on ne considère que la partie non périodique de cette expression, et qu'on substitue pour $\delta\frac{1}{r}$,

$\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2$, $\left(\delta\frac{1}{r}\right)^3$ les termes tout constans que renferment les valeurs de ces quantités, nos 15, 26 et 21, on trouve

$$\frac{1}{r^3} = 1 + \frac{m^2}{2} - \frac{9}{32}m^4 + \frac{55}{16}m^5 + \frac{2159}{96}m^6 + \frac{1997}{24}m^7.$$

On a d'ailleurs, en faisant abstraction des termes dépendans de l'excentricité de l'orbe solaire, $\frac{a'^3}{r'^3} = 1$; en supposant donc

$$\pi = z\left(\frac{3}{2}m^2 - \frac{9}{32}m^4 + \frac{55}{16}m^5 + \frac{2159}{96}m^6 + \frac{1997}{24}m^7\right) + Q,$$

ou simplement

$$\pi = \frac{3}{2}\overline{m}^2 z + Q,$$

en faisant, pour abréger,

$$\overline{m}^2 = m^2 - \frac{3}{16}m^4 + \frac{55}{24}m^5 + \frac{2159}{144}m^6 + \frac{1997}{36}m^7,$$

l'équation (23) deviendra

$$\frac{d^2z}{dt^2} + z\left(1 + \frac{3}{2}\overline{m}^2\right) + Q = 0, \qquad (24)$$

la quantité Q qui entre dans cette équation devant être déterminée par la formule

$$Q = z\left(\frac{1}{r^3} + \frac{m^2 a'^3}{r'^3}\right),$$

dans laquelle on substituera pour z les valeurs données par les approximations successives, et pour $\frac{1}{r^3}$

et $\frac{a'^3}{r'^3}$ les termes simplement périodiques que renferment les expressions de ces deux fonctions.

Considérons maintenant les termes de l'expression de z dépendans de la parallaxe solaire, ou qui sont multipliés par le très petit facteur $\frac{a}{a'}$. Si dans l'équation différentielle (21) on substitue pour m' sa valeur $m^2a'^3$, n° 8, et pour rs sa valeur z, on trouve

$$\frac{d^2z}{dt^2}+z\left[\frac{1}{r^3}+\frac{m^2a'^3}{r'^3}+\frac{3\,m^2a'^4}{r'^4}\left(\frac{a}{a'}\right)\cos(v-v')\right]=0,$$

formule qu'on peut, comme précédemment, mettre sous la forme

$$\frac{d^2z}{dt^2}+z\left(1+\frac{3}{2}\overline{m^2}\right)+Q=0, \qquad (25)$$

la fonction Q devant être déterminée, dans ce cas, par l'équation

$$Q=z\left[\frac{1}{r^3}+\frac{m^2a'^3}{r'^3}+\frac{3\,m^2a'^4}{r'^4}\left(\frac{a}{a'}\right)\cos(v-v')\right],$$

dans laquelle on substituera pour $\frac{1}{r^3}$, $\frac{a'^3}{r'^3}$, etc., leurs valeurs, abstraction faite de la partie non périodique de la fonction $\frac{1}{r^3}+\frac{m^2a'^3}{r'^3}$, qui est déjà supposée comprise dans l'équation différentielle (25).

38. Cela posé, concevons la fonction Q développée en une suite de *sinus* d'angles proportionnels au temps t et dépendans des mêmes argumens que ceux

qui forment l'expression de la latitude dans le mouvement elliptique, et d'argumens nouveaux résultant de la combinaison des termes périodiques de la valeur de z avec les termes de même nature qui entrent dans l'expression des fonctions $\frac{1}{r^3}$, $\frac{a'^3}{r'^3}$ et $\frac{a'^4}{r'^4}\left(\frac{a}{a'}\right)\cos(v - v')$. Représentons par Q_i le coefficient du terme qui dépend de l'argument portant le n° i, en sorte qu'on ait

$$Q = Q_{105}\,\gamma \underset{(105)}{\sin \eta} + Q_{108}\,\gamma \underset{(108)}{\sin(\varphi + \eta)} + Q_{109}\,\gamma \underset{(109)}{\sin(\varphi - \eta)} + \text{etc.}$$

Chacun des termes de cette suite produira un terme correspondant dans l'expression de la fonction z, et par conséquent dans l'expression de la tangente s de la latitude, on pourra donc prévoir *à priori* la forme des séries qui représenteront ces différentes quantités. D'après cela, soit

$$\begin{aligned}
s = \; & c_{105}\,\gamma \sin \eta \\
& + c_{108}\, e\, \gamma \sin(\varphi - \eta) \\
& + c_{109}\, e\, \gamma \sin(\varphi + \eta) \\
& + c_{110}\, e'\, \gamma \sin(\varphi' - \eta) \\
& + c_{111}\, e'\, \gamma \sin(\varphi' + \eta) \\
& + c_{112}\, e^2\, \gamma \sin(2\varphi - \eta) \\
& + c_{113}\, e^2\, \gamma \sin(2\varphi + \eta) \\
& + c_{114}\, ee'\, \gamma \sin(\varphi - \varphi' - \eta) \\
& + c_{115}\, ee'\, \gamma \sin(\varphi - \varphi' + \eta) \\
& + c_{116}\, ee'\, \gamma \sin(\varphi + \varphi' - \eta) \\
& + c_{117}\, ee'\, \gamma \sin(\varphi + \varphi' + \eta) \\
& + c_{118}\, e'^2\, \gamma \sin(2\varphi' - \eta) \\
& + c_{119}\, e'^2\, \gamma \sin(2\varphi' + \eta) \\
& + c_{120}\, e^3\, \gamma \sin(3\varphi - \eta) \\
& + c_{121}\, e^3\, \gamma \sin(3\varphi + \eta) \\
& + c_{122}\, e^2 e'\, \gamma \sin(2\varphi - \varphi' - \eta) \\
& + c_{123}\, e^2 e'\, \gamma \sin(2\varphi - \varphi' + \eta) \\
& + c_{124}\, e^2 e'\, \gamma \sin(2\varphi + \varphi' - \eta) \\
& + c_{125}\, e^2 e'\, \gamma \sin(2\varphi + \varphi' + \eta)
\end{aligned}$$

$+ c_{126}\, ee'^2\, \gamma \sin(\varphi - 2\varphi' - \eta)$
$+ c_{127}\, ee'^2\, \gamma \sin(\varphi - 2\varphi' + \eta)$
$+ c_{128}\, ee'^2\, \gamma \sin(\varphi + 2\varphi' - \eta)$
$+ c_{129}\, ee'^2\, \gamma \sin(\varphi + 2\varphi' + \eta)$
$+ c_{130}\, \gamma \sin(2\xi - \eta)$
$+ c_{131}\, \gamma \sin(2\xi + \eta)$
$+ c_{132}\, e\, \gamma \sin(2\xi - \varphi - \eta)$
$+ c_{133}\, e\, \gamma \sin(2\xi - \varphi + \eta)$
$+ c_{134}\, e\, \gamma \sin(2\xi + \varphi - \eta)$
$+ c_{135}\, e\, \gamma \sin(2\xi + \varphi + \eta)$
$+ c_{136}\, e'\, \gamma \sin(2\xi - \varphi' - \eta)$
$+ c_{137}\, e'\, \gamma \sin(2\xi - \varphi' + \eta)$
$+ c_{138}\, e'\, \gamma \sin(2\xi + \varphi' - \eta)$
$+ c_{139}\, e'\, \gamma \sin(2\xi + \varphi' + \eta)$
$+ c_{140}\, e^2\, \gamma \sin(2\xi - 2\varphi - \eta)$
$+ c_{141}\, e^2\, \gamma \sin(2\xi - 2\varphi + \eta)$
$+ c_{142}\, e^2\, \gamma \sin(2\xi + 2\varphi - \eta)$
$+ c_{143}\, e^2\, \gamma \sin(2\xi + 2\varphi + \eta)$
$+ c_{144}\, ee'\, \gamma \sin(2\xi - \varphi - \varphi' - \eta)$
$+ c_{145}\, ee'\, \gamma \sin(2\xi - \varphi - \varphi' + \eta)$
$+ c_{146}\, ee'\, \gamma \sin(2\xi - \varphi + \varphi' - \eta)$
$+ c_{147}\, ee'\, \gamma \sin(2\xi - \varphi + \varphi' + \eta)$
$+ c_{148}\, ee'\, \gamma \sin(2\xi + \varphi - \varphi' - \eta)$
$+ c_{149}\, ee'\, \gamma \sin(2\xi + \varphi - \varphi' + \eta)$
$+ c_{150}\, ee'\, \gamma \sin(2\xi + \varphi + \varphi' - \eta)$
$+ c_{151}\, ee'\, \gamma \sin(2\xi + \varphi + \varphi' + \eta)$
$+ c_{152}\, e'^2\, \gamma \sin(2\xi - 2\varphi' - \eta)$
$+ c_{153}\, e'^2\, \gamma \sin(2\xi - 2\varphi' + \eta)$
$+ c_{154}\, e'^2\, \gamma \sin(2\xi + 2\varphi' - \eta)$
$+ c_{155}\, e^3\, \gamma \sin(2\xi - 3\varphi - \eta)$
$+ c_{156}\, e^3\, \gamma \sin(2\xi - 3\varphi + \eta)$
$+ c_{157}\, e^3\, \gamma \sin(2\xi + 3\varphi - \eta)$
$+ c_{158}\, e^2\, e'\, \gamma \sin(2\xi - 2\varphi - \varphi' - \eta)$
$+ c_{159}\, e^2\, e'\, \gamma \sin(2\xi - 2\varphi - \varphi' + \eta)$
$+ c_{160}\, e^2\, e'\, \gamma \sin(2\xi - 2\varphi + \varphi' - \eta)$
$+ c_{161}\, e^2\, e'\, \gamma \sin(2\xi - 2\varphi + \varphi' + \eta)$
$+ c_{162}\, e^2\, e'\, \gamma \sin(2\xi + 2\varphi - \varphi' - \eta)$
$+ c_{163}\, e^2\, e'\, \gamma \sin(2\xi + 2\varphi + \varphi' - \eta)$
$+ c_{164}\, ee'^2\, \gamma \sin(2\xi - \varphi - 2\varphi' - \eta)$
$+ c_{165}\, ee'^2\, \gamma \sin(2\xi - \varphi + 2\varphi' - \eta)$
$+ c_{166}\, ee'^2\, \gamma \sin(2\xi - \varphi + 2\varphi' + \eta)$
$+ c_{167}\, ee'^2\, \gamma \sin(2\xi + \varphi - 2\varphi' - \eta)$

$$+ c_{168}\, ee'^2 \gamma \sin(2\xi + \varphi + 2\varphi' - \eta)$$
$$+ c_{169} \frac{a}{a'} \gamma \sin(\xi - \eta)$$
$$+ c_{170} \frac{a}{a'} \gamma \sin(\xi + \eta)$$
$$+ c_{171} \frac{a}{a'} e \gamma \sin(\xi - \varphi - \eta)$$
$$+ c_{172} \frac{a}{a'} e \gamma \sin(\xi - \varphi + \eta)$$
$$+ c_{173} \frac{a}{a'} e \gamma \sin(\xi + \varphi - \eta)$$
$$+ c_{174} \frac{a}{a'} e \gamma \sin(\xi + \varphi + \eta)$$
$$+ c_{175} \frac{a}{a'} e' \gamma \sin(\xi - \varphi' - \eta)$$
$$+ c_{176} \frac{a}{a'} e' \gamma \sin(\xi - \varphi' + \eta)$$
$$+ c_{177} \frac{a}{a'} e' \gamma \sin(\xi + \varphi' - \eta)$$
$$+ c_{178} \frac{a}{a'} e' \gamma \sin(\xi + \varphi' + \eta)$$
$$+ c_{179} \frac{a}{a'} \gamma \sin(3\xi - \eta)$$
$$+ c_{180} \frac{a}{a'} \gamma \sin(3\xi + \eta)$$
$$+ c_{181} \frac{a}{a'} e \gamma \sin(3\xi - \varphi - \eta)$$
$$+ c_{182} \frac{a}{a'} e' \gamma \sin(3\xi + \varphi' - \eta)$$
$$+ c_{183}\, \gamma \sin(4\xi - \eta)$$
$$+ c_{184}\, \gamma \sin(4\xi + \eta)$$
$$+ c_{185}\, e \gamma \sin(4\xi - \varphi - \eta)$$
$$+ c_{186}\, e \gamma \sin(4\xi - \varphi + \eta)$$
$$+ c_{187}\, e \gamma \sin(4\xi + \varphi - \eta)$$
$$+ c_{188}\, e' \gamma \sin(4\xi - \varphi' - \eta)$$
$$+ c_{189}\, e' \gamma \sin(4\xi + \varphi' - \eta)$$
$$+ c_{190}\, e^2 \gamma \sin(4\xi - 2\varphi - \eta)$$
$$+ c_{191}\, e^2 \gamma \sin(4\xi - 2\varphi + \eta)$$
$$+ c_{192}\, ee' \gamma \sin(4\xi - \varphi - \varphi' - \eta)$$
$$+ c_{193}\, ee' \gamma \sin(4\xi - \varphi + \varphi' - \eta).$$

Nous exprimerons la fonction z par une série semblable, dans laquelle on changera simplement les

coefficiens indéterminés c_{105}, c_{108}, c_{109}, etc., en q_{105}, q_{108}, q_{109}, etc.; de là on conclura la valeur de la fonction $-\frac{d^2z}{dt^2}$, en multipliant chacun des termes de l'expression de z par le carré du coefficient qui multiplie le temps t, sous le signe *sinus* qui lui appartient.

39. D'après cela, si l'on substitue pour $\frac{d^2z}{dt^2}$, z et Q leurs valeurs dans les équations différentielles (24) et (25), qu'on égale séparément à zéro les termes affectés des mêmes *sinus*, on formera la suite d'équations suivante.

La comparaison des termes dépendans de l'argument η ou $gt - \theta$, donnera d'abord

$$q_{105}\left(1 + \frac{3}{2}\overline{m}^2 - g^2\right) + Q_{105} = 0. \qquad (26)$$

La comparaison des termes qui dépendent des autres argumens compris dans l'expression de z, donnera ensuite

$$q_{108}\left[1 + \frac{3}{2}\overline{m}^2 - (c - g)^2\right] + Q_{108} = 0,$$

$$q_{109}\left[1 + \frac{3}{2}\overline{m}^2 - (c + g)^2\right] + Q_{109} = 0,$$

$$q_{110}\left[1 + \frac{3}{2}\overline{m}^2 - (m - g)^2\right] + Q_{110} = 0,$$

$$q_{111}\left[1 + \frac{3}{2}\overline{m}^2 - (m + g)^2\right] + Q_{111} = 0,$$

$$q_{112}\left[1 + \frac{3}{2}\overline{m}^2 - (2c - g)^2\right] + Q_{112} = 0,$$

$$q_{113}\left[1 + \frac{3}{2}m^2 - (2c + g)^2\right] + Q_{113} = 0,$$

$$q_{114}\left[1 + \frac{3}{2}m^2 - (c - m - g)^2\right] + Q_{114} = 0,$$

$$q_{115}\left[1+\frac{3}{2}m^2-(c-m+g)^2\right]+Q_{115}=0,$$

$$q_{116}\left[1+\frac{3}{2}m^2-(c+m-g)^2\right]+Q_{116}=0,$$

$$q_{117}\left[1+\frac{3}{2}m^2-(c+m+g)^2\right]+Q_{117}=0,$$

$$q_{118}\left[1+\frac{3}{2}m^2-(2m-g)^2\right]+Q_{118}=0,$$

$$q_{119}\left[1+\frac{3}{2}m^2-(2m+g)^2\right]+Q_{119}=0,$$

$$q_{120}[1-(3c-g)^2]+Q_{120}=0,$$

$$q_{121}[1-(3c+1)^2]+Q_{121}=0,$$

$$q_{122}[1-(2c-m-g)^2]+Q_{122}=0,$$

$$q_{123}[1-(2c-m+g)^2]+Q_{123}=0,$$

$$q_{124}[1-(2c+m-g)^2]+Q_{124}=0,$$

$$q_{125}[1-(2c+m+g)^2]+Q_{125}=0,$$

$$q_{126}[1-(c-2m-g)^2]+Q_{126}=0,$$

$$q_{127}[1-(c-2m+g)^2]+Q_{127}=0,$$

$$q_{128}[1-(c+2m-g)^2]+Q_{128}=0,$$

$$q_{129}[1-(c+2m+g)^2]+Q_{129}=0,$$

$$q_{130}\left[1+\frac{3}{2}m^2-(2-2m-g)^2\right]+Q_{130}=0,$$

$$q_{131}\left[1+\frac{3}{2}m^2-(2-2m+g)^2\right]+Q_{131}=0,$$

$$q_{132}\left[1+\frac{3}{2}m^2-(2-2m-c-g)^2\right]+Q_{132}=0,$$

$$q_{133}\left[1+\frac{3}{2}m^2-(2-2m-c+g)^2\right]+Q_{133}=0,$$

$$q_{134}\left[1+\frac{3}{2}m^2-(2-2m+c-g)^2\right]+Q_{134}=0,$$

$$q_{135}\left[1+\frac{3}{2}m^2-(2-2m+c+g)^2\right]+Q_{135}=0,$$

$$q_{136}\left[1+\frac{3}{2}m^2-(2-3m-g)^2\right]+Q_{136}=0,$$

$$q_{137}\left[1+\frac{3}{2}m^2-(2-3m+g)^2\right]+Q_{137}=0,$$

$$q_{138}\left[1+\frac{3}{2}m^2-(2-m-g)^2\right]+Q_{138}=0,$$

$$q_{139}\left[1+\frac{3}{2}m^2-(2-m+g)^2\right]+Q_{139}=0,$$

$$q_{140}\left[1+\frac{3}{2}m^2-(2-2m-2c-g)^2\right]+Q_{140}=0,$$

$$q_{141}\left[1+\frac{3}{2}m^2-(2-2m-2c+g)^2\right]+Q_{141}=0,$$

$$q_{142}\left[1+\frac{3}{2}m^2-(2-2m+2c-g)^2\right]+Q_{142}=0,$$

$$q_{143}[1-(2-2m+2c+g)^2]+Q_{143}=0,$$

$$q_{144}\left[1+\frac{3}{2}m^2-(2-3m-c-g)^2\right]+Q_{144}=0,$$

$$q_{145}\left[1+\frac{3}{2}m^2-(2-3m-c+g)^2\right]+Q_{145}=0,$$

$$q_{146}[1-(2-m-c-g)^2]+Q_{146}=0,$$

$$q_{147}[1-(2-m-c+g)^2]+Q_{147}=0,$$

$$q_{148}[1-(2-3m+c-g)^2]+Q_{148}=0,$$

$$q_{149}[1-(2-3m+c+g)^2]+Q_{149}=0,$$

$$q_{150}[1-(2-m+c-g)^2]+Q_{150}=0,$$

$$q_{151}[1-(2-m+c+g)^2]+Q_{151}=0,$$

$$q_{152}\left[1+\frac{3}{2}m^2-(2-4m-g)^2\right]+Q_{152}=0,$$

$$q_{153}[1-(2-4m+g)^2]+Q_{153}=0,$$

$$q_{154}\left[1+\frac{3}{2}m^2-(2-g)^2\right]+Q_{154}=0,$$

$$q_{155}[1-(2-2m-3c-g)^2]+Q_{155}=0,$$

$$q_{156}[1-(2-2m-3c+g)^2]+Q_{156}=0,$$

$$q_{157}[1-(2-2m+3c-g)^2]+Q_{157}=0,$$

$$q_{158}[1-(2-3m-2c-g)^2]+Q_{158}=0,$$

$$q_{159}[1-(2-3m-2c+g)^2]+Q_{159}=0,$$

$$q_{160}[1-(2-m-2c-g)^2]+Q_{160}=0,$$

$$q_{161}[1-(2-m-2c+g)^2]+Q_{161}=0,$$

$$q_{162}[1-(2-3m+2c-g)^2]+Q_{162}=0,$$

$$q_{163}[1-(2-m+2c-g)^2]+Q_{163}=0,$$

$$q_{164}\,[1-(2-4m-c-g)^2]+Q_{164}=0,$$
$$q_{165}\,[1-(2-c-g)^2]+Q_{165}=0,$$
$$q_{166}\,[1-(2-c+g)^2]+Q_{166}=0,$$
$$q_{167}\,[1-(2-4m+c-g)^2]+Q_{167}=0,$$
$$q_{168}\,[1-(2+c-g)^2]+Q_{168}=0,$$
$$q_{169}\left[1+\frac{3}{2}m^2-(1-m-c)^2\right]+Q_{169}=0,$$
$$q_{170}\left[1+\frac{3}{2}m^2-(1-m+c)^2\right]+Q_{170}=0,$$
$$q_{171}\,[1-(1-m-c-g)^2]+Q_{171}=0,$$
$$q_{172}\,[1-(1-m-c+g)^2]+Q_{172}=0,$$
$$q_{173}\,[1-(1-m+c-g)^2]+Q_{173}=0,$$
$$q_{174}\,[1-(1-m+c+g)^2]+Q_{174}=0,$$
$$q_{175}\,[1-(1-2m-g)^2]+Q_{175}=0,$$
$$q_{176}\,[1-(1-2m+g)^2]+Q_{176}=0,$$
$$q_{177}\,[1-(1-g)^2]+Q_{177}=0,$$
$$q_{178}\,[1-(1+g)^2]+Q_{178}=0,$$
$$q_{179}\,[1-(3-3m-g)^2]+Q_{179}=0,$$
$$q_{180}\,[1-(3-3m+g)^2]+Q_{180}=0,$$
$$q_{181}\,[1-(3-3m-c-g)^2]+Q_{181}=0,$$
$$q_{182}\,[1-(3-2m-g)^2]+Q_{182}=0,$$
$$q_{183}\left[1+\frac{3}{2}m^2-(4-4m-g)^2\right]+Q_{183}=0,$$
$$q_{184}\,[1-(4-4m+g)^2]+Q_{184}=0,$$
$$q_{185}\,[1-(4-4m-c-g)^2]+Q_{185}=0,$$
$$q_{186}\,[1-(4-4m-c+g)^2]+Q_{186}=0.$$
$$q_{187}\,[1-(4-4m+c-g)^2]+Q_{187}=0,$$
$$q_{188}\,[1-(4-5m-g)^2]+Q_{188}=0,$$
$$q_{189}\,[1-(4-3m-g)^2]+Q_{189}=0,$$
$$q_{190}\,[1-(4-4m-2c-g)^2]+Q_{190}=0,$$
$$q_{191}\,[1-(4-4m-2c+g)^2]+Q_{191}=0,$$
$$q_{192}\,[1-(4-5m-c-g)^2]+Q_{192}=0,$$
$$q_{193}\,[1-(4-3m-c-g)^2]+Q_{193}=0.$$

40. Développons la valeur de la fonction Q qui entre dans les équations précédentes.

En faisant abstraction des termes dépendans de la parallaxe solaire, nous avons supposé, n° 37,

$$Q = z\left(\frac{1}{r^3} + \frac{m^2 a'^3}{r'^3}\right).$$

La valeur de la fonction $\frac{1}{r^3}$ est facile à déduire de l'expression de la fonction $\frac{1}{r}$ déterminée précédemment; en effet, on a

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{r_1^3} + \frac{3}{r_1^2}\delta\frac{1}{r} + \frac{3}{r_1}\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2 + \left(\delta\frac{1}{r}\right)^3,$$

r_1 désignant la partie elliptique de l'expression du rayon vecteur, et $\delta\frac{1}{r}$ l'accroissement de la fonction $\frac{1}{r}$ résultant de l'action des forces perturbatrices. Les valeurs des fonctions $\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2$, $\left(\delta\frac{1}{r}\right)^3$ ont été développées n° 21, celle de la fonction $\left(\delta\frac{1}{r}\right)$ se trouve n°s 15 et 26; on pourra donc, par des opérations faciles, former le développement de la fonction $\frac{1}{r^3}$. On a d'ailleurs, n° 5,

$$\frac{a'^3}{r'^3} = 3e'\cos\varphi' + \frac{9}{2}e'^2\cos 2\varphi';$$

en multipliant par m^2 cette quantité, on aura la valeur de la fonction $\frac{m^2 a'^3}{r'^3}$, qu'on réunira à celle de la fonction $\frac{1}{r^3}$. J'ai trouvé ainsi

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{r^3}+\frac{m^2a'^3}{r'^3} = & \left(3+\frac{3}{2}m^2-\frac{1215}{128}m^3-\frac{30459}{512}m^4-\frac{2190451}{8192}m^5\right) e\cos\varphi \\
& +\left(\frac{9}{2}+\frac{15}{4}m^2-\frac{2475}{64}m^3-\frac{204507}{768}m^4\right) e^2\cos 2\varphi \\
& +\left(\frac{53}{8}+\frac{259}{32}m^2\right) e^3\cos 3\varphi \\
& +\left(-\frac{3}{2}m^2+\frac{1467}{16}m^4\right) e'\cos\varphi' \\
& +\left(-\frac{9}{4}m^2+\frac{12123}{64}m^4\right) e'^2\cos 2\varphi' \\
& +\left(\frac{63}{8}m+\frac{3051}{64}m^2+\frac{5265}{16}m^3\right) ee'\cos(\varphi-\varphi') \\
& +\left(-\frac{63}{8}m-\frac{2799}{64}m^2-\frac{20205}{128}m^3\right) ee'\cos(\varphi+\varphi') \\
& +\left(\frac{189}{8}m+\frac{9945}{64}m^2\right) e^2e'\cos(2\varphi-\varphi') \\
& +\left(-\frac{189}{8}m-\frac{7605}{64}m^2\right) e^2e'\cos(2\varphi+\varphi') \\
& +\frac{189}{32}m\,ee'^2\cos(\varphi-2\varphi')-\frac{189}{32}m\,ee'^2\cos(\varphi+2\varphi') \\
& +\left(3m^2+\frac{19}{2}m^3+\frac{137}{6}m^4+\frac{823}{18}m^5+\frac{558997}{6912}m^6\right)\cos 2\xi \\
& +\left(\frac{45}{8}m+\frac{657}{32}m^2+\frac{37497}{512}m^3+\frac{466229}{2048}m^4\right) e\cos(2\xi-\varphi) \\
& +\left(\frac{147}{16}m^2+\frac{455}{16}m^3+\frac{27251}{384}m^4\right) e\cos(2\xi+\varphi) \\
& +\left(\frac{21}{2}m^2+\frac{471}{8}m^3+\frac{3333}{16}m^4+\frac{16529}{32}m^5\right) e'\cos(2\xi-\varphi') \\
& +\left(-\frac{3}{2}m^2-\frac{91}{8}m^3-\frac{1505}{48}m^4+\frac{18491}{288}m^5\right) e'\cos(2\xi+\varphi') \\
& +\left(\frac{45}{8}m+\frac{321}{32}m^2+\frac{17113}{512}m^3\right) e^2\cos(2\xi-2\varphi) \\
& +\left(\frac{327}{16}m^2+\frac{1001}{16}m^3\right) e^2\cos(2\xi+2\varphi) \\
& +\left(\frac{105}{8}m+\frac{4479}{64}m^2+\frac{59271}{256}m^3\right) ee'\cos(2\xi-\varphi-\varphi') \\
& +\left(-\frac{45}{8}m-\frac{387}{64}m^2\right) ee'\cos(2\xi-\varphi+\varphi') \\
& +\left(\frac{1029}{32}m^2+\frac{25725}{128}m^3\right) ee'\cos(2\xi+\varphi-\varphi') \\
& -\frac{147}{32}m^2\,ee'\cos(2\xi+\varphi+\varphi') \\
& +\left(\frac{51}{2}m^2+\frac{799}{4}m^3\right) e'^2\cos(2\xi-2\varphi')
\end{aligned}
$$

$$+\left(-\frac{9}{4}m^3-\frac{3}{4}m^4\right)e'^2\cos(2\xi+2\varphi')$$

$$+\left(\frac{135}{64}m+\frac{1989}{128}m^2\right)e^3\cos(2\xi-3\varphi)$$

$$+\left(\frac{105}{8}m+\frac{2127}{64}m^2\right)e^2e'\cos(2\xi-2\varphi-\varphi')$$

$$+\left(-\frac{45}{8}m-\frac{51}{64}m^2\right)e^2e'\cos(2\xi-2\varphi+\varphi')$$

$$+\frac{765}{32}m\,ee'^2\cos(2\xi-\varphi-2\varphi')-\frac{135}{32}m\,ee'^2\cos(2\xi-\varphi+2\varphi')$$

$$+\left(\frac{33}{8}m^4+\frac{4257}{160}m^5\right)\cos 4\xi$$

$$+\frac{2205}{128}m^3\,e\cos(4\xi-\varphi)$$

$$+\left(\frac{2025}{128}m^2+\frac{31275}{256}m^3\right)e^2\cos(4\xi-2\varphi).$$

En combinant entre eux les différens termes de l'expression précédente et ceux de l'expression de z donnée par les approximations successives, et qui sera rapportée n° 43, on a trouvé, pour la valeur de la fonction Q, l'expression suivante :

$$Q=\left(-\frac{9}{16}m^3-\frac{219}{64}m^4-\frac{13653}{1024}m^5+\frac{510035}{12288}m^6-\frac{33123661}{294912}m^7\right)\gamma\sin\eta \quad (105)$$

$$+\left(-\frac{3}{2}+\frac{71}{128}m^2+\frac{333}{32}m^3+\frac{630035}{12288}m^4+\frac{1686151}{8192}m^5\right)e\,\gamma\sin(\varphi-\eta) \quad (108)$$

$$+\left(\frac{3}{2}+\frac{m^2}{2}-\frac{1107}{128}m^3-\frac{43835}{384}m^4-\frac{1127307}{4096}m^5\right)e\,\gamma\sin(\varphi+\eta) \quad (109)$$

$$+\left(\frac{3}{4}m^2+\frac{45}{32}m^3-\frac{4339}{128}m^4-\frac{538937}{2048}m^5\right)e'\,\gamma\sin(\varphi'-\eta) \quad (110)$$

$$+\left(-\frac{3}{4}m^2-\frac{33}{32}m^3+\frac{4755}{128}m^4+\frac{1722643}{6144}m^5\right)e'\,\gamma\sin(\varphi'+\eta) \quad (111)$$

$$+\left(-3m^2-\frac{9}{8}m^3+\frac{8915}{1024}m^4\right)e^2\,\gamma\sin(2\varphi-\eta) \quad (112)$$

$$+\left(3+\frac{5}{2}m^2\right)e^2\gamma\sin(\underset{(113)}{2\varphi+\eta})$$

$$-\left(\frac{27}{8}m+\frac{369}{16}m^2+\frac{89391}{512}m^3\right)ee'\gamma\sin(\underset{(114)}{\varphi-\varphi'-\eta})$$

$$+\left(\frac{9}{2}m+\frac{1587}{64}m^2+\frac{32613}{256}m^3\right)ee'\gamma\sin(\underset{(115)}{\varphi-\varphi'+\eta})$$

$$+\left(\frac{27}{8}m+\frac{333}{16}m^2+\frac{58047}{512}m^3\right)ee'\gamma\sin(\underset{(116)}{\varphi+\varphi'-\eta})$$

$$-\left(\frac{9}{2}m+\frac{1455}{64}m^2+\frac{14991}{256}m^3\right)ee'\gamma\sin(\underset{(117)}{\varphi+\varphi'+\eta})$$

$$+\left(\frac{9}{8}m^2+\frac{171}{64}m^3\right)e'^2\gamma\sin(\underset{(118)}{2\varphi'-\eta})$$

$$-\left(\frac{9}{8}m^2+\frac{93}{64}m^3\right)e'^2\gamma\sin(\underset{(119)}{2\varphi'+\eta})$$

$$+\left(-\frac{13}{16}+\frac{405}{128}m\right)e^3\gamma\sin(\underset{(120)}{3\varphi-\eta})$$

$$-5e^3\gamma\sin(\underset{(121)}{3\varphi+\eta})$$

$$-\frac{939}{128}m^2e^2e'\gamma\sin(\underset{(122)}{2\varphi-\varphi'-\eta})$$

$$+\frac{135}{8}m\,e^2e'\gamma\sin(\underset{(123)}{2\varphi-\varphi'+\eta})$$

$$-\frac{489}{128}m^2e^2e'\gamma\sin(\underset{(124)}{2\varphi+\varphi'-\eta})$$

$$+\frac{135}{8}m\,e^2e'\gamma\sin(\underset{(125)}{2\varphi+\varphi'+\eta})$$

$$-\frac{81}{32}m\,ee'^2\gamma\sin(\underset{(126)}{\varphi-2\varphi'-\eta})$$

$$-\frac{27}{8}m\,ee'^2\gamma\sin(\underset{(127)}{\varphi-2\varphi'+\eta})$$

$$+\frac{81}{32}m\,ee'^2\gamma\sin(\underset{(128)}{\varphi+2\varphi'-\eta})$$

$$+\frac{27}{8}m\,ee'^2\gamma\sin(\underset{(129)}{\varphi+2\varphi'+\eta})$$

$$-\left(\frac{3}{2}m^2+\frac{19}{4}m^3+\frac{67}{6}m^4+\frac{3259}{144}m^5+\frac{600913}{13824}m^6\right)\gamma\sin(2\xi-\eta) \quad (130)$$

$$+\left(\frac{3}{2}m^2+\frac{19}{4}m^3+\frac{67}{6}m^4+\frac{50605}{2304}m^5\right)\gamma\sin(2\xi+\eta) \quad (131)$$

$$-\left(\frac{9}{4}m+\frac{291}{32}m^2+\frac{8467}{256}m^3+\frac{663187}{6144}m^4\right)e\gamma\sin(2\xi-\varphi-\eta) \quad (132)$$

$$+\left(\frac{45}{16}m+\frac{531}{64}m^2+\frac{31065}{1024}m^3+\frac{414417}{4096}m^4\right)e\gamma\sin(2\xi-\varphi+\eta) \quad (133)$$

$$+\left(\frac{9}{16}m-\frac{27}{64}m^2-\frac{1683}{1024}m^3-\frac{42473}{4096}m^4\right)e\gamma\sin(2\xi+\varphi-\eta) \quad (134)$$

$$+\left(\frac{45}{8}m^2+\frac{573}{32}m^3+\frac{5761}{128}m^4\right)e\gamma\sin(2\xi+\varphi+\eta) \quad (135)$$

$$-\left(\frac{21}{4}m^2+\frac{933}{32}m^3+\frac{3263}{32}m^4+\frac{539897}{2048}m^5\right)e'\gamma\sin(2\xi-\varphi'-\eta) \quad (136)$$

$$+\left(\frac{21}{4}m^2+30\,m^3+\frac{13601}{128}m^4\right)e'\gamma\sin(2\xi-\varphi'+\eta) \quad (137)$$

$$+\left(\frac{3}{4}m^2+\frac{155}{32}m^3+\frac{2203}{192}m^4-\frac{23689}{18432}m^5\right)e'\gamma\sin(2\xi+\varphi'-\eta) \quad (138)$$

$$-\left(\frac{3}{4}m^2+\frac{25}{4}m^3+\frac{6899}{384}m^4\right)e'\gamma\sin(2\xi+\varphi'+\eta) \quad (139)$$

$$+\left(\frac{93}{16}m^2+\frac{491}{16}m^3+\frac{103249}{768}m^4\right)e^2\gamma\sin(2\xi-2\varphi-\eta) \quad (140)$$

$$+\left(-\frac{45}{16}m^2+\frac{249}{128}m^3-\frac{3611}{128}m^4\right)e^2\gamma\sin(2\xi-2\varphi+\eta) \quad (141)$$

$$+\left(\frac{9}{8}m+\frac{27}{32}m^2-\frac{615}{512}m^3\right)e^2\gamma\sin(2\xi+2\varphi-\eta) \quad (142)$$

$$+\left(\frac{225}{16}m^2+\frac{1425}{32}m^3\right)e^2\gamma\sin(2\xi+2\varphi+\eta) \quad (143)$$

$$-\left(\frac{21}{4}m+\frac{471}{16}m^2+\frac{13349}{128}m^3\right)ee'\gamma\sin(2\xi-\varphi-\varphi'-\eta) \quad (144)$$

$$+\left(\frac{105}{16}m+\frac{933}{32}m^2+\frac{90449}{1024}m^3\right)ee'\gamma\sin(2\xi-\varphi-\varphi'+\eta) \quad (145)$$

$$+\left(\frac{9}{4}m+\frac{3}{4}m^2-\frac{23315}{256}m^3\right)ee'\gamma\sin(2\xi-\varphi+\varphi'-\eta) \quad (146)$$

$$-\left(\frac{45}{16}m+\frac{99}{32}m^2\right)ee'\gamma\sin(2\xi-\underset{(147)}{\varphi+\varphi'}+\eta)$$

$$+\left(\frac{21}{16}m+\frac{15}{8}m^2+\frac{157}{1024}m^3\right)ee'\gamma\sin(2\xi+\underset{(148)}{\varphi-\varphi'}-\eta)$$

$$-\frac{315}{16}m^2\,ee'\gamma\sin(2\xi+\underset{(149)}{\varphi-\varphi'}+\eta)$$

$$-\left(\frac{9}{16}m+\frac{27}{8}m^2+\frac{5841}{1024}m^3\right)ee'\gamma\sin(2\xi+\underset{(150)}{\varphi+\varphi'}-\eta)$$

$$+\frac{45}{16}m^2\,ee'\gamma\sin(2\xi+\underset{(151)}{\varphi+\varphi'}+\eta)$$

$$-\left(\frac{51}{4}m^2+\frac{1577}{16}m^3\right)e'^2\gamma\sin(2\xi-\underset{(152)}{2\varphi'}-\eta)$$

$$-\frac{51}{4}m^2\,e'^2\gamma\sin(2\xi-\underset{(153)}{2\varphi'}+\eta)$$

$$+\left(\frac{27}{32}m^3+\frac{261}{512}m^4\right)e'^2\gamma\sin(2\xi+\underset{(154)}{2\varphi'}-\eta)$$

$$-\frac{159}{32}m\,e^3\gamma\sin(2\xi-\underset{(155)}{3\varphi}-\eta)$$

$$-\frac{45}{32}m\,e^3\gamma\sin(2\xi-\underset{(156)}{3\varphi}+\eta)$$

$$+\frac{15}{8}m\,e^3\gamma\sin(2\xi+\underset{(157)}{3\varphi}-\eta)$$

$$+\frac{1659}{128}m^2\,e^2e'\gamma\sin(2\xi-\underset{(158)}{2\varphi}-\varphi'-\eta)$$

$$-\frac{315}{128}m^2\,e^2e'\gamma\sin(2\xi-\underset{(159)}{2\varphi}-\varphi'+\eta)$$

$$+\frac{573}{128}m^2\,e^2e'\gamma\sin(2\xi-\underset{(160)}{2\varphi+\varphi'}-\eta)$$

$$-\frac{797}{128}m^2\,e^2e'\gamma\sin(2\xi-\underset{(161)}{2\varphi+\varphi'}+\eta)$$

$$+\frac{21}{8}m\,e^2e'\gamma\sin(2\xi+\underset{(162)}{2\varphi-\varphi'}-\eta)$$

$$-\frac{9}{8}m\,e^2e'\gamma\sin(2\xi+\underset{(163)}{2\varphi+\varphi'}-\eta)$$

$$-\frac{153}{16}\, m\, ee'^2\, \gamma \sin(2\xi - \varphi - 2\varphi' - \eta) \quad (164)$$

$$+\frac{27}{16}\, m\, ee'^2\, \gamma \sin(2\xi - \varphi + 2\varphi' - \eta) \quad (165)$$

$$-\frac{135}{64}\, m\, ee'^2\, \gamma \sin(2\xi - \varphi + 2\varphi' + \eta) \quad (166)$$

$$+\frac{153}{64}\, m\, ee'^2\, \gamma \sin(2\xi + \varphi - 2\varphi' - \eta) \quad (167)$$

$$-\frac{27}{64}\, m\, ee'^2\, \gamma \sin(2\xi + \varphi + 2\varphi' - \eta) \quad (168)$$

$$+\left(\frac{9}{16} m^3 + \frac{105}{64} m^4 + \frac{11433}{5120} m^5\right) \gamma \sin(4\xi - \eta) \quad (183)$$

$$-\frac{75}{32}\, m^4\, \gamma \sin(4\xi + \eta) \quad (184)$$

$$+\left(\frac{135}{128} m^2 + \frac{297}{128} m^3\right) e\, \gamma \sin(4\xi - \varphi - \eta) \quad (185)$$

$$+\frac{675}{64}\, m^2\, e\, \gamma \sin(4\xi - \varphi + \eta) \quad (186)$$

$$+\frac{135}{64}\, m^2\, e\, \gamma \sin(4\xi + \varphi - \eta) \quad (187)$$

$$+\frac{105}{32}\, m^2\, e'\, \gamma \sin(4\xi - \varphi' - \eta) \quad (188)$$

$$-\frac{27}{32}\, m^2\, e'\, \gamma \sin(4\xi + \varphi' - \eta) \quad (189)$$

$$-\frac{495}{64}\, m^2\, e^2\, \gamma \sin(4\xi - 2\varphi - \eta) \quad (190)$$

$$+\frac{675}{64}\, m^2\, e^2\, \gamma \sin(4\xi - 2\varphi + \eta) \quad (191)$$

$$+\frac{315}{64}\, m^2\, ee'\, \gamma \sin(4\xi - \varphi - \varphi' - \eta) \quad (192)$$

$$-\frac{135}{64}\, m^2\, ee'\, \gamma \sin(4\xi - \varphi + \varphi' - \eta). \quad (193)$$

Considérons maintenant l'expression de la fonction Q qui dépend de la parallaxe solaire. Dans l'ordre d'approximation auquel nous nous arrêtons, il suffira de supposer, n° 37,

$$Q = z\left[\frac{1}{r^3} + 3m^2\left(\frac{a}{a'}\right)\cos(v - v')\right].$$

En ne tenant compte que des termes multipliés par le facteur $\frac{a}{a'}$, on a, nos 15, 26 et 21,

$$\begin{aligned}\delta\frac{1}{r} = & \left(-\frac{15}{16}m - \frac{81}{16}m^2 - \frac{5817}{256}m^3\right)\frac{a}{a'}\cos\xi \\ & + \frac{45}{16}m^2\frac{a}{a'}e\cos(\xi - \varphi) \\ & + \left(-\frac{15}{8}m - \frac{177}{16}m^2\right)\frac{a}{a'}e\cos(\xi + \varphi) \\ & + \frac{15}{16}m\frac{a}{a'}e'\cos(\xi - \varphi') \\ & + \left(\frac{5}{4} - \frac{45}{8}m\right)\frac{a}{a'}e'\cos(\xi + \varphi') \\ & + \frac{25}{64}m^2\frac{a}{a'}\cos 3\xi \\ & - \frac{475}{64}m^2\frac{a}{a'}e\cos(3\xi - \varphi) \\ & + \frac{15}{16}m^2\frac{a}{a'}e\cos(3\xi + \varphi),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2 = & -\frac{5}{4}m^2\frac{a}{a'}\cos\xi \\ & - \frac{225}{128}m^2\frac{a}{a'}e\cos(\xi - \varphi) - \frac{225}{128}m^2\frac{a}{a'}e\cos(3\xi - \varphi).\end{aligned}$$

On peut supposer ici

$$\frac{1}{r^3} = \frac{3}{r_1^2}\delta\frac{1}{r} + \frac{3}{r_1}\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2;$$

d'où, en substituant pour $\frac{1}{r_1}$ et $\frac{1}{r_1^2}$ leurs valeurs elliptiques, et pour $\delta\frac{1}{r}$, $\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2$ leurs valeurs, nos 15, 26

et 21, et en ajoutant à l'expression résultante la fonction

$$3m^2\frac{a}{a'}\cos(v-v')=3m^2\frac{a}{a'}\cos\xi-3m^2\frac{a}{a'}e\cos(\xi-\varphi)+3m^2\frac{a}{a'}e\cos(\xi+\varphi),$$

on a conclu

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^3}+3m^2\frac{a}{a'}\cos(v-v')=&\left(-\frac{45}{16}m-\frac{195}{16}m^2-\frac{18411}{256}m^3\right)\frac{a}{a'}\cos\xi\\&+\left(-\frac{45}{16}m-\frac{1923}{128}m^2\right)\frac{a}{a'}e\cos(\xi-\varphi)\\&+\left(-\frac{135}{16}m-\frac{363}{8}m^2\right)\frac{a}{a'}e\cos(\xi+\varphi)\\&+\frac{45}{16}m\frac{a}{a'}e'\cos(\xi-\varphi')\\&+\left(\frac{15}{4}-\frac{135}{8}m\right)\frac{a}{a'}e'\cos(\xi+\varphi')\\&+\frac{75}{64}m^2\frac{a}{a'}\cos 3\xi\\&-\frac{3375}{128}m^2\frac{a}{a'}e\cos(3\xi-\varphi)+\frac{255}{64}m^2\frac{a}{a'}e\cos(3\xi+\varphi).\end{aligned}$$

En n'ayant égard qu'aux termes indépendans de la parallaxe solaire, on trouve, comme on le verra n° 43,

$$\begin{aligned}s=&\left(1-\frac{m^2}{6}\right)\gamma\sin\eta+\frac{3}{2}e\gamma\sin(\varphi-\eta)+\frac{1}{2}e\gamma\sin(\varphi+\eta)\\&+\left(\frac{3}{8}m+\frac{41}{32}m^2\right)\gamma\sin(2\xi-\eta)+\frac{3}{16}m^2\gamma\sin(2\xi+\eta)\\&+\frac{9}{4}me\gamma\sin(2\xi-\varphi-\eta)+\frac{15}{16}me\gamma\sin(2\xi-\varphi+\eta)\\&+\frac{3}{16}me\gamma\sin(2\xi+\varphi-\eta).\end{aligned}$$

La combinaison de ces deux valeurs donnera

$$\begin{aligned}s\left[\frac{1}{r^3}+3m^2\frac{a}{a'}\cos(v-v')\right]=&\left(\frac{45}{32}m+\frac{1425}{256}m^2+\frac{32397}{1024}m^3\right)\frac{a}{a'}\gamma\sin(\xi-\eta)\\&+\left(-\frac{45}{32}m-\frac{195}{32}m^2-\frac{37077}{1024}m^3\right)\frac{a}{a'}\gamma\sin(\xi+\eta)\\&+\left(\frac{135}{64}m+\frac{93}{16}m^2\right)\frac{a}{a'}e\gamma\sin(\xi-\varphi-\eta)\\&+\left(\frac{45}{64}m+\frac{159}{512}m^2\right)\frac{a}{a'}e\gamma\sin(\xi-\varphi+\eta)\end{aligned}$$

$$+\left(\frac{135}{64}m+\frac{6531}{512}m^2\right)\frac{a}{a'}e\gamma\sin(\xi+\varphi-\eta)$$
$$-\frac{315}{64}m\frac{a}{a'}e\gamma\sin(\xi+\varphi+\eta).$$
$$-\frac{45}{32}m\frac{a}{a'}e'\gamma\sin(\xi-\varphi'-\eta)+\frac{45}{32}m\frac{a}{a'}e'\gamma\sin(\xi-\varphi'+\eta)$$
$$-\left(\frac{15}{8}-\frac{135}{16}m\right)\frac{a}{a'}e'\gamma\sin(\xi+\varphi'-\eta)$$
$$+\left(\frac{15}{8}-\frac{135}{16}m\right)\frac{a}{a'}e'\gamma\sin(\xi+\varphi'+\eta)$$
$$-\frac{285}{256}m^2\frac{a}{a'}\gamma\sin(3\xi-\eta)+\frac{75}{128}m^2\frac{a}{a'}\gamma\sin(3\xi+\eta)$$
$$+\frac{2355}{256}m^2\frac{a}{a'}e\gamma\sin(3\xi-\varphi-\eta)+\frac{45}{64}m\frac{a}{a'}e'\gamma\sin(3\xi+\varphi'-\eta).$$

Une première approximation donne

$$s=\left(-\frac{45}{32}m-\frac{1425}{256}m^2\right)\frac{a}{a'}\gamma\sin(\xi-\eta)+\left(-\frac{15}{32}m-\frac{85}{32}m^2\right)\frac{a}{a'}\gamma\sin(\xi+\eta$$
$$-\frac{95}{256}m^2\frac{a}{a'}\gamma\sin(3\xi-\eta).$$

On a d'ailleurs, n° 40,

$$\frac{1}{r^3}=3m^2\cos 2\xi+3e\cos\varphi+\frac{45}{8}me\cos(2\xi-\varphi).$$

La combinaison de ces valeurs donnera

$$\frac{s}{r^3}=\frac{45}{64}m^2\frac{a}{a'}\gamma\sin(\xi-\eta)+\frac{135}{64}m^2\frac{a}{a'}\gamma\sin(\xi+\eta)$$
$$+\left(-\frac{135}{64}m-\frac{225}{32}m^2\right)\frac{a}{a'}e\gamma\sin(\xi-\varphi-\eta)$$
$$+\left(-\frac{45}{64}m-\frac{15}{512}m^2\right)\frac{a}{a'}e\gamma\sin(\xi-\varphi+\eta)$$
$$+\left(-\frac{135}{64}m-\frac{4275}{512}m^2\right)\frac{a}{a'}e\gamma\sin(\xi+\varphi-\eta)$$
$$-\frac{45}{64}m\frac{a}{a'}e\gamma\sin(\xi+\varphi+\eta)-\frac{15}{8}m^2\frac{a}{a'}e\gamma\sin(3\xi-\varphi-\eta).$$

Cette valeur doit être ajoutée à celle de la fonction $z\left[\frac{1}{r^3}+3m^2\frac{a}{a'}\cos(v-v')\right]$, trouvée plus haut, pour former la valeur complète de la fonction Q. On ob-

tient ainsi

$$Q = \left(\frac{45}{32}m + \frac{1425}{256}m^2 + \frac{33117}{1024}m^3\right)\frac{a}{a'}\,\gamma \sin(\xi - \eta) \quad (169)$$

$$-\left(\frac{45}{32}m + \frac{195}{32}m^2 + \frac{34917}{1024}m^3\right)\frac{a}{a'}\,\gamma \sin(\xi + \eta) \quad (170)$$

$$-\frac{39}{32}m^2\,\frac{a}{a'}\,e\,\gamma \sin(\xi - \varphi - \eta) \quad (171)$$

$$+\frac{9}{32}m^2\,\frac{a}{a'}\,e\,\gamma \sin(\xi - \varphi + \eta) \quad (172)$$

$$+\frac{141}{32}m^2\,\frac{a}{a'}\,e\,\gamma \sin(\xi + \varphi - \eta) \quad (173)$$

$$-\frac{45}{8}m\,\frac{a}{a'}\,e\,\gamma \sin(\xi + \varphi + \eta) \quad (174)$$

$$-\frac{45}{32}m\,\frac{a}{a'}\,e'\gamma \sin(\xi - \varphi' - \eta) \quad (175)$$

$$+\frac{45}{32}m\,\frac{a}{a'}\,e'\gamma \sin(\xi - \varphi' + \eta) \quad (176)$$

$$-\left(\frac{15}{8} - \frac{135}{16}m\right)\frac{a}{a'}\,e'\,\gamma \sin(\xi + \varphi' - \eta) \quad (177)$$

$$+\left(\frac{15}{8} - \frac{135}{16}m\right)\frac{a}{a'}\,e'\,\gamma \sin(\xi + \varphi' + \eta) \quad (178)$$

$$-\frac{285}{256}m^2\,\frac{a}{a'}\,\gamma \sin(3\xi - \eta) \quad (179)$$

$$+\frac{75}{128}m^2\,\frac{a}{a'}\,\gamma \sin(3\xi + \eta) \quad (180)$$

$$+\frac{1875}{256}m^2\,\frac{a}{a'}\,e\,\gamma \sin(3\xi - \varphi - \eta) \quad (181)$$

$$+\frac{45}{64}\,m\,\frac{a}{a'}\,e'\gamma \sin(3\xi + \varphi' - \eta). \quad (182)$$

En comparant les valeurs précédentes de la fonction Q à celle que nous lui avons supposée n° 38, il

sera facile d'en conclure les valeurs des quantités Q_{105}, Q_{108}, Q_{109}, etc., qui entrent dans les équations de condition du même numéro.

41. Cela posé, si dans l'équation (26) on substitue pour $\overline{m^2}$ sa valeur, n° 37,

$$\overline{m}^2 = m^2 - \frac{3}{16}m^4 + \frac{55}{24}m^5 + \frac{2159}{144}m^6 + \frac{1997}{36}m^7,$$

et qu'on remplace Q_{105} par la quantité que cette lettre représente, on trouvera d'abord

$$\left.\begin{aligned} q_{105}\left(1 + \frac{3}{2}m^2 - \frac{9}{32}m^4 + \frac{55}{16}m^5 + \frac{2159}{96}m^6 + \frac{1997}{24}m^7 - g^2\right) \\ = \frac{9}{16}m^2 + \frac{219}{64}m^4 + \frac{13653}{1024}m^5 + \frac{510035}{12288}m^6 + \frac{33123661}{294912}m^7. \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

Le coefficient q_{105}, dans cette équation, pouvant être choisi arbitrairement, conformément à ce qui a été dit n° 12, ce qui paraîtrait le plus simple serait de disposer de cette constante de manière à ce que le terme dépendant de l'angle η fût le même dans les formules du mouvement troublé et dans les formules du mouvement elliptique, c'est-à-dire de la déterminer par la condition que les termes dépendans de cet argument, introduits par l'action des forces perturbatrices, se réduisissent d'eux-mêmes à zéro; mais les géomètres qui se sont les premiers occupés de la théorie de la Lune, ayant exprimé sa latitude en série de *sinus* d'angles proportionnels à son mouvement vrai, c'est relativement aux formules développées dans cette hypothèse, qu'ils se sont imposé la condition que le coefficient du terme dépendant de l'*argument de la latitude* fût identiquement le même dans l'orbite elliptique et dans l'orbite

troublé; cette condition, une fois satisfaite, détermine la valeur de la constante q_{105}, qu'on obtient en convertissant les formules relatives à la *longitude vraie* de la Lune en formules développées par rapport à sa *longitude moyenne;* on trouve, dans cette hypothèse,

$$q_{105} = 1 - \frac{m^2}{6} + \frac{57}{128} m^3 + \frac{10417}{4608} m^4 + \frac{73033}{24576} m^5.$$

Comme cette valeur influe ensuite sur l'expression analytique des coefficiens de toutes les autres inégalités du mouvement en latitude, ce sera celle que nous adopterons ici, par les mêmes raisons qui nous ont déterminé dans le choix des constantes arbitraires qu'introduit l'intégration des équations différentielles du rayon vecteur et de la longitude, et pour rendre plus facile la comparaison de nos formules à celles qui ont été obtenues par d'autres méthodes. Il est essentiel, au reste, d'observer, comme dans le n° 12, que la valeur arbitraire que l'on donne au coefficient q_{105} ne fait simplement qu'altérer la valeur numérique de la constante γ, qu'on doit substituer dans les formules du mouvement troublé, et qui se déduit directement des observations; il sera donc également facile, d'après ce qui a été dit numéro cité, de convertir les formules obtenues dans une certaine hypothèse faite sur la valeur de la constante q_{105}, en formules relatives à toute autre valeur assignée à la même constante.

Cela posé, la valeur précédente de q_{105} donne

$$\frac{1}{q_{105}} = 1 + \frac{m^2}{6} - \frac{57}{128} m^3 - \frac{10289}{4608} m^4.$$

Si l'on multiplie par ce facteur les deux membres de l'équation (27), on trouvera

$$1-g^2+\frac{3}{2}m^2-\frac{9}{32}m^4+\frac{55}{16}m^5+\frac{2159}{96}m^6+\frac{1997}{24}m^7$$
$$=\frac{9}{16}m^3+\frac{219}{64}m^4+\frac{13749}{1024}m^5+\frac{513965}{12288}m^6+\frac{32959213}{294912}m^7;$$

d'où l'on conclut

$$g^2=1+\frac{3}{2}m^2-\frac{9}{16}m^3-\frac{237}{64}m^4-\frac{10229}{1024}m^5-\frac{237613}{12288}m^6-\frac{8420077}{294912}m^7,$$

et par suite

$$g=1+\frac{3}{4}m^2-\frac{9}{32}m^3-\frac{273}{128}m^4-\frac{9797}{2048}m^5-\frac{199273}{24576}m^6-\frac{6657733}{589824}m^7.$$

Cette valeur détermine le mouvement moyen des nœuds de l'orbe lunaire.

42. Si l'on substitue maintenant pour c, g et $\overline{m^2}$ leurs valeurs, et qu'on remplace les quantités Q_{108}, Q_{109}, Q_{110}, Q_{111}, etc., par les fonctions que ces lettres représentent dans les autres équations de condition du n° 39, on formera les équations suivantes :

$$q_{108}\left(1+\frac{3}{2}m^2-\frac{81}{32}m^4-\frac{269}{16}m^5\right)-\frac{3}{2}+\frac{71}{128}m^2+\frac{333}{32}m^3+\frac{630035}{12288}m^4$$
$$+\frac{1686151}{8192}m^5=0,$$

$$q_{109}\left(-3+\frac{3}{2}m^2+\frac{117}{4}m^3+\frac{4335}{32}m^4+\frac{138525}{256}m^5\right)+\frac{3}{2}+\frac{m^2}{2}-\frac{1107}{128}m^3$$
$$-\frac{43835}{384}m^4-\frac{1127307}{4096}m^5=0,$$

$$q_{110}\left(\quad 2m-m^2+\frac{33}{16}m^3+\frac{183}{64}m^4\right)+\frac{3}{4}m^2+\frac{45}{32}m^3-\frac{4339}{128}m^4$$
$$-\frac{538937}{2048}m^5=0,$$

$$q_{111}\left(-2m-m^2-\frac{15}{16}m^3+\frac{255}{64}m^4\right)-\frac{3}{4}m^2-\frac{33}{32}m^3+\frac{4755}{128}m^4$$
$$+\frac{1722643}{6144}m^5=0,$$

$$q_{112}\left(6m^2+\frac{441}{16}m^3+\frac{7527}{64}m^4\right)-3m^2-\frac{9}{8}m^3+\frac{8915}{1024}m^4=0,$$

$$q_{113}(-8+6m^2)+3+\frac{5}{2}m^2=0,$$

$$q_{114}\left(1+\frac{m^2}{2}\right)-\frac{27}{8}m-\frac{369}{16}m^2-\frac{89391}{512}m^3=0,$$

$$q_{115}\left(-3+4m+\frac{m^2}{2}\right)+\frac{9}{2}m+\frac{1587}{64}m^2+\frac{32613}{256}m^3=0,$$

$$q_{116}\left(1+\frac{1}{2}m^2\right)+\frac{27}{8}m+\frac{333}{16}m^2+\frac{58047}{512}m^3=0,$$

$$q_{117}\left(-3-4m+\frac{1}{2}m^2\right)-\frac{9}{2}m-\frac{1455}{64}m^2-\frac{14991}{256}m^3=0,$$

$$q_{118}(4m-4m^2)+\frac{9}{8}m^2+\frac{171}{64}m^3=0,$$

$$q_{119}(-4m-4m^2)-\frac{9}{8}m^2-\frac{93}{64}m^3=0,$$

$$3q_{120}-\frac{13}{16}+\frac{405}{128}m=0,$$

$$15q_{121}-5=0,$$

$$2mq_{122}-\frac{939}{128}m^2=0,$$

$$-\quad 8q_{123}+\frac{135}{8}m=0,$$

$$-2mq_{124}-\frac{489}{128}m^2=0,$$

$$8q_{125}+\frac{135}{8}m=0,$$

$$q_{126}-\frac{81}{32}m=0,$$

$$3q_{127}-\frac{27}{8}m=0,$$

$$q_{128}+\frac{81}{32}m=0,$$

$$3q_{129}+\frac{27}{8}m=0,$$

$$q_{130}\left(4m - m^2 - \frac{57}{16}m^3 - \frac{255}{64}m^4 + \frac{2891}{1024}m^5\right) - \frac{3}{2}m^2 - \frac{19}{4}m^3 - \frac{67}{6}m^4$$
$$- \frac{3259}{144}m^5 - \frac{600913}{13824}m^6 = 0,$$

$$q_{131}\left(-8 + 12m - 7m^2 + \frac{75}{16}m^3\right) + \frac{3}{2}m^2 + \frac{19}{4}m^3 + \frac{67}{6}m^4 + \frac{50605}{2304}m^5 = 0,$$

$$q_{132}\left(1 - \frac{5}{2}m^2\right) - \frac{9}{4}m - \frac{291}{32}m^2 - \frac{8467}{256}m^3 - \frac{663187}{6144}m^4 = 0,$$

$$q_{133}\left(-3 + 8m - \frac{17}{2}m^2 - 21m^3\right) + \frac{45}{16}m + \frac{531}{64}m^2 + \frac{31065}{1024}m^3$$
$$+ \frac{414417}{4096}m^4 = 0,$$

$$q_{134}\left(-3 + 8m + \frac{7}{2}m^2 + 21m^3\right) + \frac{9}{16}m - \frac{27}{64}m^2 - \frac{1683}{1024}m^3$$
$$- \frac{42473}{4096}m^4 = 0,$$

$$q_{135}\left(-15 + 16m - \frac{5}{2}m^2\right) + \frac{45}{8}m^2 + \frac{573}{32}m^3 + \frac{5761}{128}m^4 = 0,$$

$$q_{136}\left(6m - 6m^2 - \frac{81}{16}m^3 - \frac{219}{64}m^4\right) - \frac{21}{4}m^2 - \frac{933}{32}m^3 - \frac{3263}{32}m^4$$
$$- \frac{539897}{2048}m^5 = 0,$$

$$q_{137}(-8 + 18m - 12m^2) + \frac{21}{4}m^2 + 30m^3 + \frac{13601}{128}m^4 = 0,$$

$$q_{138}\left(2m + 2m^2 - \frac{33}{16}m^3 - \frac{291}{64}m^4\right) + \frac{3}{4}m^2 + \frac{155}{32}m^3 + \frac{2203}{192}m^4$$
$$- \frac{23689}{18432}m^5 = 0,$$

$$q_{139}(-8 + 6m - 4m^2) - \frac{3}{4}m^2 - \frac{25}{4}m^3 - \frac{6899}{384}m^4 = 0,$$

$$q_{140}\left(-4m - m^2 + \frac{507}{16}m^3\right) + \frac{93}{16}m^2 + \frac{491}{16}m^3 + \frac{103249}{768}m^4 = 0,$$

$$q_{141}\left(4m - 7m^2 - \frac{297}{16}m^3\right) - \frac{45}{16}m^2 + \frac{249}{128}m^3 - \frac{3611}{128}m^4 = 0,$$

$$q_{142}(-8 + 12m + 11m^2) + \frac{9}{8}m + \frac{27}{32}m^2 - \frac{675}{512}m^3 = 0,$$

$$q_{143}(-24 + 20m) + \frac{225}{16}m^2 + \frac{1425}{32}m^3 = 0,$$

$$q_{144}\left(1 - \frac{15}{2}m^2\right) - \frac{21}{4}m - \frac{471}{16}m^2 - \frac{13349}{128}m^3 = 0,$$

$$q_{145}\left(-3+12m-\frac{27}{2}m^2\right)+\frac{105}{16}m+\frac{933}{32}m^2+\frac{90449}{1024}m^3=0,$$

$$q_{146}\left(1+\frac{m^2}{2}\right)+\frac{9}{4}m+\frac{3}{4}m^2-\frac{23315}{256}m^3=0,$$

$$q_{147}(-3+4m)-\frac{45}{16}m-\frac{99}{32}m^2=0,$$

$$q_{148}\left(-3+12m-\frac{3}{2}m^2\right)+\frac{21}{16}m+\frac{15}{8}m^2+\frac{157}{1024}m^3=0,$$

$$15\,q_{149}-\frac{315}{16}m^2=0,$$

$$q_{150}\left(-3+4m+\frac{13}{2}m^2\right)-\frac{9}{16}m-\frac{27}{8}m^2-\frac{5841}{1024}m^3=0,$$

$$15\,q_{151}+\frac{45}{16}m^2=0,$$

$$q_{152}(8m-13m^2)-\frac{51}{4}m^2-\frac{1577}{16}m^3=0,$$

$$8\,q_{153}-\frac{51}{4}m^2=0,$$

$$q_{154}\left(3m^2-\frac{9}{16}m^3\right)+\frac{27}{32}m^3+\frac{261}{512}m^4=0,$$

$$3\,q_{155}-\frac{159}{32}m=0,$$

$$q_{156}-\frac{45}{32}m=0,$$

$$15\,q_{157}-\frac{15}{8}m=0,$$

$$6m\,q_{158}-\frac{1659}{128}m^2=0,$$

$$6m\,q_{159}-\frac{315}{128}m^2=0,$$

$$2m\,q_{160}-\frac{573}{128}m^2=0,$$

$$2m\,q_{161}-\frac{797}{128}m^2=0,$$

$$8\,q_{162}-\frac{21}{8}m=0,$$

$$8\,q_{163}+\frac{9}{8}m=0,$$

$$q_{164} - \frac{153}{16} m = 0,$$

$$q_{165} + \frac{27}{16} m = 0,$$

$$3 q_{166} + \frac{135}{64} m = 0,$$

$$3 q_{167} - \frac{153}{64} m = 0,$$

$$3 q_{168} + \frac{27}{64} m = 0,$$

$$q_{169} \left(1 + \frac{m^2}{2}\right) + \frac{45}{32} m + \frac{1425}{256} m^2 + \frac{33117}{1024} m^3 = 0,$$

$$q_{170} \left(-3 + 4m - \frac{5}{2} m^2\right) - \frac{45}{32} m - \frac{195}{32} m^2 - \frac{34917}{1024} m^3 = 0,$$

$$2m q_{171} + \frac{39}{32} m^2 = 0,$$

$$2m q_{172} + \frac{9}{32} m^2 = 0,$$

$$2m q_{173} + \frac{141}{32} m^2 = 0,$$

$$8 q_{174} + \frac{45}{8} m = 0,$$

$$q_{175} - \frac{45}{32} m = 0,$$

$$3 q_{176} - \frac{45}{32} m = 0,$$

$$q_{177} - \frac{15}{8} + \frac{135}{16} m = 0,$$

$$3 q_{178} - \frac{15}{8} + \frac{135}{16} m = 0,$$

$$3 q_{179} + \frac{285}{256} m^2 = 0,$$

$$15 q_{180} - \frac{75}{128} m^2 = 0,$$

$$6m q_{181} + \frac{1875}{256} m^2 = 0,$$

$$3 q_{182} - \frac{45}{64} m = 0,$$

$$q_{113}\left(-8+24m-10m^2\right)+\frac{9}{16}m^3+\frac{105}{64}m^4+\frac{11433}{5120}m^5=0,$$

$$24\,q_{114}-\frac{75}{32}m^4=0,$$

$$q_{115}\left(-3+16m\right)+\frac{135}{128}m^2+\frac{297}{128}m^3=0,$$

$$15\,q_{116}-\frac{675}{64}m^3=0,$$

$$15\,q_{117}-\frac{135}{64}m^2=0,$$

$$8\,q_{118}-\frac{105}{32}m^2=0,$$

$$8\,q_{119}+\frac{27}{32}m^2=0,$$

$$8m\,q_{120}-\frac{495}{64}m^3=0,$$

$$8\,q_{121}+\frac{675}{64}m^2=0,$$

$$3\,q_{122}+\frac{315}{64}m^2=0,$$

$$3\,q_{123}+\frac{135}{64}m^2=0.$$

43. En résolvant les équations précédentes, on en tire

$$q_{108}=\frac{3}{2}-\frac{359}{128}m^2-\frac{333}{32}m^3-\frac{531683}{12288}m^4-\frac{1351687}{8192}m^5,$$

$$q_{109}=\frac{1}{2}+\frac{5}{12}m^2+\frac{255}{128}m^3+\frac{8665}{2304}m^4+\frac{14351}{4096}m^5,$$

$$q_{110}=-\frac{3}{8}m-\frac{57}{64}m^2+\frac{1081}{64}m^3+\frac{579487}{4096}m^4,$$

$$q_{111}=-\frac{3}{8}m-\frac{21}{64}m^2+\frac{2421}{128}m^3+\frac{1599145}{12288}m^4,$$

$$q_{112}=\frac{1}{2}-\frac{135}{64}m-\frac{2399}{1536}m^2,$$

$$q_{113}=\frac{3}{8}+\frac{19}{32}m^2,$$

$$q_{114}=\frac{27}{8}m+\frac{369}{16}m^2+\frac{88527}{512}m^3,$$

$$q_{115} = \frac{3}{2}m + \frac{657}{64}m^2 + \frac{14439}{256}m^3,$$

$$q_{116} = -\frac{27}{8}m - \frac{333}{16}m^2 - \frac{57183}{512}m^3,$$

$$q_{117} = -\frac{3}{2}m - \frac{357}{64}m^2 - \frac{3157}{256}m^3,$$

$$q_{118} = -\frac{9}{32}m - \frac{243}{256}m^2,$$

$$q_{119} = -\frac{9}{32}m - \frac{21}{256}m^2,$$

$$q_{120} = \frac{13}{48} - \frac{135}{128}m,$$

$$q_{121} = \frac{1}{3},$$

$$q_{122} = \frac{939}{256}m,$$

$$q_{123} = \frac{135}{64}m,$$

$$q_{124} = -\frac{489}{256}m,$$

$$q_{125} = -\frac{135}{64}m,$$

$$q_{126} = \frac{81}{32}m,$$

$$q_{127} = \frac{9}{8}m,$$

$$q_{128} = -\frac{81}{32}m,$$

$$q_{129} = -\frac{9}{8}m,$$

$$q_{130} = \frac{3}{8}m + \frac{41}{32}m^2 + \frac{5293}{1536}m^3 + \frac{148085}{18432}m^4 + \frac{7500953}{442368}m^5,$$

$$q_{131} = \frac{3}{16}m^2 + \frac{7}{8}m^3 + \frac{977}{384}m^4 + \frac{54431}{9216}m^5,$$

$$q_{132} = \frac{9}{4}m + \frac{291}{32}m^2 + \frac{9907}{256}m^3 + \frac{802867}{6144}m^4,$$

$$q_{133} = \frac{15}{16}m + \frac{337}{64}m^2 + \frac{66041}{3072}m^3 + \frac{2564659}{36864}m^4,$$

$$q_{134} = \frac{3}{16}m + \frac{23}{64}m^2 + \frac{1933}{3072}m^3 - \frac{1723}{36864}m^4,$$

$$q_{135} = \frac{3}{8}m^2 + \frac{51}{32}m^3 + \frac{1781}{384}m^4,$$

$$q_{136} = \frac{7}{8}m + \frac{367}{64}m^2 + \frac{18023}{768}m^3 + \frac{893851}{12288}m^4,$$

$$q_{137} = \frac{21}{32}m^2 + \frac{669}{128}m^3 + \frac{24635}{1024}m^4,$$

$$q_{138} = -\frac{3}{8}m - \frac{131}{64}m^2 - \frac{3131}{768}m^3 + \frac{66735}{36864}m^4,$$

$$q_{139} = -\frac{3}{32}m^2 - \frac{109}{128}m^3 - \frac{8717}{3072}m^4,$$

$$q_{140} = \frac{93}{64}m + \frac{1871}{256}m^2 + \frac{531997}{12288}m^3,$$

$$q_{141} = \frac{45}{64}m + \frac{381}{512}m^2 + \frac{47587}{4096}m^3,$$

$$q_{142} = \frac{9}{64}m + \frac{81}{256}m^2 + \frac{2121}{4096}m^3,$$

$$q_{143} = \frac{75}{128}m^2 + \frac{75}{32}m^3,$$

$$q_{144} = \frac{21}{4}m + \frac{471}{16}m^2 + \frac{36049}{256}m^3,$$

$$q_{145} = \frac{35}{16}m + \frac{591}{32}m^2 + \frac{287153}{3072}m^3,$$

$$q_{146} = -\frac{9}{4}m - \frac{3}{4}m^2 + \frac{23603}{256}m^3,$$

$$q_{147} = -\frac{15}{16}m - \frac{73}{32}m^2,$$

$$q_{148} = \frac{7}{16}m + \frac{19}{8}m^2 + \frac{28669}{3072}m^3,$$

$$q_{149} = \frac{21}{16}m^2,$$

$$q_{150} = -\frac{3}{16}m - \frac{11}{8}m^2 - \frac{12721}{3072}m^3,$$

$$q_{151} = -\frac{3}{16}m^2,$$

$$q_{152} = \frac{51}{32}m + \frac{3817}{256}m^2,$$

$$q_{153} = \frac{51}{32} m^2,$$

$$q_{154} = -\frac{9}{32} m - \frac{57}{256} m^2,$$

$$q_{155} = \frac{53}{32} m,$$

$$q_{156} = \frac{45}{32} m,$$

$$q_{157} = \frac{m}{8},$$

$$q_{158} = \frac{553}{256} m,$$

$$q_{159} = \frac{105}{256} m,$$

$$q_{160} = \frac{573}{256} m,$$

$$q_{161} = \frac{797}{256} m,$$

$$q_{162} = \frac{21}{64} m,$$

$$q_{163} = -\frac{9}{64} m,$$

$$q_{164} = \frac{153}{16} m,$$

$$q_{165} = -\frac{27}{16} m,$$

$$q_{166} = -\frac{45}{64} m,$$

$$q_{167} = \frac{51}{64} m,$$

$$q_{168} = -\frac{9}{64} m,$$

$$q_{169} = -\frac{45}{32} m - \frac{1425}{256} m^2 - \frac{323397}{1024} m^3,$$

$$q_{170} = -\frac{15}{32} m - \frac{85}{32} m^2 - \frac{44597}{3072} m^3,$$

$$q_{171} = -\frac{39}{64} m.$$

$q_{172} = -\frac{9}{64}\, m,$

$q_{173} = -\frac{141}{64}\, m,$

$q_{174} = -\frac{45}{64}\, m,$

$q_{175} = \frac{45}{32}\, m,$

$q_{176} = \frac{15}{32}\, m,$

$q_{177} = \frac{15}{8} - \frac{135}{16}\, m,$

$q_{178} = \frac{5}{8} - \frac{45}{16}\, m,$

$q_{179} = -\frac{95}{256}\, m^2,$

$q_{180} = \frac{5}{128}\, m^2,$

$q_{181} = -\frac{625}{512}\, m,$

$q_{182} = \frac{15}{64}\, m,$

$q_{183} = \frac{9}{128}\, m^3 + \frac{213}{512}\, m^4 + \frac{58953}{40960}\, m^5,$

$q_{184} = \frac{25}{256}\, m^4,$

$q_{185} = \frac{45}{128}\, m^2 + \frac{339}{128}\, m^3,$

$q_{186} = \frac{45}{64}\, m^2,$

$q_{187} = \frac{9}{64}\, m^3,$

$q_{188} = \frac{105}{256}\, m^2,$

$q_{189} = -\frac{27}{256}\, m^2,$

$q_{190} = \frac{495}{512}\, m^2,$

$$q_{101} = \frac{675}{512} m^2,$$

$$q_{102} = \frac{105}{64} m^2,$$

$$q_{103} = -\frac{45}{64} m^2.$$

44. A l'aide des valeurs précédentes, il est facile de former celle de la tangente s de la latitude. En effet, si dans l'équation

$$s = \frac{z}{r}$$

on substitue pour s l'expression que nous lui avons supposée n° 36, pour z la valeur qui résulte des calculs précédens, et pour la fonction $\frac{1}{r}$ la valeur donnée n°s 15 et 26, et qu'ensuite on combine entre eux les différens termes de ces deux dernières expressions, la comparaison des coefficiens des *sinus* dépendans des mêmes argumens donnera

$$c_{105} = 1 + \frac{33}{128} m^2 + \frac{241}{512} m^4 - \frac{82495}{24576} m^5,$$

$$c_{108} = 1 - \frac{141}{64} m^2 - \frac{99}{16} m^3 - \frac{45611}{2048} m^4 - \frac{917143}{12288} m^5,$$

$$c_{109} = 1 + \frac{m^2}{2} - \frac{105}{64} m^3 - \frac{2655}{1024} m^4 - \frac{710431}{6144} m^5,$$

$$c_{110} = -\frac{3}{8} m - \frac{9}{64} m^2 + \frac{1107}{64} m^3 + \frac{537375}{4096} m^4,$$

$$c_{111} = -\frac{3}{8} m - \frac{69}{64} m^2 + \frac{2369}{128} m^3 + \frac{1736297}{12288} m^4,$$

$$c_{112} = \frac{3}{4} - \frac{135}{64} m - \frac{1449}{512} m^2,$$

$$c_{113} = \frac{9}{8} + \frac{37}{32} m^2,$$

$$c_{114} = \frac{9}{4}m + \frac{111}{8}m^2 + \frac{30117}{256}m^3,$$

$$c_{115} = 3m + \frac{609}{32}m^2 + \frac{12383}{128}m^3,$$

$$c_{116} = -\frac{9}{4}m - \frac{123}{8}m^2 - \frac{18837}{256}m^3,$$

$$c_{117} = -3m - \frac{405}{32}m^2 - \frac{4221}{128}m^3,$$

$$c_{118} = -\frac{9}{32}m + \frac{45}{256}m^2,$$

$$c_{119} = -\frac{9}{32}m - \frac{309}{256}m^2,$$

$$c_{120} = \frac{17}{24} - \frac{135}{64}m,$$

$$c_{121} = \frac{4}{3},$$

$$c_{122} = \frac{1251}{256}m,$$

$$c_{123} = \frac{405}{64}m,$$

$$c_{124} = -\frac{801}{256}m,$$

$$c_{125} = -\frac{405}{64}m,$$

$$c_{126} = \frac{27}{16}m,$$

$$c_{127} = \frac{9}{4}m,$$

$$c_{128} = -\frac{27}{16}m,$$

$$c_{129} = -\frac{9}{4}m,$$

$$c_{130} = \frac{3}{8}m + \frac{25}{32}m^2 + \frac{2957}{1536}m^3 + \frac{86485}{18432}m^4 + \frac{4548169}{442368}m^5,$$

$$c_{131} = \frac{11}{16}m^2 + \frac{59}{24}m^3 + \frac{7063}{1152}m^4 + \frac{357745}{27648}m^5,$$

$$c_{132} = \frac{3}{2}m + \frac{105}{16}m^2 + \frac{3825}{128}m^3 + \frac{102835}{1024}m^4,$$

$$c_{133} = \frac{15}{8} m + \frac{241}{32} m^2 + \frac{45881}{1536} m^3 + \frac{1844083}{18432} m^4,$$

$$c_{134} = \frac{3}{8} m + \frac{23}{32} m^2 + \frac{2509}{1536} m^3 - \frac{3547}{18432} m^4,$$

$$c_{135} = \frac{7}{4} m^2 + \frac{287}{48} m^3 + \frac{8941}{576} m^4,$$

$$c_{136} = \frac{7}{8} m + \frac{255}{64} m^2 + \frac{3509}{256} m^3 + \frac{159337}{4096} m^4,$$

$$c_{137} = \frac{77}{32} m^2 + \frac{1949}{128} m^3 + \frac{61091}{1024} m^4,$$

$$c_{138} = - \frac{3}{8} m - \frac{115}{64} m^2 - \frac{2083}{768} m^3 + \frac{138815}{36864} m^4,$$

$$c_{139} = - \frac{11}{32} m^2 - \frac{1127}{384} m^3 - \frac{74671}{9216} m^4,$$

$$c_{140} = \frac{147}{64} m + \frac{3257}{256} m^2 + \frac{808711}{12288} m^3,$$

$$c_{141} = - \frac{15}{64} m - \frac{1555}{512} m^2 + \frac{33623}{12288} m^3,$$

$$c_{142} = \frac{27}{64} m + \frac{303}{256} m^2 + \frac{7779}{4096} m^3,$$

$$c_{143} = \frac{425}{128} m^2 + \frac{265}{24} m^3,$$

$$c_{144} = \frac{7}{2} m + \frac{171}{8} m^2 + \frac{14659}{128} m^3,$$

$$c_{145} = \frac{35}{8} m + \frac{423}{16} m^2 + \frac{58779}{512} m^3,$$

$$c_{146} = - \frac{3}{2} m - \frac{3}{4} m^2,$$

$$c_{147} = - \frac{15}{8} m - \frac{49}{16} m^2,$$

$$c_{148} = \frac{7}{8} m + \frac{19}{4} m^2,$$

$$c_{149} = \frac{49}{8} m^2,$$

$$c_{150} = - \frac{3}{8} m - \frac{11}{4} m^2,$$

$$c_{151} = - \frac{7}{8} m^2.$$

$$c_{152} = \frac{51}{52}m + \frac{2729}{256}m^2,$$

$$c_{153} = \frac{187}{32}m^2,$$

$$c_{154} = -\frac{9}{32}m - \frac{57}{255}m^2,$$

$$c_{155} = \frac{67}{16}m,$$

$$c_{156} = \frac{15}{16}m,$$

$$c_{157} = \frac{m}{2},$$

$$c_{158} = \frac{1057}{256}m,$$

$$c_{159} = -\frac{455}{256}m,$$

$$c_{160} = \frac{357}{256}m,$$

$$c_{161} = \frac{1037}{256}m,$$

$$c_{162} = \frac{63}{64}m,$$

$$c_{163} = -\frac{27}{64}m,$$

$$c_{164} = \frac{51}{8}m,$$

$$c_{165} = -\frac{9}{8}m,$$

$$c_{166} = -\frac{45}{32}m,$$

$$c_{167} = \frac{51}{32}m,$$

$$c_{168} = -\frac{9}{32}m,$$

$$c_{169} = -\frac{15}{16}m - \frac{411}{128}m^2 - \frac{11215}{512}m^3,$$

$$c_{170} = -\frac{15}{16}m - \frac{83}{16}m^2 - \frac{38917}{1536}m^3,$$

$$c_{171} = -\frac{69}{64}m,$$

$$c_{172} = -\frac{69}{64}m,$$

$$c_{173} = -\frac{171}{64}m,$$

$$c_{174} = -\frac{135}{64}m,$$

$$c_{175} = \frac{15}{16}m,$$

$$c_{176} = \frac{15}{16}m,$$

$$c_{177} = \frac{5}{4} - \frac{45}{8}m,$$

$$c_{178} = \frac{5}{4} - \frac{45}{8},$$

$$c_{179} = -\frac{95}{128}m^2,$$

$$c_{180} = \frac{15}{64}m^2,$$

$$c_{181} = -\frac{625}{512}m,$$

$$c_{182} = \frac{15}{32}m,$$

$$c_{183} = \frac{33}{128}m^2 + \frac{621}{512}m^4 + \frac{455203}{122880}m^6,$$

$$c_{184} = \frac{161}{256}m^4,$$

$$c_{185} = \frac{45}{64}m^2 + \frac{267}{64}m^3,$$

$$c_{186} = \frac{105}{32}m^2,$$

$$c_{187} = \frac{21}{32}m^2,$$

$$c_{188} = \frac{385}{256}m^2,$$

$$c_{189} = -\frac{99}{256}m^2,$$

$$c_{190} = \frac{585}{512}m^2,$$

$$c_{191} = \frac{2025}{512}m^2,$$

$$c_{192} = \frac{105}{32}m^2,$$

$$c_{193} = -\frac{45}{32}m^2.$$

CHAPITRE III.

Termes dépendans du carré et des puissances supérieures des excentricités, et de l'inclinaison mutuelle des orbites de la Lune et du Soleil, servant à compléter les expressions des coefficiens des inégalités lunaires développées dans le chapitre précédent.

45. Nous adopterons, pour déterminer les termes dont il s'agit, la même marche que celle que nous avons suivie pour déterminer les termes indépendans des excentricités et de l'inclinaison de l'orbe lunaire à l'écliptique.

Inégalités du rayon vecteur.

En développant la fonction R d'après les formules du n° 13, nous avons trouvé

$$\begin{aligned}\delta R = & \left(\frac{3}{8}m^2 + \frac{225}{32}m^3 + \frac{16751}{512}m^4 + \frac{258983}{2048}m^5 + \frac{6977767}{16384}m^6\right)e^2 \\ & + \left(\frac{3}{8}m^2 - \frac{799}{64}m^4 - \frac{2619}{32}m^5\right)e'^2 \\ & + \left[\begin{array}{l}\left(\frac{m^2}{16} + \frac{2205}{256}m^3 + \frac{130241}{3072}m^4 + \frac{570679}{2048}m^5\right)e^2 \\ -\left(\frac{3}{4}m^2 + \frac{495}{32}m^3 + \frac{28339}{256}m^4 + \frac{766271}{1024}m^5\right)e'^2\end{array}\right] e \cos \underset{(1)}{\varphi} \\ & + \left(\frac{m^2 e^2}{24} + \frac{3}{16}m^2 e'^2\right) e^2 \cos \underset{(2)}{2\varphi}\end{aligned}$$

$$+\left[\left(\frac{9}{8}m^2+\frac{975}{32}m^3+\frac{105357}{512}m^4\right)e^2+\frac{27}{32}m^2e'^2\right]e'\cos\underset{(6)}{\varphi'}$$

$$+\left(\frac{27}{16}m^2e^2+\frac{7}{8}m^2e'^2\right)e'^2\cos\underset{(7)}{2\varphi'}$$

$$+\left(\frac{3}{32}m^2e^2-\frac{27}{32}m^2e'^2\right)ee'\cos\underset{(8)}{(\varphi-\varphi')}$$

$$+\left(\frac{3}{32}m^2e^2-\frac{27}{32}m^2e'^2\right)ee'\cos\underset{(9)}{(\varphi+\varphi')}$$

$$+\left(\frac{9}{64}m^2e^2-\frac{7}{8}m^2e'^2\right)ee'^2\cos\underset{(12)}{(\varphi-2\varphi')}$$

$$+\left\{\begin{aligned}&-\left(\frac{15}{8}m^2+\frac{15}{32}m^3+\frac{6115}{512}m^4+\frac{181981}{2048}m^5\right)e^2\\&-\left(\frac{15}{8}m^2+9m^3+\frac{39}{8}m^4-\frac{6553}{48}m^5\right)e'^2\\&+\left(\frac{69}{64}m^2+\frac{15}{128}m^3\right)e^4+\left(\frac{75}{16}m^2+\frac{537}{64}m^3\right)e^2e'^2\\&+\left(\frac{39}{64}m^2-\frac{225}{32}m^3\right)e'^4+\left(\frac{5}{16}m^2+\frac{45}{16}m^3\right)\frac{a^2}{a'^2}\end{aligned}\right\}\cos\underset{(30)}{2\xi}$$

$$+\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{39}{32}m^2+\frac{30115}{2048}m^4+\frac{2276485}{24576}m^5\right)e^2\\&+\left(\frac{45}{8}m^2+\frac{39}{16}m^3-\frac{11747}{64}m^4-\frac{2450483}{1536}m^5\right)e'^2\\&+\frac{569}{320}m^2e^4-\frac{117}{64}m^2e'^4-\frac{5}{4}m^3\frac{a^2}{a'^2}\end{aligned}\right\}e\cos\underset{(31)}{(2\xi-\varphi)}$$

$$+\left[\begin{aligned}&-\left(\frac{57}{32}m^2+\frac{45}{128}m^3+\frac{14741}{512}m^4\right)e^2\\&-\left(\frac{15}{8}m^2+\frac{135}{8}m^3+\frac{7087}{128}m^4\right)e'^2\end{aligned}\right]e\cos\underset{(32)}{(2\xi+\varphi)}$$

$$-\left[\left(\frac{105}{16}m^2+\frac{313}{64}m^3+\frac{4197}{1024}m^4\right)e^2+\left(\frac{369}{64}m^2+\frac{369}{16}m^3\right)e'^2\right]e'\cos\underset{(33)}{(2\xi-\varphi')}$$

$$+\left[\left(\frac{15}{16}m^2+\frac{183}{64}m^3-\frac{93677}{1024}m^4\right)e^2+\left(\frac{3}{64}m^2-\frac{45}{16}m^3\right)e'^2\right]e'\cos\underset{(34)}{(2\xi+\varphi')}$$

$$-\frac{75}{16}m^2e^2e'^2\cos\underset{(35)}{(2\xi-2\varphi)}$$

$$+\left(\frac{273}{64}m^2 e^2+\frac{1107}{64}m^2 e'^2\right) ee' \cos(2\xi - \underset{(37)}{\varphi} - \varphi')$$

$$-\left(\frac{39}{64}m^2 e^2+\frac{9}{64}m^2 e'^2\right) ee' \cos(2\xi - \underset{(38)}{\varphi} + \varphi')$$

$$+\left(\frac{3}{4}m^2 e^2+\frac{39}{32}m^2 e'^2\right) \frac{a}{a'} \underset{(70)}{\cos\xi}$$

$$+\left(-\frac{1}{2}m^2 a_{74}+\frac{3}{4}m^2 e^2\right)\frac{a}{a'} e' \cos(\xi \underset{(74)}{+} \varphi') - \frac{m^2}{2}\frac{a}{a'} ee' \cos(\xi + \underset{(79)}{\varphi} + \varphi')$$

$$+\frac{45}{16}m^2 e^2 \underset{(86)}{\cos 4\xi} - \left(\frac{135}{32}m^2 e^2+\frac{435}{32}m^2 e'^2\right) e \cos(4\xi \underset{(87)}{-} \varphi)$$

$$+\frac{525}{32}m^2 e^2 e' \cos(4\xi \underset{(89)}{-} \varphi') - \frac{135}{32}m^2 e^2 e' \cos(4\xi \underset{(90)}{+} \varphi').$$

Si l'on fait abstraction des termes dépendans de la parallaxe solaire, on aura, en doublant l'expression précédente, celle de la fonction $r\frac{dR}{dr}$; quant aux termes qui dépendent de cette même parallaxe, en calculant séparément, d'après ce qui a été dit n° 16, les termes qui résultent de la première et de la seconde partie de la fonction R, n° 3, nous avons trouvé

$$r\frac{dR}{dr} = \left(\frac{9}{4}m^2 e^2+\frac{51}{16}m^2 e'^2\right)\frac{a}{a'} \underset{(70)}{\cos\xi}$$

$$+\left(-m^2 a_{74}+\frac{9}{4}m^2 e^2+\frac{15}{16}m^2 e'^2\right)\frac{a}{a'} e' \cos(\xi \underset{(74)}{+} \varphi')$$

$$-\frac{19}{16}m^2 \frac{a}{a'} ee' \cos(\xi + \underset{(79)}{\varphi} + \varphi').$$

Enfin, en quadruplant les termes de la fonction R multipliés par la très petite quantité $\frac{a^2}{a'^2}$, on aura les termes correspondans de la fonction $r\frac{dR}{dr}$.

46. En développant par un procédé semblable la

valeur de la fonction $\frac{dR}{dv}$, n° 3, on a formé l'expression suivante :

$$\frac{dR}{dv}=\left[\left(-\frac{2835}{128}m^3-\frac{54345}{512}m^4\right)e^2+\left(\frac{495}{16}m^3+\frac{37395}{128}m^4\right)e'^2\right]e\sin\underset{(1)}{\varphi}$$

$$+\left(\frac{75}{8}m^3+\frac{825}{32}m^4\right)e^2e'\sin\underset{(6)}{\varphi'}+\frac{525}{32}m^3e^2e'^2\sin\underset{(7)}{2\varphi'}$$

$$+\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{15}{4}m^2+\frac{5359}{256}m^4+\frac{82845}{512}m^5\right)e^2\\+\left(\frac{15}{4}m^2+18m^3+\frac{25}{4}m^4-\frac{2253}{8}m^5\right)e'^2\\-\frac{69}{32}m^2e^4-\left(\frac{75}{8}m^2+\frac{99}{4}m^3\right)e^2e'^2-\left(\frac{39}{32}m^2-\frac{225}{16}m^3\right)e'^4\\-\left(\frac{5}{8}m^2+\frac{1035}{128}m^3\right)\frac{a^2}{a'^2}\end{array}\right\}\sin\underset{(10)}{2\xi}$$

$$+\left[\begin{array}{l}\frac{9}{2}m^2-\left(\frac{39}{16}m^2+\frac{40853}{1024}m^4\right)e^2\\-\left(\frac{45}{4}m^2+\frac{27}{4}m^3-\frac{22281}{64}m^4\right)e'^2\end{array}\right]e\sin\underset{(11)}{(2\xi-\varphi)}$$

$$+\left[\begin{array}{l}-\frac{3}{2}m^2+\left(\frac{57}{16}m^2+\frac{221}{4}m^4\right)e^2\\+\left(\frac{15}{4}m^2+\frac{135}{4}m^3+\frac{6961}{64}m^4\right)e'^2\end{array}\right]e\sin\underset{(12)}{(2\xi+\varphi)}$$

$$+\left[\left(\frac{105}{8}m^2+\frac{99}{16}m^3-\frac{4463}{512}m^4\right)e^2+\left(\frac{369}{32}m^2+\frac{369}{8}m^3\right)e'^2\right]e'\sin\underset{(13)}{(2\xi-\varphi')}$$

$$+\left[\left(-\frac{15}{8}m^2-\frac{99}{16}m^3+\frac{93065}{512}m^4\right)e^2-\left(\frac{3}{32}m^2-\frac{45}{8}m^3\right)e'^2\right]e'\sin\underset{(14)}{(2\xi+\varphi')}$$

$$+\left[-\frac{15}{4}m^2+\left(\frac{75}{8}m^2-\frac{135}{4}m^3\right)e'^2\right]e^2\sin\underset{(15)}{(2\xi-2\varphi)}$$

$$+\frac{15}{16}m^2\frac{a}{a'}ee'\sin\underset{(78)}{(\xi-\varphi+\varphi')}$$

$$-\frac{45}{8}m^2e^2\sin\underset{(86)}{4\xi}+\left(\frac{135}{16}m^2e^2+\frac{435}{16}m^2e'^2\right)e\sin\underset{(87)}{(4\xi-\varphi)}$$

$$-\frac{525}{16}m^2e^2e'\sin\underset{(89)}{(4\xi-\varphi')}+\frac{135}{16}m^2e^2e'\sin\underset{(90)}{(4\xi+\varphi')}.$$

Si, conformément à ce qui a été dit n° 18, on multiplie respectivement les différens termes de cette expression par les facteurs suivants :

Argument.	Facteur pour l'intégration.
φ	$\frac{1}{c} = 1 + \frac{3}{4} m^2$,
φ'	$\frac{1}{c'} = \frac{1}{m}$,
$2\varphi'$	$\frac{1}{2c'} = \frac{1}{2m}$,
2ξ	$\frac{1}{2-2m} = \frac{1}{2}(1 + m + m^2 + m^3)$,
$2\xi - \varphi$	$\frac{1}{2-2m-c} = 1 + 2m + \frac{13}{4} m^2 + \frac{3}{8} m^2 e^2 - \frac{9}{8} m^2 e'^2$,
$2\xi + \varphi$	$\frac{1}{2-2m+c} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{3} m + \frac{25}{36} m^2 - \frac{m^2}{8} e^2 + \frac{3}{8} m^2 e'^2\right)$,
$2\xi - \varphi'$	$\frac{1}{2-3m} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{2} m + \frac{9}{4} m^2\right)$,
$2\xi + \varphi'$	$\frac{1}{2-m} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{m}{2} + \frac{m^2}{4}\right)$,
$2\xi - 2\varphi$	$\frac{1}{2-2m-2c} = -\frac{1}{2m}\left(1 + \frac{3}{4} m - \frac{3}{8} m e^2 + \frac{9}{8} m e'^2\right)$,
$\xi - \varphi + \varphi'$	$\frac{1}{1-c} = \frac{4}{3m^2}$,
4ξ	$\frac{1}{4-4m} = \frac{1}{4}$,
$4\xi - \varphi$	$\frac{1}{3-4m} = \frac{1}{3}$,
$4\xi - \varphi'$	$\frac{1}{4-5m} = \frac{1}{4}$,
$4\xi + \varphi'$	$\frac{1}{4-3m} = \frac{1}{4}$;

on trouvera

$$-\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt = \left[\begin{array}{l} -\left(\frac{2835}{128} m^3 + \frac{54345}{512} m^4\right) e^2 \\ +\left(\frac{495}{16} m^3 + \frac{37395}{128} m^4\right) e'^2 \end{array}\right] e \cos \underset{(1)}{\varphi}$$

$$+\left(\frac{75}{8} m^2 + \frac{825}{32} m^3\right) e^2 c' \cos \underset{(6)}{\varphi'} + \frac{525}{64} m^2 e^2 e'^2 \cos \underset{(7)}{2\varphi'}$$

$$+\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{15}{8}m^2+\frac{15}{8}m^3+\frac{6319}{512}m^4+\frac{95483}{1024}m^5\right)e^2\\&+\left(\frac{15}{8}m^2+\frac{87}{8}m^3+14m^4-\frac{2029}{16}m^5\right)e'^2\\&-\left(\frac{69}{64}m^2+\frac{69}{64}m^3\right)e^4-\left(\frac{75}{16}m^2+\frac{273}{16}m^3\right)e^2e'^2\\&-\left(\frac{39}{64}m^2-\frac{411}{64}m^3\right)e'^4-\left(\frac{5}{16}m^2+\frac{1115}{256}m^3\right)\frac{a^2}{a'^2}\end{aligned}\right\}\underset{(30)}{\cos 2\xi}$$

$$+\left[\begin{aligned}&-\left(\frac{39}{16}m^2+\frac{39}{8}m^3+\frac{47237}{1024}m^4\right)e^2\\&-\left(\frac{45}{4}m^2+\frac{117}{4}m^3-\frac{18753}{64}m^4\right)e'^2\end{aligned}\right]e\,\underset{(31)}{\cos(2\xi-\varphi)}$$

$$+\left[\begin{aligned}&\left(\frac{19}{16}m^2+\frac{19}{24}m^3+\frac{11119}{576}m^4\right)e^2\\&+\left(\frac{5}{4}m^2+\frac{145}{12}m^3+\frac{25595}{576}m^4\right)e'^2\end{aligned}\right]e\,\underset{(32)}{\cos(2\xi+\varphi)}$$

$$+\left[\begin{aligned}&\left(\frac{105}{16}m^2+\frac{207}{16}m^3+\frac{15409}{1024}m^4\right)e^2\\&+\left(\frac{369}{64}m^2+\frac{4059}{128}m^3\right)e'^2\end{aligned}\right]e'\,\underset{(33)}{\cos(2\xi-\varphi')}$$

$$-\left[\left(\frac{15}{16}m^2+\frac{57}{16}m^3-\frac{91241}{1024}m^4\right)e^2+\left(\frac{3}{64}m^2-\frac{357}{128}m^3\right)e'^2\right]e'\,\underset{(34)}{\cos(2\xi+\varphi')}$$

$$-\left[\frac{45}{64}m^2e^2+\left(\frac{75}{16}m-\frac{495}{32}m^2\right)e'^2\right]e^2\,\underset{(35)}{\cos(2\xi-2\varphi)}$$

$$+\frac{5}{4}\frac{a}{a'}ee'\,\underset{(78)}{\cos(\xi-\varphi+\varphi')}$$

$$-\frac{45}{32}m^2e^2\underset{(76)}{\cos 4\xi}+\left(\frac{45}{16}m^2e^2+\frac{145}{16}m^2e'^2\right)e\,\underset{(87)}{\cos(4\xi-\varphi)}$$

$$-\frac{525}{64}m^2e^2e'\underset{(89)}{\cos(4\xi-\varphi')}+\frac{135}{64}m^2e^2e'\underset{(90)}{\cos(4\xi+\varphi')}.$$

Si l'on considère séparément les termes de cette expression qui dépendent de l'excentricité e' de l'orbe solaire, et qu'on les substitue dans la formule n° 19

$$\int d'R=-m\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt+m\int\left[\begin{aligned}&r'\frac{dR}{dr'}\left(e\sin\varphi'+\frac{3}{2}e'^2\sin 2\varphi'\right)\\&+\frac{dR}{dv'}\left(2e'\cos\varphi'+\frac{5}{2}e'^2\cos 2\varphi'\right)\end{aligned}\right]dt,$$

qu'on remplace ensuite $\frac{dR}{dv'}$, $r'\frac{dR}{dr'}$ par leurs valeurs déduites de l'expression de R, au moyen des formules $\frac{dR}{dv'} = -\frac{dR}{dv}$ et $r'\frac{dR}{dr'} = -3R$, pour les termes indépendans de la parallaxe solaire, ou $\frac{dR}{dv'} = -\frac{dR}{dv}$ et $r'\frac{dR}{dr'} = -4R$, pour les termes qui dépendent de cette parallaxe, on formera l'expression suivante:

$$\begin{aligned}
\int d''R = & \left(\frac{1899}{32}m^4 + \frac{121941}{256}m^5\right) e'^2\, e \cos\varphi \\
& + \left[\left(\frac{9}{8}m^2 + \frac{975}{32}m^3 + \frac{63453}{519}m^4\right) e^2 + \frac{27}{32}m^2 e'^2\right] e' \cos\varphi' \\
& + \left(\frac{27}{16}m^2 e^2 + \frac{7}{8}m^2 e'^2\right) e'^2 \cos 2\varphi' \\
& + \left(\frac{15}{8}m^3 + \frac{57}{4}m^4 + \frac{109}{8}m^5 + \frac{1461}{128}m^3 e^2 - \frac{39}{64}m^3 e'^2\right) e'^2 \cos 2\xi \\
& - \left(\frac{45}{4}m^3 + \frac{1167}{32}m^4 - \frac{106575}{256}m^5\right) e'^2\, e \cos(2\xi - \varphi) \\
& + \left(\frac{5}{4}m^3 + \frac{1565}{96}m^4\right) e^2\, e'^2 \cos(2\xi + \varphi) \\
& + \left[\left(\frac{315}{32}m^3 + \frac{2331}{128}m^4\right) e^2 + \frac{1107}{128}m^3 e'^2\right] e' \cos(2\xi - \varphi') \\
& + \left[\left(-\frac{15}{32}m^3 - \frac{471}{128}m^4\right) e^2 - \frac{3}{128}m^3 e'^2\right] e' \cos(2\xi + \varphi') \\
& - \frac{75}{16}m^2\, e^2\, e'^2 \cos(2\xi - 2\varphi).
\end{aligned}$$

47. En faisant abstraction des termes dépendans de la parallaxe solaire, nous avons trouvé, pour la valeur de la fonction $2\int d'R + r\frac{dR}{dr}$, nº 20,

$$2\int d'R + r\frac{dR}{dr} = 4R + 2m\int\left(\frac{dR}{dv}\right) dt,$$

ou bien

$$2\int d'R + r\frac{dR}{dr} = 4R - 2\int d''R,$$

la première formule se rapportant aux termes in-

dépendans de l'excentricité de l'orbe solaire, et la seconde aux termes qui ont pour facteur cette excentricité.

Au moyen de la valeur de R, n° 45, et des valeurs précédentes de $\int\left(\frac{d\mathrm{R}}{dv}\right)dt$ et de $\int d''\mathrm{R}$, substituées dans ces deux formules, on a formé l'expression suivante :

$$2\int d'\mathrm{R}+r\frac{d\mathrm{R}}{dr}=\left\{\begin{array}{l}\left(\begin{array}{l}\frac{m^2}{4}+\frac{2205}{64}m^3+\frac{164261}{768}m^4\\ \quad+\frac{679369}{512}m^5\end{array}\right)e^2\\ -\left(\begin{array}{l}3m^2+\frac{495}{8}m^3+\frac{35935}{64}m^4\\ \quad+\frac{1010153}{256}m^5\end{array}\right)e'^2\end{array}\right\}e\cos\underset{(1)}{\varphi}$$

$$+\left(\frac{m^2}{6}e^2-\frac{3}{4}m^2e'^2\right)e^2\cos\underset{(2)}{2\varphi}$$

$$+\left[\left(\frac{9}{4}m^2+\frac{975}{16}m^3+\frac{147261}{256}m^4\right)e^2+\frac{27}{16}m^2e'^2\right]e'\cos\underset{(6)}{\varphi'}$$

$$+\left(\frac{27}{8}m^2e^2+\frac{7}{4}m^2e'^2\right)e'^2\cos\underset{(7)}{2\varphi'}$$

$$+\left(\frac{3}{8}m^2e^2-\frac{27}{8}m^2e'^2\right)ee'\cos(\varphi\underset{(8)}{-}\varphi')$$

$$+\left(\frac{3}{8}m^2e^2-\frac{27}{8}m^2e'^2\right)ee'\cos(\varphi\underset{(9)}{+}\varphi')$$

$$+\left(\frac{9}{16}m^2e^2-\frac{7}{2}m^2e'^2\right)ee'^2\cos(\varphi\underset{(12)}{-}2\varphi')$$

$$+\left\{\begin{array}{l}\left(-\frac{15}{2}m^2-\frac{45}{8}m^3-\frac{6595}{128}m^4-\frac{194619}{512}m^5\right)e^2\\ +\left(-\frac{15}{2}m^2-\frac{159}{4}m^3-48m^4+\frac{3113}{6}m^5\right)e'^2\\ +\left(\frac{69}{16}m^2+\frac{21}{8}m^3\right)e^4+\left(\frac{39}{16}m^2-\frac{861}{32}m^3\right)e'^4\\ +\left(\frac{75}{4}m^2+\frac{687}{16}m^3\right)e^2e'^2+\left(\frac{15}{8}m^2+\frac{35}{2}m^3\right)\frac{a^2}{a'^2}\end{array}\right\}\cos\underset{(30)}{2\xi}$$

$$+\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{39}{8}m^2+\frac{39}{8}m^3+\frac{35107}{512}m^4+\frac{2843329}{6144}m^5\right)e^2\\ +\left(\frac{45}{2}m^2+\frac{129}{4}m^3-\frac{2645}{4}m^4-\frac{86569}{12}m^5\right)e'^2\\ +\frac{517}{64}m^2\,e^4-\frac{117}{16}m^2\,e'^4-\frac{15}{2}m^2\,\frac{a^2}{a'^2}\end{array}\right\}e\cos(2\xi\underset{(31)}{-}\varphi)$$

$$+\left[\begin{array}{l}-\left(\frac{57}{8}m^2+\frac{121}{32}m^3+\frac{44831}{384}m^4\right)e^2\\ -\left(\frac{15}{2}m^2+70\,m^3+\frac{24391}{96}m^4\right)e'^2\end{array}\right]e\cos(2\xi\underset{(32)}{+}\varphi)$$

$$+\left[\begin{array}{l}-\left(\frac{105}{4}m^2+\frac{157}{4}m^3+\frac{13521}{256}m^4\right)e^2\\ -\left(\frac{369}{16}m^2+\frac{7011}{64}m^3\right)e'^2\end{array}\right]e'\cos(2\xi\underset{(33)}{-}\varphi')$$

$$+\left[\left(\frac{15}{4}m^2+\frac{99}{8}m^3-\frac{91793}{256}m^4\right)e^2+\left(\frac{3}{16}m^2-\frac{717}{64}m^3\right)e'^2\right]e'\cos(2\xi\underset{(34)}{+}\varphi')$$

$$-\frac{75}{8}m^2\,e^2\,e'^2\cos(2\xi\underset{(35)}{-}2\varphi)$$

$$+\left(\frac{273}{16}m^2\,e^2+\frac{1107}{16}m^2\,e'^2\right)ee'\cos(2\xi-\underset{(37)}{\varphi}-\varphi')$$

$$+\left(-\frac{39}{16}m^2\,e^2-\frac{9}{16}m^2\,e'^2\right)ee'\cos(2\xi-\underset{(38)}{\varphi}+\varphi')$$

$$+\frac{45}{4}m^2\,e^2\cos\underset{(86)}{4\xi}$$

$$+\left(-\frac{135}{8}m^2\,e^2-\frac{435}{8}m^2\,e'^2\right)e\cos(4\xi\underset{(87)}{-}\varphi)$$

$$+\frac{525}{8}m^2\,e^2\,e'\cos(4\xi\underset{(89)}{-}\varphi')-\frac{135}{8}m^2\,e^2\,e'\cos(4\xi\underset{(90)}{+}\varphi').$$

Quant aux termes qui dépendent de la parallaxe solaire ou qui sont multipliés par le très-petit facteur $\frac{a}{a'}$, dans l'ordre d'approximation auquel nous nous arrêtons, il suffira de supposer ici $\int d'\mathrm{R}=\mathrm{R}$, et

par conséquent,

$$2\int d'\mathrm{R} + r\frac{d\mathrm{R}}{dr} = 2\mathrm{R} + r\frac{d\mathrm{R}}{dr}.$$

En substituant dans cette formule pour R et $r\frac{d\mathrm{R}}{dr}$ leurs valeurs, n° 45 et en n'ayant égard qu'aux termes dépendans de la parallaxe solaire, nous avons trouvé

$$\int d'\mathrm{R} + r\frac{d\mathrm{R}}{dr} = \left(\frac{15}{4}m^2e^2 + \frac{45}{8}m^2e'^2\right)\frac{a}{a'}\underset{(70)}{\cos\xi}$$

$$+\left(-2m^2a_{74} + \frac{15}{4}m^2e^2 + \frac{15}{16}m^2e'^2\right)\frac{a}{a'}e'\cos\underset{(74)}{(\xi+\varphi')}$$

$$-\frac{35}{16}m^2\frac{a}{a'}ee'\cos\underset{(79)}{(\xi+\varphi+\varphi')}.$$

48. Au moyen de la valeur de $\delta\frac{1}{r}$, nos 15 et 26, augmentée des différens termes résultant des approximations successives qui servent à la compléter, et qu'on trouvera développés dans le n° 53, on a formé les valeurs suivantes :

$$\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2 = \left(\frac{225}{128}m^2 + \frac{3765}{256}m^3 + \frac{3006863}{36864}m^4 + \frac{3017205}{8192}m^5\right)e^2$$

$$+\left(\frac{119}{24}m^4 + \frac{171}{4}m^5\right)e'^2$$

$$+\left[\begin{array}{l}\left(\frac{225}{32}m^2 + \frac{1635}{32}m^3 + \frac{280675}{1024}m^4 + \frac{28465369}{24576}m^5\right)e^2 \\ +\left(\frac{55}{8}m^3 + \frac{17585}{192}m^4 + \frac{69873}{96}m^5\right)e'^2\end{array}\right]e\cos\varphi$$

$$+\left(\frac{1125}{128}m^2e^2 - \frac{441}{64}m^2e'^2\right)e^2\cos2\varphi$$

$$+\left(\frac{75}{16}m^2 + \frac{8345}{128}m^3 + \frac{1709177}{3072}m^4\right)e^2e'\cos\varphi'$$

$$-\frac{357}{128}m^2e^2e'^2\cos2\varphi' + \frac{525}{64}m^2e^3e'^2\cos(\varphi-2\varphi')$$

$$+\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{25}{16}m^3+\frac{4697}{1536}m^4+\frac{265525}{9216}m^5\right)e^2-\left(\frac{29}{6}m^4+\frac{1037}{36}m^5\right)e'^2\\ +\frac{30405}{4096}m^3e^4-\left(\frac{525}{32}m^2+\frac{18407}{128}m^3\right)e^2e'^2\\ +\left(\frac{225}{512}m^2+\frac{4485}{1024}m^3\right)\frac{a^2}{a'^2}+\frac{75}{64}m\,\frac{a^2}{a'^2}\,e'^2\end{array}\right\}\cos 2\xi$$

$$+\left[\begin{array}{l}\left(\frac{3695}{512}m^3+\frac{139321}{2048}m^4+\frac{156740669}{294912}m^5\right)e^2\\ +\left(\frac{49}{8}m^3+\frac{18149}{192}m^4+\frac{1012661}{1152}m^5\right)e'^2\end{array}\right]e\cos(2\xi-\varphi)$$

$$+\left[\left(\frac{255}{64}m^3-\frac{20449}{1536}m^4\right)e^2-\left(\frac{21}{2}m^3+\frac{12643}{96}m^4\right)e'^2\right]e\cos(2\xi+\varphi)$$

$$+\left[\left(\frac{315}{64}m^2+\frac{62291}{1536}m^3+\frac{3952201}{12288}m^4\right)e^2\right]e'\cos(2\xi-\varphi')$$

$$+\left[\left(-\frac{315}{64}m^2-\frac{21317}{512}m^3-\frac{2344457}{12288}m^4\right)e^2\right]e'\cos(2\xi+\varphi')$$

$$+\frac{525}{32}m^2e^2e'^2\cos(2\xi-2\varphi)$$

$$-\frac{3885}{256}m^2e^2e'^2\cos(2\xi-2\varphi-2\varphi')$$

$$+\left[\left(-\frac{225}{64}m^2e^2-\frac{5}{2}m^2e'^2\right)\right]\frac{a}{a'}\cos\xi$$

$$+\left(\frac{m^2}{3}a_{74}+\frac{4345}{384}m^2\,e^2+\frac{5}{8}m^2e'^2\right]\frac{a}{a'}e'\cos(\xi+\varphi')$$

$$+\frac{485}{384}m^2\frac{a}{a'}ee'\cos(\xi-\varphi+\varphi')+\frac{1345}{384}m^2\frac{a}{a'}ee'\cos(\xi+\varphi+\varphi')$$

$$+\frac{975}{128}m^3e^2\cos 4\xi+\left[\left(\frac{225}{32}m^2+\frac{705}{16}m^3\right)e^2-\frac{145}{8}m^2e'^2\right]e\cos(4\xi-\varphi)$$

$$+\frac{11375}{256}m^3e^2e'\cos(4\xi-\varphi')-\frac{2925}{256}m^3e^2e'\cos(4\xi+\varphi');$$

$$\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2=\left(\frac{225}{256}m^4+\frac{4005}{512}m^5\right)e^2-\frac{215}{16}m^5e'^2$$

$$+\left[\left(\frac{1125}{256}m^4+\frac{958575}{32768}m^5\right)e^2-\frac{215}{16}m^5e'^2\right]e\cos\varphi$$

$$-\frac{1425}{256}m^4e^2e'\cos\varphi'+\left(\frac{675}{128}m^4+\frac{16455}{256}m^5\right)e^2\cos 2\xi$$

$$+\left[\begin{array}{l}\left(\frac{10125}{2048}m^3+\frac{522675}{8192}m^4+\frac{205165045}{393216}m^5\right)e^2\\ \qquad+\frac{1123}{32}m^5e'^2\end{array}\right]e\cos(2\xi-\varphi)$$

$$+\frac{43875}{2048}m^4e^2\cos(2\xi+\varphi)$$

$$+\frac{7155}{256}m^4e^2e'\cos(2\xi-\varphi')+\frac{495}{256}m^4e^2e'\cos(2\xi+\varphi')$$
$$+\frac{3375}{512}m^2\frac{a}{a'}e^2e'\cos(\xi+\varphi');$$

$$\left(\delta\frac{1}{r}\right)^4=\frac{10125}{1024}m^4e^4\cos\varphi+\frac{3375}{1024}m^5e^4\cos(2\xi-\varphi).$$

49. Nous avons supposé, n° 13,

$$P=-r_1^3\left(\delta\frac{1}{r}\right)+\frac{3}{2}r_1^4\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2-2r_1^5\left(\delta\frac{1}{r}\right)^3+\frac{5}{2}r_1^6\left(\delta\frac{1}{r}\right)^4.$$

En substituant dans cette expression pour r_1^3, r_1^4, r_1^5, r_1^6, leurs valeurs elliptiques données n° 15, la seule valeur $r_1^3=1$ étant exceptée, pour $\left(\delta\frac{1}{r}\right)$, sa valeur, n°s 26 et 53, puis en remplaçant $\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2$, $\left(\delta\frac{1}{r}\right)^3$, $\left(\delta\frac{1}{r}\right)^4$, par leurs valeurs, n° 21, augmentées des termes que nous venons de déterminer dans le numéro précédent, et en n'ayant égard qu'aux quantités de l'ordre de celles que nous considérons en ce moment, on a formé l'expression suivante :

$$P=\left[\begin{array}{l}\left(\frac{11}{16}m^2-\frac{1485}{128}m^3-\frac{105595}{1536}m^4-\frac{3658541}{8192}m^5\right)e^2\\+\left(\frac{3}{4}m^2+\frac{165}{16}m^3+\frac{12179}{128}m^4+\frac{49939}{64}m^5\right)e'^2\end{array}\right]e\underset{(1)}{\cos\varphi}$$

$$+\left(-\frac{235}{32}m^2e^2-\frac{2355}{128}m^2e'^2\right)e^2\underset{(2)}{\cos 2\varphi}$$

$$+18\,m^2e^2e'\underset{(6)}{\cos\varphi'}$$

$$+\left(-\frac{63}{32}m^2e^2-\frac{81}{32}m^2e'^2\right)ee'\underset{(8)}{\cos(\varphi-\varphi')}$$

$$+\left(-\frac{63}{32}m^2e^2-\frac{81}{32}m^2e'^2\right)ee'\underset{(9)}{\cos(\varphi+\varphi')}$$

$$+\left(\frac{3}{8}m\,e^2+\frac{567}{128}m\,e'^2\right)e^2\,e'\,\cos\left(2\varphi\underset{(10)}{-}\varphi'\right)$$

$$+\left(-\frac{63}{64}m^2\,e^2-\frac{21}{8}m^2\,e'^2\right)ee'^2\,\cos\left(\varphi\underset{(12)}{-}2\varphi'\right)$$

$$+\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{45}{16}m+\frac{567}{64}m^2+\frac{32121}{1024}m^3+\frac{361769}{4096}m^4+\frac{65155029}{294912}m^5\right)e^2\\-\left(\frac{29}{4}m^4+\frac{1037}{24}m^5\right)e'^2-\left(\frac{45}{64}m+\frac{1863}{256}m^2+\frac{144045}{4096}m^3\right)e^4\\-\left(\frac{225}{32}m+\frac{2745}{64}m^2+\frac{71919}{2048}m^3\right)e^2\,e'^2\\+\frac{6525}{256}m\,e^4\,e'^2+\frac{585}{256}m\,e^2\,e'^4-\frac{2247}{512}m\,e^6\\+\left(\frac{675}{1024}m^2+\frac{13455}{2048}m^3+\frac{315}{128}m\,e^2+\frac{225}{128}m\,e'^2\right)\frac{a^2}{a'^2}\end{array}\right\}\underset{(30)}{\cos 2\xi}$$

$$+\left\{\begin{array}{l}\frac{3}{2}m^2+\frac{91}{16}m^3\\-\left(\frac{39}{8}m^2+\frac{181}{16}m^3+\frac{286763}{3072}m^4+\frac{17046533}{73728}m^5\right)e^2\\-\left(\frac{15}{4}m^2+\frac{331}{16}m^3-\frac{16559}{384}m^4-\frac{2937263}{2304}m^5\right)e'^2\\-\frac{287}{256}m^2\,e^4+\frac{39}{32}m^2\,e'^4+\frac{15}{16}m^2\,\frac{a^2}{a'^2}\end{array}\right\}e\cos\left(2\xi\underset{(31)}{-}\varphi\right)$$

$$+\left[\begin{array}{l}\frac{3}{2}m^2+\left(\frac{45}{8}m+\frac{555}{32}m^2+\frac{36013}{512}m^3+\frac{5915863}{30720}m^4\right)e^2\\-\left(\frac{15}{4}m^2+\frac{365}{8}m^3+\frac{56873}{192}m^4\right)e'^2-\frac{495}{128}m\,e^4\end{array}\right]e\cos\left(2\xi\underset{(32)}{+}\varphi\right)$$

$$+\left[\begin{array}{l}\left(\frac{105}{16}m+\frac{2397}{64}m^2+\frac{169397}{1024}m^3+\frac{2487991}{4096}m^4\right)e^2\\-\frac{1155}{128}m\,e^4-\frac{1845}{128}m\,e^2\,e'^2\end{array}\right]e'\cos\left(2\xi\underset{(33)}{-}\varphi'\right)$$

$$+\left[\begin{array}{l}\left(-\frac{45}{16}m-\frac{621}{64}m^2+\frac{114021}{3072}m^3+\frac{9520323}{12288}m^4\right)e^2\\+\frac{3015}{256}m\,e^4+\frac{45}{128}m\,e^2\,e'^2-\frac{225}{128}m\,\frac{a^2}{a'^2}\end{array}\right]e'\cos\left(2\xi\underset{(34)}{+}\varphi'\right)$$

$$+\frac{75}{8}m\,e^4\cos\left(2\xi\underset{(36)}{+}2\varphi\right)$$

$$+\left(\frac{399}{32}m^2e^2-\frac{369}{32}m^2e'^2\right)ee'\cos(2\xi-\underset{(37)}{\varphi}-\varphi')$$

$$+\left(-\frac{789}{64}m^2e^2+\frac{3}{32}m^2e'^2\right)ee'\cos(2\xi-\underset{(38)}{\varphi}+\varphi')$$

$$+\frac{105}{8}me^2e'\cos(2\xi+\underset{(39)}{\varphi}-\varphi')-\frac{45}{8}me^2e'\cos(2\xi+\underset{(40)}{\varphi}+\varphi')$$

$$+\frac{765}{64}me^2e'^2\cos(2\xi\underset{(41)}{-}2\varphi')-\frac{135}{64}me^2e'^2\cos(2\xi\underset{(42)}{+}2\varphi')$$

$$+\frac{45}{512}me^4e'^2\cos(2\xi+\underset{(56)}{2\varphi}+2\varphi')$$

$$+\left(\frac{45}{16}m^2e^2-\frac{15}{4}m^2e'^2\right)\frac{a}{a'}\underset{(70)}{\cos\xi}$$

$$+\left(\frac{m^2}{2}a_{74}+\frac{15}{32}m^2e^2+\frac{15}{16}m^2e'^2\right)\frac{a}{a'}e'\cos(\xi\underset{(74)}{+}\varphi')$$

$$+\left(\frac{15}{8}-\frac{135}{16}m+\frac{14291}{256}m^2\right)\frac{a}{a'}ee'\cos(\xi+\underset{(79)}{\varphi}+\varphi')$$

$$+\frac{1485}{128}m^3e^2\cos\underset{(86)}{4\xi}+\left(\frac{675}{64}m^2e^2+\frac{8955}{128}m^3e^2-\frac{435}{16}m^3e'^2\right)e\cos(4\xi\underset{(87)}{-}\varphi)$$

$$+\frac{17325}{256}m^3e^2e'\cos(4\xi\underset{(89)}{-}\varphi')-\frac{4455}{256}m^3e^2e'\cos(4\xi\underset{(90)}{+}\varphi').$$

Les quantités que nous venons de développer dans ce numéro et les précédens, fournissent tout ce qui est nécessaire pour la détermination complète des termes du rayon vecteur que nous avons à calculer. En effet, en comparant les valeurs des fonctions $2\int d'R+r\frac{dR}{dr}$ et P aux expressions que nous avons supposées à ces quantités dans le n° 14, on aura les valeurs des quantités que nous avons désignées par P_1, P_2, etc., R_1, R_2, P_3, R_3, etc., et en les substituant dans les équations de condition du n° 15, il en résultera autant de formules qui serviront à

déterminer, dans l'ordre de termes que nous considérons en ce moment, les valeurs des coefficiens arbitraires a_0, a_1, a_2, a_3, etc., introduits dans l'expression du rayon vecteur $\delta\frac{1}{r}$, nº 15.

50. Occupons-nous d'abord du coefficient a_0, c'est-à-dire de la partie non périodique de cette expression. Nous avons vu que la valeur de l'indéterminée a_0 pouvait être complétement fixée au moyen de l'équation (11), nº 23, lorsqu'on s'impose, comme nous sommes convenu de le faire nº 5, la condition que le *moyen mouvement* soit le même dans l'orbite elliptique de la Lune et dans son orbite troublée. Cela posé, reprenons l'équation (14) du nº 23 :

$$\frac{h^2}{r_1^2}=\frac{r\,d^2r}{dt^2}+\frac{1}{r_1}-r\left(\frac{dR}{dr}\right)-\frac{2\,dv}{dt}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt+\frac{1}{r^2}\left[\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt\right]^2. \quad (m)$$

On a généralement, nº 35,

$$r=r_1-r_1^2\,\delta\frac{1}{r}+r_1^3\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2-r_1^4\left(\delta\frac{1}{r}\right)^3+\text{etc.}$$

En substituant dans cette expression pour r_1, r_1^2, r_1^3, etc., leurs valeurs elliptiques, et pour $\left(\delta\frac{1}{r}\right)$, $\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2$, $\left(\delta\frac{1}{r}\right)^3$, etc., leurs valeurs, nºˢ 21, 26, 48 et 53, nous avons trouvé

$$\begin{aligned}
r=&-\left(1-\frac{m^2}{6}-\frac{886}{128}m^3-\frac{203153}{4608}m^4-\frac{1654449}{8192}m^5\right)e\cos\varphi\\
&-\left[m^2+\frac{19}{6}m^3+\frac{125}{18}m^4+\left(\frac{15}{8}m+\frac{173}{32}m^2+\frac{36505}{1536}m^3\right)e^2\right]\cos 2\xi\\
&-\left(\frac{15}{8}m+\frac{155}{32}m^2+\frac{25849}{1536}m^3+\frac{1058591}{18432}m^4\right)e\cos(2\xi-\varphi)\\
&-\left(\frac{17}{16}m^2+\frac{15\text{[illegible]}}{48}m^3\right)e\cos(2\xi+\varphi)\,;
\end{aligned}$$

d'où, en différentiant, on a conclu

$$\frac{d^2r}{dt^2}=\left(1-\frac{5}{3}m^2-\frac{2685}{128}m^3-\frac{492521}{4608}m^4-\frac{3587833}{8192}m^5\right)e\cos\varphi$$
$$+\left[4m^2+\frac{14}{3}m^3+\frac{58}{9}m^4+\left(\frac{15}{2}m+\frac{53}{8}m^2+\frac{22777}{384}m^3\right)e^2\right]\cos 2\xi$$
$$+\left(\frac{15}{8}m-\frac{85}{32}m^2+\frac{11929}{1536}m^3+\frac{691199}{18432}m^4\right)e\cos(2\xi-\varphi)$$
$$+\left(\frac{153}{16}m^2+\frac{249}{16}m^3\right)e\cos(2\xi+\varphi).$$

En combinant ces valeurs et en négligeant les termes périodiques et les termes indépendans de l'excentricité e, on trouve

$$\frac{rd^2r}{dt^2}=-\left(\frac{1}{2}+\frac{323}{384}m^2-\frac{1125}{256}m^3-\frac{857705}{36864}m^4-\frac{438131}{6144}m^5\right)e^2. \qquad (a)$$

Si l'on observe qu'on peut supposer ici $r\frac{dR}{dr}=2R$, en n'ayant égard qu'aux termes non périodiques du développement de la fonction R, n° 45, multipliés par e^2, on trouve

$$r\frac{dR}{dr}=\left(\frac{3}{4}m^2+\frac{225}{16}m^3+\frac{16751}{256}m^4+\frac{258983}{1024}m^5\right)e^2. \qquad (b)$$

D'après la valeur de v, n°s 30 et 57, on forme aisément la suivante :

$$\frac{dv}{dt}=2e\cos\varphi+\left[\frac{11}{4}m^2+\frac{85}{12}m^3+\left(\frac{75}{8}m+\frac{801}{32}m^2+\frac{53855}{512}m^3\right)e^2\right]\cos 2\xi$$
$$+\left(\frac{15}{4}m+\frac{143}{16}m^2+\frac{27289}{768}m^3\right)e\cos(2\xi-\varphi)$$
$$+\left(\frac{51}{8}m^2+\frac{135}{8}m^3\right)e\cos(2\xi+\varphi).$$

On a d'ailleurs, n°s 18 et 46,

$$-\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt=\left(\frac{135}{16}m^3+\frac{2649}{64}m^4+\frac{164699}{1024}m^5\right)e\cos\varphi$$
$$-\left[\frac{3}{4}m^2+\frac{3}{4}m^3+\frac{m^4}{2}-\left(\frac{15}{8}m^2+\frac{15}{8}m^3\right)e^2\right]\cos 2\xi$$
$$+\left(\frac{9}{2}m^2+9m^3+\frac{123}{8}m^4\right)e\cos(2\xi-\varphi)$$
$$-\left(\frac{m^2}{2}+\frac{m^3}{3}\right)e\cos(2\xi+\varphi).$$

En combinant ces valeurs et n'ayant égard qu'aux termes du même ordre que ceux dont nous nous occupons en ce moment, on trouve

$$-\frac{2dv}{dt}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt=\left(\frac{855}{32}m^3+\frac{17013}{128}m^4+\frac{1075595}{2048}m^5\right)e^2. \qquad (c)$$

Par les n°s 28 et 55, on a

$$\frac{1}{r^2}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt=\left[\frac{3}{4}m^2+\frac{3}{4}m^3-\left(\frac{11}{2}m^2+\frac{61}{6}m^3\right)e^2\right]\cos 2\xi$$
$$-\left(\frac{15}{4}m^2+\frac{33}{4}m^3\right)e\cos(2\xi-\varphi)$$
$$+\left(\frac{5}{4}m^2+\frac{13}{12}m^3\right)e\cos(2\xi+\varphi).$$

Cette valeur, combinée avec la valeur précédente de la fonction $-\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt$, donne

$$\frac{1}{r^2}\left[\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt\right]^2=\left(\frac{383}{64}m^4+\frac{2749}{96}m^5\right)e^2. \qquad (d)$$

Si l'on substitue les différentes valeurs (a), (b), (c), (d) dans la formule (m), et que de plus on suppose $\frac{1}{r}=\alpha_0 e^2$, on trouvera, toute réduction faite,

$$\frac{h^2}{r^2}=\left(-\frac{1}{2}-\frac{611}{384}m^2+\frac{4365}{256}m^3+\frac{3565913}{36864}m^4+\frac{1143477}{3072}m^5+\alpha_0\right)e^2. \qquad (1)$$

Considérons maintenant les termes dépendans de

l'excentricité e' de l'orbe solaire qui entrent dans l'expression de cette même quantité.

On peut supposer, dans ce cas,

$$r = 1 - \delta\frac{1}{r} + \left(\delta\frac{1}{r}\right)^2 - \left(\delta\frac{1}{r}\right)^3 + \text{etc.};$$

et, en substituant pour $\delta\frac{1}{r}$, $\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2$, $\left(\delta\frac{1}{r}\right)^3$, etc., leurs valeurs, n°s 21, 26, 48 et 53, on trouve

$$\begin{aligned} r = &- \left[m^2 + \frac{19}{6}m^3 - \left(\frac{5}{2}m^2 + \frac{239}{12}m^3\right)e'^2\right]\cos 2\xi \\ &- \left(\frac{7}{2}m^2 + \frac{157}{8}m^3\right)e'\cos(2\xi - \varphi') \\ &+ \left(\frac{m^2}{2} + \frac{91}{24}m^3\right)e'\cos(2\xi + \varphi'); \end{aligned}$$

d'où, par la différentiation, on conclut

$$\begin{aligned} \frac{d^2r}{dt^2} = &\left[4m^3 + \frac{14}{3}m^3 - \left(10m^2 + \frac{179}{3}m^3\right)e'^2\right]\cos 2\xi \\ &+ \left(14m^2 + \frac{73}{2}m^3\right)e'\cos(2\xi - \varphi') \\ &- \left(2m^2 + \frac{79}{6}m^3\right)e'\cos(2\xi + \varphi'). \end{aligned}$$

La combinaison de cette valeur avec la précédente donne

$$\frac{rd^2r}{dt^2} = \left(-15m^4 - \frac{351}{3}m^5\right)e'^2. \qquad (a')$$

D'après l'expression développée de R, n° 45, en observant que $r\frac{dR}{dr} = 2R$, on a

$$r\frac{dR}{dr} = \left(\frac{3}{4}m^2 - \frac{799}{32}m^4 - \frac{2619}{16}m^5\right)e'^2. \qquad (b')$$

D'après la valeur de v obtenue par des approxi-

mations successives, nos 30 et 57, on trouve

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} = &\left[\frac{11}{4}m^2 + \frac{85}{12}m^3 - \left(\frac{55}{8}m^2 + \frac{1217}{24}m^3\right)e'^2\right]\cos 2\xi \\ &+ \left(\frac{77}{8}m^2 + \frac{727}{16}m^3\right)e' \cos(2\xi - \varphi') \\ &- \left(\frac{11}{8}m^2 + \frac{481}{48}m^3\right)e' \cos(2\xi + \varphi').\end{aligned}$$

On a d'ailleurs, nos 18 et 46,

$$\begin{aligned}-\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt = &\left[-\frac{3}{4}m^2 - \frac{3}{4}m^3 + \left(\frac{15}{8}m^2 + \frac{87}{8}m^3\right)e'^2\right]\cos 2\xi \\ &- \left(\frac{21}{8}m^2 + \frac{99}{16}m^3\right)e' \cos(2\xi - \varphi') \\ &+ \left(\frac{3}{8}m^2 + \frac{39}{16}m^3\right)e' \cos(2\xi + \varphi');\end{aligned}$$

d'où, en combinant ces valeurs et rejetant les termes périodiques, on conclut

$$-\frac{2dv}{dt}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt = \left(-\frac{495}{32}m^4 - \frac{1593}{16}m^5\right)e'^2. \qquad (c')$$

On a trouvé, nos 28 et 55,

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^2}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt = &\left[\frac{3}{4}m^2 + \frac{3}{4}m^3 - \left(\frac{15}{8}m^2 + \frac{87}{8}m^3\right)e'^2\right]\cos 2\xi \\ &+ \left(\frac{21}{8}m^2 + \frac{99}{16}m^3\right)e' \cos(2\xi - \varphi') \\ &- \left(\frac{3}{8}m^2 + \frac{39}{16}m^3\right)e' \cos(2\xi + \varphi').\end{aligned}$$

En combinant cette valeur avec la valeur précédente de $-\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt$, et en n'ayant égard qu'aux termes du même ordre que ceux dont nous nous occupons, on en conclut

$$\frac{1}{r^2}\left[\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt\right]^2 = \left(\frac{135}{64}m^4 + \frac{243}{32}m^5\right)e'^2. \qquad (d')$$

En substituant les différentes valeurs (a'), (b'), (c'), (d') dans la formule (m), et en supposant de plus $\frac{1}{r} = \alpha'_0 e'^2$, on aura

$$\frac{h^2}{r^2} = \left(-\frac{3}{4}m^2 - \frac{217}{64}m^4 - \frac{1449}{32}m^5 + \alpha'_0\right)e'^2. \qquad (2)$$

Nous avons trouvé, n° 23, pour la partie non périodique de la fonction $\frac{h^2}{r^2}$ indépendante des excentricités e et e',

$$\frac{h^2}{r^2} = 1 - \frac{m^2}{3} - \frac{97}{144}m^4 - \frac{43}{8}m^5. \qquad (3)$$

En réunissant les trois parties (1), (2) et (3) de cette même fonction, on aura donc

$$\begin{aligned}\frac{h^2}{r^2} = 1 &- \frac{m^2}{3} - \frac{97}{144}m^4 - \frac{43}{8}m^5 \\ &- \left(\frac{1}{2} + \frac{611}{384}m^2 - \frac{4365}{256}m^3 - \frac{3565913}{36864}m^4 - \frac{1143477}{3072}m^5 - \alpha_0\right)e^2 \\ &- \left(\frac{3}{4}m^2 + \frac{217}{64}m^4 + \frac{1449}{32}m^5 - \alpha'_0\right)e'^2.\end{aligned}$$

La fonction $\frac{1}{r^2}$ est déterminée par l'équation

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{r_1^2} + \frac{2}{r_1}\delta\frac{1}{r} + \left(\delta\frac{1}{r}\right)^2.$$

Si l'on suppose, comme précédemment, $\delta\frac{1}{r} = \alpha_0 e^2 + \alpha'_0 e'^2$, et qu'on développe cette expression d'après les valeurs de $\frac{1}{r_1^2}$, $\frac{1}{r_1}$, $\delta\frac{1}{r}$, $\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2$, n°s 21, 53 et 48, en n'ayant égard qu'aux termes non périodiques, on

trouvera

$$\frac{1}{r^2} = 1 + \frac{m^2}{3} - \frac{103}{144}m^4 - \frac{7}{8}m^5$$
$$+\left(\frac{1}{2} + \frac{739}{384}m^2 + \frac{2475}{256}m^3 + \frac{1789831}{36864}m^4 + \frac{1325927}{6144}m^5 + 2\alpha_0\right)e^2$$
$$+\left(\frac{119}{24}m^4 + \frac{171}{4}m^5 + 2\alpha'_0\right)e'^2.$$

En divisant par cette valeur l'expression précédente de la fonction $\frac{h^2}{r^2}$, on forme la suivante :

$$h^2 = \left\{\frac{\begin{array}{l} 1 - \frac{m^2}{3} - \frac{97}{144}m^4 - \frac{43}{8}m^5 \\ -\left(\frac{1}{2} + \frac{611}{384}m^2 - \frac{4365}{256}m^3 - \frac{3565913}{36864}m^4 - \frac{1143477}{3072}m^5 - \alpha_0\right)e^2 \\ -\left(\frac{3}{4}m^2 + \frac{217}{64}m^4 + \frac{1449}{32}m^5 - \alpha'_0\right)e'^2 \end{array}}{\begin{array}{l} 1 + \frac{m^2}{3} - \frac{103}{144}m^4 - \frac{7}{8}m^5 \\ +\left(\frac{1}{2} + \frac{739}{384}m^2 + \frac{2475}{256}m^3 + \frac{1789831}{36864}m^4 + \frac{1325927}{6144}m^5 + 2\alpha_0\right)e^2 \\ +\left(\frac{119}{24}m^4 + \frac{171}{4}m^5 + 2\alpha'_0\right)e'^2 \end{array}}\right\}.$$

Pour faire usage de cette équation, nous observerons qu'une première approximation a donné

$$\alpha_0 = (0)\,m^2 + (0)\,m^3, \quad \alpha'_0 = \frac{m^2}{4} + (0)\,m^3;$$

en substituant ces valeurs dans les termes où α_0 et α'_0 seraient déjà multipliés par m^2, soit qu'on opère la division indiquée, soit qu'on traite la formule précédente par la méthode des coefficiens indéterminés, on trouvera

$$h^2 = 1 - \frac{2}{3}m^2 + \frac{19}{72}m^4 - \frac{9}{2}m^5$$
$$-\left(1 + \frac{547}{192}m^2 - \frac{945}{128}m^3 - \frac{913577}{18432}m^4 - \frac{993955}{6144}m^5 + \alpha_0\right)e^2$$
$$-\left(\frac{3}{4}m^2 + \frac{1475}{192}m^4 + \frac{2817}{32}m^5 + \alpha'_0\right)e'^2;$$

d'où l'on a conclu

$$\left.\begin{aligned}h = 1 - \frac{m^2}{3} + \frac{11}{144}m^4 - \frac{9}{4}m^5\\ -\left(\frac{1}{2} + \frac{611}{384}m^2 - \frac{945}{256}m^3 - \frac{895433}{36864}m^4 - \frac{995251}{12288}m^5 + \frac{1}{2}\alpha_0\right)e^2\\ -\left(\frac{3}{8}m^2 + \frac{513}{128}m^4 + \frac{2817}{64}m^5 + \frac{1}{2}\alpha'_0\right)e'^2.\end{aligned}\right\} (h)$$

En multipliant cette quantité par la valeur de $\frac{1}{r^2}$ trouvée plus haut, on formera la suivante :

$$\begin{aligned}\frac{h}{r^2} = 1 - \frac{3}{4}m^4 - \frac{25}{8}m^5\\ +\left(\frac{855}{64}m^3 + \frac{18449}{256}m^4 + \frac{3614177}{12288}m^5 + \frac{3}{2}\alpha_0\right)e^2\\ +\left(-\frac{3}{8}m^2 + \frac{79}{128}m^4 - \frac{81}{64}m^5 + \frac{3}{2}\alpha'_0\right)e'^2.\end{aligned}$$

La valeur de la fonction $\frac{1}{r^2}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt$, n°s 28 et 55, en faisant abstraction des termes périodiques, donne

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^2}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt = \frac{3}{4}m^4 + \frac{25}{8}m^5 - \left(\frac{855}{64}m^3 + \frac{18449}{256}m^4 + \frac{3614177}{12288}m^5\right)e^2\\ + \left(\frac{45}{8}m^4 + \frac{675}{16}m^5\right)e'^2.\end{aligned}$$

Si l'on substitue maintenant dans l'équation

$$\frac{dv}{dt} = \frac{h}{r^2} + \frac{1}{r^2}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt,$$

pour $\frac{h}{r^2}$ et pour $\frac{1}{r^2}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt$ les valeurs précédentes, et qu'on observe que, le premier membre devant se réduire à l'unité lorsqu'on ne considère, comme nous le faisons ici, que les termes non périodiques, on peut égaler séparément à zéro les coefficiens des termes mul-

tipliés par e^2 et par e'^2, on trouvera, pour fixer les valeurs des coefficiens indéterminés α_0 et α'_0, les équations de condition suivantes :

$$\frac{3}{2}\alpha_0 + \left(\frac{855}{64} - \frac{855}{64} = 0\right) m^2 + \left(\frac{18449}{256} - \frac{18449}{256} = 0\right) m^4$$
$$+ \left(\frac{3614177}{12288} - \frac{3614177}{12288} = 0\right) m^5 = 0,$$

$$\frac{3}{2}\alpha'_0 - \frac{3}{8}m^2 + \left(\frac{79}{128} + \frac{45}{8} = \frac{799}{128}\right) m^4 + \left(-\frac{81}{64} + \frac{675}{16} = \frac{2619}{64}\right) m^5 = 0;$$

d'où l'on conclut

$$\alpha_0 = (0)\, m^2 + (0)\, m^4 + (0)\, m^5,$$

$$\alpha'_0 = \frac{m^2}{4} - \frac{799}{192} m^4 - \frac{873}{32} m^5.$$

Nous avons supposé $\delta \frac{1}{r} = \alpha_0 e^2 + \alpha'_0 e'^2$; on aura donc pour compléter la valeur du coefficient arbitraire a_0, n° 23,

$$a_0 = \left(\frac{m^2}{4} - \frac{799}{192} m^4 - \frac{873}{32} m^5\right) e'^2;$$

en substituant de même pour α_0 et α'_0 leurs valeurs dans l'expression (n) de h, on aura :

$$h = 1 - \frac{m^2}{3} + \frac{11}{144} m^4 - \frac{9}{4} m^5$$
$$- \left(\frac{1}{2} + \frac{611}{384} m^2 - \frac{945}{256} m^3 - \frac{895433}{36864} m^4 - \frac{995251}{12288} m^5\right) e^2$$
$$- \left(\frac{m^2}{2} + \frac{185}{96} m^4 + \frac{243}{8} m^5\right) e'^2 - \frac{e^4}{8}.$$

51. Déterminons actuellement les termes dépendans du carré des excentricités e et e' qui entrent dans l'expression de la constante c, et qu'il est nécessaire

de connaître pour pouvoir effectuer le développement complet des équations de condition du n° 15.

La comparaison des termes qui dépendent de l'argument φ dans la formule (5), n° 13, donne l'équation suivante :

$$(c^2-1)\left(1-\frac{e^2}{8}+a_1\right)=c^2\,\mathrm{P}_1+\mathrm{R}_1. \qquad (p)$$

Nous avons vu, n° 12, que le coefficient indéterminé a_1 qui entre dans cette équation pouvait être choisi arbitrairement; nous supposerons ici, par les raisons exposées n° 24,

$$a_1=\frac{m^2}{6}-\frac{645}{128}m^3-\left(\frac{797}{96}m^2+\frac{23265}{512}m^3\right)e^2-\left(\frac{43}{8}m^2+\frac{8215}{128}m^3\right)e'^2.$$

En substituant cette valeur dans l'équation (p), et en remplaçant P_1, R_1 par les coefficiens qui multiplient $\cos\varphi$ dans le développement des fonctions P et $2\int d'\mathrm{R}+r\frac{d\mathrm{R}}{dr}$, on a formé l'équation suivante :

$$\begin{aligned}(c^2-1)&\left(\begin{aligned}&1-\frac{e^2}{8}+\frac{m^2}{6}-\frac{797}{96}m^2e^2-\frac{43}{8}m^2e'^2-\frac{645}{128}m^3-\frac{23265}{512}m^3e^2\\&-\frac{8215}{128}m^3e'^2\end{aligned}\right)\\
=c^2&\left[\begin{aligned}&\frac{m^2}{2}+\frac{45}{16}m^3+\left(\frac{11}{16}m^2-\frac{1485}{128}m^3-\frac{105595}{1536}m^4-\frac{3658541}{8192}m^5\right)e^2\\&+\left(\frac{3}{4}m^2+\frac{165}{16}m^3+\frac{12179}{128}m^4+\frac{49939}{64}m^5\right)e'^2\end{aligned}\right]\\
&+\left(\frac{m^2}{4}+\frac{2205}{64}m^3+\frac{164261}{768}m^4+\frac{679369}{512}m^5\right)e^2\\
&-\left(3m^2+\frac{495}{8}m^3+\frac{35935}{64}m^4+\frac{1010153}{256}m^5\right)e'^2.\end{aligned}$$

Pour satisfaire à cette équation, soit

$$\begin{aligned}c^2-1=&-\frac{3}{2}m^2+\alpha\,m^2e^2+\alpha'\,m^2e'^2-\frac{225}{16}m^3+\beta\,m^3e^2+\gamma\,m^3e'^2\\&-\frac{4035}{64}m^4+\gamma\,m^4e^2+\gamma'\,m^4e'^2-\frac{254693}{1024}m^5+\delta\,m^5e^2+\delta'm^5e'^2.\end{aligned}$$

Si l'on substitue cette valeur dans l'équation précédente, et que dans les termes multipliés par e^2 et e'^2, on égale respectivement les coefficiens des mêmes puissances de m dans les deux membres, on trouvera

$$\alpha = \frac{3}{4}, \quad \beta = \frac{675}{32}, \quad \gamma = \frac{31749}{256}, \quad \delta = \frac{2805555}{4096};$$

$$\alpha' = -\frac{9}{4}, \quad \beta' = -\frac{825}{16}, \quad \gamma' = -\frac{60963}{128}, \quad \delta' = -\frac{1739949}{512}.$$

L'expression de $c^2 - 1$, en y substituant ces valeurs, donne

$$\begin{aligned} c^2 = 1 &- \frac{3}{2}m^2 - \frac{225}{16}m^3 - \frac{4035}{64}m^4 - \frac{254693}{1024}m^5, \\ &+ \left(\frac{3}{4}m^2 + \frac{675}{32}m^3 + \frac{31749}{256}m^4 + \frac{2805555}{4096}m^5\right)e^2 \\ &- \left(\frac{9}{4}m^2 + \frac{825}{16}m^3 + \frac{60963}{128}m^4 + \frac{1739949}{512}m^5\right)e'^2. \end{aligned}$$

Soit $c^2 = 1 + \text{H}$, on en conclura, par l'extraction des racines,

$$c = 1 + \frac{1}{2}\text{H} - \frac{1}{8}\text{H}^2 + \frac{1}{16}\text{H}^3 - \text{etc.}$$

Au moyen de cette formule et de la valeur précédente de c^2, on trouve aisément

$$\begin{aligned} c = 1 &- \frac{3}{4}m^2 - \frac{225}{32}m^3 - \frac{4071}{128}m^4 - \frac{265493}{2048}m^5 \\ &+ \left(\frac{3}{8}m^2 + \frac{675}{64}m^3 + \frac{31893}{512}m^4 + \frac{2891955}{8192}m^5\right)e^2 \\ &- \left(\frac{9}{8}m^2 + \frac{825}{32}m^3 + \frac{61179}{256}m^4 + \frac{1767849}{1024}m^5\right)e'^2. \end{aligned}$$

52. Connaissant ainsi toutes les quantités qui entrent dans les équations de condition du n° 15, rien n'est plus facile que d'opérer le développement de ces équations.

L'équation qui détermine le coefficient de $\cos 2\varphi$ dans l'expression du rayon vecteur, en vertu des formules du mouvement elliptique, et en ayant égard aux termes que nous avons négligés dans le n° 15, devient

$$a_2(4c^2-1)+\left(1-\frac{e^2}{3}\right)(c^2-1)=4c^2P_2+R_2,$$

formule qui, en remplaçant c^2, P_2 et R_2 par les valeurs que ces lettres représentent, donne

$$3a_2+\frac{5}{4}m^2e^2-\frac{9}{4}m^2e'^2=4\left(-\frac{235}{32}m^2e^2-\frac{2355}{128}m^2e'^2\right)+\frac{m^2e^2}{6}-\frac{3}{4}m^2e'^2.$$

En substituant de même pour c, P_6, R_6, P_7, etc., leurs valeurs dans les autres formules du n° 15, on a formé les équations suivantes :

$$a_6(m^2-1)=18m^4+\left(\frac{9}{4}m^2+\frac{975}{16}m^3+\frac{147261}{256}m^4\right)e^2+\frac{27}{16}m^2e'^2,$$

$$-a_7=\frac{27}{8}m^2e^2+\frac{7}{4}m^2e'^2,$$

$$-2ma_8=\left(-\frac{63}{32}m^2e^2-\frac{81}{32}m^2e'^2\right)+\frac{3}{8}m^2e^2-\frac{27}{8}m^2e'^2,$$

$$2ma_9=\left(-\frac{63}{32}m^2e^2-\frac{81}{32}m^2e'^2\right)+\frac{3}{8}m^2e^2-\frac{27}{8}m^2e'^2,$$

$$3a_{10}=4\left(\frac{3}{8}m\,e^2+\frac{567}{128}m\,e'^2\right),$$

$$-4ma_{12}=\left(-\frac{63}{64}m^2e^2-\frac{21}{8}m^2e'^2\right)+\frac{9}{16}m^2e^2-\frac{7}{2}m^2e'^2,$$

$$a_{20}(3-8m+4m^2)=(4-8m+4m^2)$$

$$\times\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{45}{16}m+\frac{567}{64}m^2+\frac{32121}{1024}m^3+\frac{361769}{4096}m^4+\frac{65155029}{294912}m^5\right)e^2\\&-\left(\frac{29}{4}m^4+\frac{1037}{24}\;{}^5\right)e'^2-\left(\frac{45}{64}m+\frac{1863}{256}m^2+\frac{144045}{4096}m^3\right)e^4\\&-\left(\frac{225}{32}m+\frac{2745}{64}m^2+\frac{71919}{2048}m^3\right)e^2e'^2\\&+\frac{6525}{256}m\,e^4e'^2+\frac{585}{256}m^4e^2e'^4-\frac{2247}{512}m\,e^6\\&+\left(\frac{675}{1024}m^2+\frac{13455}{2048}m^3+\frac{315}{128}m\,e^2+\frac{225}{128}m\,e'^2\right)\frac{a^2}{a'^2}\end{aligned}\right\}$$

$$-\left(\frac{15}{2}m^2+\frac{45}{8}m^3+\frac{6595}{128}m^4+\frac{194619}{512}m^5\right)e^2$$
$$-\left(\frac{15}{2}m^2+\frac{159}{4}m^3+48\,m^4-\frac{3113}{6}m^5\right)e'^2$$
$$+\left(\frac{69}{16}m^2+\frac{21}{8}m^3\right)e^4+\left(\frac{39}{16}m^2-\frac{861}{32}m^3\right)e'^4+\left(\frac{75}{4}m^2+\frac{687}{64}m^3\right)e^2e'^2$$
$$+\left(\frac{15}{8}m^2+\frac{35}{2}m^3\right)\frac{a^2}{a'^2},$$

$$a_{21}\left[\begin{array}{l}-4m+\frac{11}{2}m^2+\frac{177}{16}m^3+\frac{2307}{64}m^4-\left(\frac{3}{4}m^2+\frac{627}{32}m^3+\frac{21237}{256}m^4\right)e^2\\ +\left(\frac{9}{4}m^2+\frac{753}{16}m^3+\frac{48195}{128}m^4\right)e'^2\end{array}\right]$$
$$=\left[1-4m+\frac{11}{2}m^2+\frac{177}{16}m^3-\left(\frac{3}{4}m^2+\frac{627}{32}m^3\right)e^2+\left(\frac{9}{4}m^2+\frac{753}{16}m^3\right)e'^2\right]$$
$$\times\left\{\begin{array}{l}\frac{3}{2}m^2+\frac{91}{16}m^3-\left(\frac{39}{8}m^2+\frac{181}{16}m^3+\frac{286763}{3072}m^4+\frac{17046533}{73728}m^5\right)e^2\\ -\left(\frac{15}{4}m^2+\frac{331}{16}m^3-\frac{16559}{384}m^4-\frac{2937263}{2304}m^5\right)e'^2\\ -\frac{287}{256}m^2e^4+\frac{39}{32}m^2e'^4+\frac{15}{16}m^2\frac{a^2}{a'^2}\end{array}\right\}$$
$$+\left(\frac{39}{8}m^2+\frac{39}{8}m^3+\frac{35107}{512}m^4+\frac{2843329}{6144}m^5\right)e^2$$
$$+\left(\frac{45}{2}m^2+\frac{129}{4}m^3-\frac{2645}{4}m^4-\frac{86569}{12}m^5\right)e'^2+\frac{517}{64}m^2e^4-\frac{117}{16}m^2e'^4-\frac{15}{2}m^2\frac{a^2}{a'^2},$$

$$a_{22}\left(8-12m-\frac{m^2}{2}-\frac{627}{16}m^3+\frac{9}{4}m^2e^2-\frac{27}{4}m^2e'^2\right)$$
$$=\left(9-12m-\frac{m^2}{2}-\frac{627}{16}m^3+\frac{9}{4}m^2e^2-\frac{27}{4}m^2e'^2\right)$$
$$\times\left[\begin{array}{l}\frac{3}{2}m^2+\left(\frac{45}{8}m+\frac{555}{32}m^2+\frac{36013}{512}m^3+\frac{5915863}{30720}m^4\right)e^2\\ \qquad-\left(\frac{15}{4}m^2+\frac{365}{8}m^3+\frac{56873}{192}m^4\right)e'^2-\frac{495}{128}m\,e^4\end{array}\right]$$
$$-\left(\frac{57}{8}m^2+\frac{121}{32}m^3+\frac{44831}{384}m^4\right)e^2-\left(\frac{15}{2}m^2+70\,m^3+\frac{24391}{96}m^4\right)e'^2,$$

$$a_{23}(3-12m+9m^2)=(4-12m+9m^2)$$
$$\times\left[\begin{array}{l}\left(\frac{105}{16}m+\frac{2397}{64}m^2+\frac{169397}{1024}m^3+\frac{2487991}{4096}m^4\right)e^2\\ -\frac{1155}{128}m\,e^4-\frac{1845}{128}m\,e^2e'^2\end{array}\right]$$
$$-\left(\frac{105}{4}m^2+\frac{157}{4}m^3+\frac{13521}{256}m^4\right)e^2-\left(\frac{369}{16}m^2+\frac{7011}{64}m^3\right)e'^2,$$

$$a_{34}(3 - 4m + m^2) = (4 - 4m + m^2)$$
$$\times \left[\left(-\frac{45}{16}m - \frac{621}{64}m^2 + \frac{114021}{3072}m^3 + \frac{9520323}{12288}m^4 \right) e^2 + \frac{3015}{256}m e^4 + \frac{45}{128}m e^2 e'^2 - \frac{225}{128}m \frac{a^2}{a'^2} \right]$$
$$+ \left(\frac{15}{4}m^2 + \frac{99}{8}m^3 - \frac{91793}{256}m^4 \right) e^2 + \left(\frac{3}{16}m^2 - \frac{717}{64}m^3 \right) e'^2,$$

$$- a_{35} = -\frac{75}{8}m^2 e'^2,$$

$$15 a_{36} = \quad 16\left(\frac{75}{8}\right) m e^2,$$

$$-6m a_{37} = \left(\frac{399}{32}m^2 e^2 - \frac{369}{32}m^2 e'^2 \right) + \frac{273}{16}m^2 e^2 + \frac{1107}{16}m^2 e'^2,$$

$$-2m a_{38} = \left(-\frac{789}{64}m^2 e^2 + \frac{3}{32}m^2 e'^2 \right) - \frac{39}{16}m^2 e^2 - \frac{9}{16}m^2 e'^2,$$

$$8 a_{39} = \frac{9.105}{8} m e^2,$$

$$8 a_{40} = -\frac{9.45}{8} m e^2,$$

$$3 a_{41} = \frac{4.765}{64} m e^2,$$

$$3 a_{42} = -\frac{4.135}{64} m e^2,$$

$$15 a_{58} = \frac{16.45}{512} m e^2,$$

$$-2m a_{70} = \left(\frac{45}{16}m^2 e^2 - \frac{15}{4}m^2 e'^2 \right) + \frac{15}{4}m^2 e^2 + \frac{45}{8}m^2 e'^2,$$

$$0 = \left(\frac{m^2}{2}a_{74} + \frac{15}{32}m^2 e^2 + \frac{15}{16}m^2 e'^2 \right) - 2a_{74} m^2$$
$$+ \frac{15}{4}m^2 e^2 + \frac{15}{16}m^2 e'^2,$$

$$a_{79}(3 - 3m^2) = (4 - 3m^2)\left(\frac{15}{8} - \frac{135}{16}m + \frac{14291}{256}m^2 \right) - \frac{35}{16}m^2,$$

$$15 a_{86} = \frac{16.1485}{128} m^3 e^2 + \frac{45}{4} m^2 e^2,$$

$$a_{87}(8 - 24m) = (9 - 24m)\left(\frac{675}{64}m^2 e^2 + \frac{8955}{128}m^3 e^2 - \frac{435}{16}m^2 e'^2 \right)$$
$$- \frac{135}{8}m^2 e^2 - \frac{435}{8}m^2 e'^2,$$

$$15 a_{89} = \frac{16.17325}{256} m^3 e^2 + \frac{525}{8} m^2 e^2,$$

$$15 a_{90} = -\frac{16.4455}{256} m^3 e^2 - \frac{135}{8} m^2 e^2.$$

53. En résolvant les équations précédentes, on en a conclu :

$$a_2 = -\frac{731}{72}m^2 e^2 - \frac{769}{32}m^2 e'^2,$$

$$a_6 = \left(-\frac{9}{4}m^2 - \frac{975}{16}m^3 - \frac{152445}{256}m^4\right) e^2 - \frac{27}{16}m^2 e'^2,$$

$$a_7 = -\frac{27}{8}m^2 e^2 - \frac{7}{4}m^2 e'^2,$$

$$a_8 = \frac{51}{64}m^2 e^2 + \frac{189}{64}m^2 e'^2,$$

$$a_9 = -\frac{51}{64}m^2 e^2 - \frac{189}{64}m^2 e'^2,$$

$$a_{10} = \frac{1}{2}m\, e^2 + \frac{189}{32}m\, e'^2,$$

$$a_{12} = \frac{27}{256}m\, e^2 + \frac{49}{32}m\, e'^2,$$

$$\begin{aligned} a_{20} = & \left(\frac{15}{4}m + \frac{189}{16}m^2 + \frac{11923}{256}m^3 + \frac{421481}{3072}m^4 + \frac{20491687}{73728}m^5\right) e^2 \\ & - \left(\frac{5}{2}m^2 + \frac{239}{12}m^3 + \frac{679}{9}m^4 + \frac{1079}{27}m^5\right) e'^2 \\ & - \left(\frac{15}{16}m + \frac{569}{64}m^2 + \frac{52363}{3072}m^3\right) e^4 \\ & - \left(\frac{75}{8}m + \frac{915}{16}m^2 + \frac{34565}{512}m^3\right) e^2 e'^2 + \left(\frac{13}{16}m^2 - \frac{653}{96}m^3\right) e'^4 \\ & + \frac{195}{64}m\, e^2 e'^4 - \frac{749}{128}m\, e^6 + \frac{6525}{256}m\, e^4 e'^2 \\ & + \left(\frac{385}{256}m^2 + \frac{8625}{512}m^3 + \frac{105}{32}m\, e^2 + \frac{75}{32}m\, e'^2\right)\frac{a^2}{a'^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{21} = & \left(-\frac{463}{128}m^2 - \frac{164503}{12288}m^3 - \frac{31493417}{147456}m^4\right) e^2 \\ & + \left(-\frac{75}{16}m - \frac{385}{32}m^2 + \frac{411641}{3072}m^3 + \frac{35232377}{18432}m^4\right) e'^2 \\ & - \frac{1781}{1024}m\, e^4 + \frac{195}{128}m\, e'^4 + \frac{105}{16}m\,\frac{a^2}{a'^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{22} = & \left(\frac{405}{64}m + \frac{5037}{256}m^2 + \frac{336689}{4096}m^3 + \frac{548723327}{245760}m^4\right) e^2 \\ & + \left(-\frac{165}{32}m^2 - \frac{995}{16}m^3 - \frac{598205}{1536}m^4\right) e'^2 - \frac{4155}{1024}m\, e^4, \end{aligned}$$

$$a_{33} = \left(\frac{35}{4}m + \frac{799}{16}m^2 + \frac{192661}{768}m^3 + \frac{3368663}{3072}m^4\right)e^2$$
$$+ \left(-\frac{123}{16}m^2 - \frac{4305}{64}m^3\right)e'^2 - \frac{385}{32}m\,e^4 - \frac{615}{32}m\,e^2\,e'^2,$$

$$a_{34} = \left(-\frac{15}{4}m - \frac{207}{16}m^2 + \frac{38103}{768}m^3 + \frac{2860769}{3072}m^4\right)e^2$$
$$+ \left(\frac{m^2}{16} - \frac{701}{192}m^3\right)e'^2 + \frac{1005}{64}m\,e^4 + \frac{15}{52}m\,e^2\,e' - \frac{75}{32}m\,\frac{a^2}{a'^2},$$

$$a_{35} = \frac{75}{8}m^2\,e'^2,$$

$$a_{36} = 10\,m\,e^2,$$

$$a_{37} = -\frac{315}{64}m\,e^2 - \frac{615}{64}m\,e'^2,$$

$$a_{38} = \frac{945}{128}m\,e^2 + \frac{15}{64}m\,e'^2,$$

$$a_{39} = \frac{945}{64}m\,e^2,$$

$$a_{40} = -\frac{405}{64}m\,e^2,$$

$$a_{41} = \frac{255}{16}m\,e^2,$$

$$a_{42} = -\frac{45}{16}m\,e^2,$$

$$a_{56} = \frac{3}{32}m\,e^2,$$

$$a_{70} = -\frac{105}{32}m\,e^2 - \frac{15}{16}m\,e'^2,$$

$$a_{74} = \frac{45}{16}e^2 + \frac{5}{4}e'^2,$$

$$a_{79} = \frac{5}{2} - \frac{45}{4}m + \frac{4757}{64}m^2,$$

$$a_{83} = \frac{105}{8}m^2\,e^2,$$

$$a_{87} = \left(\frac{6075}{512}m^2 + \frac{82485}{1024}m^3\right)e^2 - \frac{4785}{128}m^2\,e'^2,$$

$$a_{89} = \frac{1225}{16}m^2\,e^2, \quad a_{90} = -\frac{315}{16}m^2\,e^2.$$

Inégalités du mouvement en longitude.

54. Déterminons, au moyen de la formule (15), n° 27, les inégalités de la longitude correspondantes aux précédentes.

On a, n° cité,

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{r_1^2} + \frac{2}{r_1}\,\delta\frac{1}{r} + \left(\delta\frac{1}{r}\right)^2.$$

En substituant dans cette formule pour $\frac{1}{r_1^2}$ et $\frac{1}{r_1}$ leurs valeurs elliptiques, n° 5, pour $\delta\frac{1}{r}$ les valeurs qui résultent des calculs précédens, et pour $\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2$ celles qu'on trouve n°s 21 et 48, nous avons formé l'expression suivante :

$$\frac{1}{r^2} = \left[\begin{array}{l} 2 + \frac{2}{3}m^2 - \frac{525}{64}m^3 + \left(\frac{3}{4} - \frac{843}{96}m^2 e^2 - \frac{14715}{256}m^3\right)e^2 \\ -\left(\frac{41}{4}m^2 + \frac{7775}{64}m^3\right)e'^2 \end{array}\right] e \cos \underset{(1)}{\varphi}$$

$$+\left[\frac{5}{2} + \frac{11}{6}m^2 + \left(\frac{1}{3} + \frac{7097}{384}m^2\right)e^2 - \frac{3847}{64}m^2 e'^2\right] e^2 \cos \underset{(2)}{2\varphi}$$

$$-\frac{27}{8} m^2 e'^2 \cos \underset{(6)}{\varphi'}$$

$$+\left(-\frac{9}{2}m^2 + \frac{57}{64}m^2 e^2 - \frac{7}{2}m^2 e'^2\right) e'^2 \cos \underset{(7)}{2\varphi'}$$

$$+\left(\frac{21}{4}m + \frac{135}{32}m\, e^2 + \frac{189}{32}m\, e'^2\right) ee' \cos (\varphi \underset{(8)}{-} \varphi')$$

$$-\left(\frac{21}{4}m + \frac{135}{32}m\, e^2 + \frac{189}{32}m\, e'^2\right) ee' \cos (\varphi \underset{(9)}{+} \varphi')$$

$$+\left(\frac{105}{8}m + \frac{59}{8}m\, e^2 + \frac{945}{64}m\, e'^2\right) e^2 e' \cos (2\varphi \underset{(10)}{-} \varphi')$$

$$+\left(\frac{63}{16}m - \frac{1017}{256}m\, e^2 + \frac{49}{16}m\, e'^2\right) e\, e'^2 \cos (\varphi \underset{(11)}{-} 2\varphi')$$

$$+\left\{\begin{array}{l}
2m^2+\frac{19}{3}m^3+\frac{134}{9}m^4+\frac{1589}{54}m^5 \\
+\left(\begin{array}{l}\frac{75}{8}m+\frac{1009}{32}m^2+\frac{186845}{1536}m^3+\frac{6619687}{18432}m^4 \\ \quad +\frac{355502953}{442368}m^5\end{array}\right)e^2 \\
-\left(5m^2+\frac{239}{6}m^3+\frac{2803}{18}m^4+\frac{11743}{108}m^5\right)e'^2 \\
+\left(\frac{135}{32}m-\frac{379}{128}m^2+\frac{216877}{6144}m^3\right)e^4 \\
-\left(\frac{375}{16}m+\frac{4735}{32}m^2+\frac{635947}{3072}m^3\right)e^2e'^2+\left(\frac{13}{8}m^2-\frac{653}{48}m^3\right)e'^4 \\
+\frac{8775}{128}m\,e^4e'^2+\frac{975}{128}m\,e^2e'^4-\frac{2195}{256}m\,e^6 \\
+\left(\frac{1765}{512}m^2+\frac{38985}{1024}m^3+\frac{525}{64}m\,e^2+\frac{375}{64}m\,e'^2\right)\frac{a^2}{a'^2}
\end{array}\right\}\cos 2\xi \quad (30)$$

$$+\left\{\begin{array}{l}
\frac{15}{4}m+\frac{203}{16}m^2+\frac{34585}{768}m^3+\frac{1309955}{9216}m^4 \\
+\left(\frac{15}{4}m+\frac{177}{64}m^2+\frac{115941}{6144}m^3-\frac{6865743}{24576}m^4\right)e^2 \\
+\left(-\frac{75}{8}m-\frac{425}{16}m^2+\frac{390457}{1536}m^3+\frac{35408233}{9216}m^4\right)e'^2 \\
-\frac{101}{512}m\,e^4+\frac{195}{64}m\,e'^4+\frac{105}{32}m\frac{a^2}{a'^2}
\end{array}\right\}e\cos(2\xi-\varphi) \quad (31)$$

$$+\left\{\begin{array}{l}
\frac{41}{8}m^2+\frac{379}{24}m^3+\frac{22375}{576}m^4 \\
+\left(\frac{585}{32}m+\frac{7729}{128}m^2+\frac{1509983}{6144}m^3+\frac{244496585}{368640}m^4\right)e^2 \\
-\left(\frac{205}{16}m^2+\frac{3715}{24}m^3+\frac{2271871}{2304}m^4\right)e'^2-\frac{3705}{512}m\,e^4
\end{array}\right\}e\cos(2\xi+\varphi) \quad (32)$$

$$+\left\{\begin{array}{l}
7m^2+\frac{157}{4}m^3+\frac{3341}{24}m^4 \\
+\left(\frac{175}{8}m+\frac{4219}{32}m^2+\frac{996169}{1536}m^3+\frac{17091571}{6144}m^4\right)e^2 \\
-\left(\frac{123}{8}m^2+\frac{4305}{32}m^3\right)e'^2-\frac{945}{64}m\,e^4-\frac{3075}{64}m\,e^2e'^2
\end{array}\right\}e'\cos(2\xi-\varphi') \quad (33)$$

$$+\left\{\begin{array}{l}
-m^2-\frac{91}{12}m^3-\frac{1385}{72}m^4 \\
-\left(\frac{75}{8}m+\frac{1067}{32}m^2+\frac{168211}{1536}m^3+\frac{43411183}{18432}m^4\right)e^2 \\
+\left(\frac{m^2}{8}-\frac{701}{96}m^3\right)e'^2+\frac{4185}{128}m\,e^4+\frac{75}{64}m\,e^2e'^2-\frac{375}{64}m\frac{a^2}{a'^2}
\end{array}\right\}e'\cos(2\xi+\varphi') \quad (34)$$

$$+\left[\begin{array}{c}\frac{15}{8}m-\frac{21}{32}m^2+\left(\frac{15}{8}m-\frac{37}{64}m^2\right)e^2\\ -\left(\frac{75}{16}m-\frac{165}{8}m^2\right)e'^2\end{array}\right]e^2\cos(2\xi\underset{(35)}{-}2\varphi)$$

$$+\frac{515}{16}m\,e^4\cos(2\xi\underset{(36)}{+}2\varphi)$$

$$+\left(\frac{35}{4}m-\frac{35}{32}m\,e^2-\frac{615}{32}m\,e'^2\right)ee'\cos(2\xi-\underset{(37)}{\varphi}-\varphi')$$

$$+\left(-\frac{15}{4}m+\frac{705}{64}m\,e^2+\frac{15}{32}m\,e'^2\right)ee'\cos(2\xi-\underset{(38)}{\varphi}+\varphi')$$

$$+\frac{1365}{32}m\,e^3\,e'\cos(2\xi+\underset{(39)}{\varphi}-\varphi')$$

$$-\frac{585}{32}m\,e^3\,e'\cos(2\xi+\underset{(40)}{\varphi}+\varphi')$$

$$+\frac{1275}{32}m\,e^2\,e'^2\cos(2\xi\underset{(41)}{-}2\varphi')-\frac{225}{32}m\,e^2\,e'^2\cos(2\xi\underset{(42)}{+}2\varphi')$$

$$-\frac{1749}{512}m\,e^4\,e'^2\cos(2\xi+\underset{(56)}{2\varphi}+2\varphi')$$

$$+\left(-\frac{15}{8}m-\frac{135}{16}m\,e^2-\frac{15}{8}m\,e'^2\right)\frac{a}{a'}\cos\underset{(70)}{\xi}$$

$$+\left(\frac{65}{8}e^2+\frac{5}{2}e'^2\right)\frac{a}{a'}e'\cos(\xi\underset{(74)}{+}\varphi')$$

$$+\frac{2415}{64}m^2\,e^2\cos\underset{(86)}{4\xi}$$

$$+\left[\frac{615}{64}m^2+\left(\frac{8775}{256}m^2+\frac{124545}{512}m^3\right)e^2-\frac{5945}{64}m^2\,e'^2\right]\cos(4\xi\underset{(87)}{-}\varphi).$$

$$+\frac{28175}{128}m^2\,e^2\,e'\cos(4\xi\underset{(89)}{-}\varphi')$$

$$-\frac{7245}{128}m^2\,e^2\,e'\cos(4\xi\underset{(90)}{+}\varphi').$$

55. En combinant les différens termes de l'expres-

sion de $\frac{1}{r^2}$, n°s 27 et 54, avec ceux de la fonction $-\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt$, n°s 18 et 46, on a formé la valeur suivante :

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{r^2}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt = & -\left(\frac{855}{64}m^3+\frac{18449}{256}m^4+\frac{3614177}{12288}m^5\right)e^2 \\
& +\left(\frac{45}{8}m^4+\frac{675}{16}m^5\right)e'^2 \\
& -\left[\left(\frac{225}{64}m^2+\frac{7935}{256}m^3\right)e^2+\frac{825}{32}m^2e'^2\right]e\cos\underset{(1)}{\varphi} \\
& -\frac{1125}{128}m^2e^4\cos\underset{(2)}{2\varphi}-\frac{525}{64}m^2e^2e'^2\cos\underset{(7)}{2\varphi'} \\
& -\left\{\begin{array}{l}
\left(\frac{11}{2}m^2+\frac{61}{6}m^3+\frac{47363}{1152}m^4+\frac{5714621}{27648}m^5\right)e^2 \\
+\left(\frac{15}{8}m^2+\frac{87}{8}m^3+\frac{141}{8}m^4-\frac{1887}{16}m^5\right)e'^2 \\
+\left(\frac{75}{32}m+\frac{143}{128}m^2+\frac{60359}{3072}m^3\right)e^4 \\
-\left(\frac{55}{4}m^2+\frac{1951}{24}m^3\right)e^2e'^2 \\
-\left(\frac{39}{64}m^2-\frac{411}{64}m^3\right)e'^4-\frac{375}{64}me^4e'^2+\frac{5}{16}me^6 \\
-\left(\frac{5}{16}m^2+\frac{875}{256}m^3\right)\frac{a^2}{a'^2}
\end{array}\right\}\cos\underset{(30)}{2\xi} \\
& -\left\{\begin{array}{l}
\left(\begin{array}{l}\frac{15}{8}m+\frac{35}{16}m^2+\frac{15929}{1536}m^3 \\ \qquad +\frac{419351}{9216}m^4\end{array}\right)e^2 \\
-\left(\frac{75}{8}m^2+\frac{105}{4}m^3-\frac{27933}{128}m^4\right)e'^2 \\
+\frac{45}{64}me^4
\end{array}\right\}e\cos\underset{(31)}{(2\xi-\varphi)} \\
& -\left\{\begin{array}{l}
\left(\frac{249}{32}m^2+\frac{425}{32}m^3+\frac{1033395}{9216}m^4\right)e^2 \\
+\left(\frac{25}{8}m^2+\frac{185}{6}m^3+\frac{150337}{1152}m^4\right)e'^2 \\
+\frac{195}{64}me^4
\end{array}\right\}e\cos\underset{(32)}{(2\xi+\varphi)}
\end{aligned}
$$

$$-\left[\begin{array}{l}\left(\frac{77}{4}m^2+\frac{2155}{32}m^3+\frac{65571}{256}m^4\right)e^2\\+\left(\frac{369}{64}m^2+\frac{4059}{128}m^3\right)e'^2\end{array}\right]e'\cos(2\xi\underset{(33)}{-}\varphi')$$

$$+\left[\begin{array}{l}\left(\frac{11}{4}m^2+\frac{1585}{96}m^3-\frac{220591}{2304}m^4\right)e^2\\+\left(\frac{3}{64}m^2-\frac{357}{128}m^3\right)e'^2\end{array}\right]e'\cos(2\xi\underset{(34)}{+}\varphi')$$

$$-\left[\left(\frac{15}{16}m+\frac{7}{32}m^2\right)e^2-\left(\frac{75}{16}m-\frac{105}{16}m^2\right)e'^2\right]e^2\cos(2\xi\underset{(35)}{-}2\varphi)$$

$$-\frac{35}{8}m\,e^2\,e'\cos(2\xi-\underset{(37)}{\varphi}-\varphi')$$

$$+\frac{15}{8}m\,e^2\,e'\cos(2\xi-\underset{(38)}{\varphi}+\varphi')$$

$$-\frac{5}{4}\frac{a}{a'}e^2\,e'\cos(\xi\underset{(74)}{+}\varphi')$$

$$+\frac{435}{64}m^2\,e^2\cos\underset{(86)}{4\xi}-\left(\frac{3825}{128}m^2\,e^2+\frac{725}{32}m^2\,e'^2\right)e\cos(4\xi\underset{(87)}{-}\varphi)$$

$$+\frac{5075}{128}m^2\,e^2\,e'\cos(4\xi\underset{(89)}{-}\varphi')-\frac{1305}{128}m^2\,e^2\,e'\cos(4\xi\underset{(90)}{+}\varphi').$$

56. Cela posé, si l'on substitue à la place de $\frac{1}{r^2}$ et de $\frac{1}{r^2}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt$, leurs valeurs dans l'équation (15), nº 27, qu'on remplace h par sa valeur, nº 50, et qu'à la place de $\frac{dv}{dt}$ on substitue sa valeur en série obtenue comme il a été dit nº 29, en ayant égard à la valeur de c, nº 51, la comparaison des termes affectés des mêmes *cosinus* donnera les équations suivantes :

$$b_1\left[1-\frac{3}{4}m^2-\frac{225}{32}m^3+\left(\frac{3}{8}m^2+\frac{675}{64}m^3\right)e^2-\left(\frac{9}{8}m^2+\frac{825}{32}m^3\right)e'^2\right]$$
$$=\left[1-\frac{m^2}{3}-\left(\frac{1}{2}+\frac{611}{384}m^2-\frac{945}{256}m^3\right)e^2-\frac{m^2\,e'^2}{2}\right]$$
$$\times\left[\begin{array}{l}2+\frac{2}{3}m^2-\frac{525}{64}m^3+\left(\frac{3}{4}-\frac{843}{96}m^2\,e^2-\frac{14715}{256}m^3\right)e^2\\-\left(\frac{41}{4}m^2+\frac{7775}{64}m^3\right)e'^2\end{array}\right]$$

$$-\left(\frac{225}{64}m^3+\frac{7935}{256}m^4\right)e^2-\frac{825}{32}m^3e'^2,$$

$$2b_5\left(1-\frac{3}{4}m^2+\frac{3}{8}m^2e^2-\frac{9}{8}m^2e'^2\right)$$
$$=\left[1-\frac{m^2}{3}-\left(\frac{1}{2}+\frac{611}{384}m^2\right)e^2-\frac{m^2e'^2}{2}\right]$$
$$\times\left[\frac{5}{2}+\frac{11}{6}m^2+\left(\frac{1}{3}+\frac{7097}{384}m^2\right)e^2-\frac{3847}{64}m^2e'^2\right]-\frac{1125}{128}m^2e^2,$$

$$mb_6=-\frac{27}{8}m^2e'^2,$$

$$2mb_7=\left(1-\frac{e^2}{2}\right)\left(-\frac{9}{2}m^2+\frac{57}{64}m^2e^2-\frac{7}{2}m^2e'^2\right)-\frac{525}{64}m^2e^2,$$

$$b_8=\left(1-\frac{e^2}{2}\right)\left(\frac{21}{4}m+\frac{135}{32}m\,e^2+\frac{189}{32}m\,e'^2\right),$$

$$b_9=\left(1-\frac{e^2}{2}\right)\left(-\frac{21}{4}m-\frac{135}{32}m\,e^2-\frac{189}{32}m\,e'^2\right),$$

$$2b_{10}=\left(1-\frac{e^2}{2}\right)\left(\frac{105}{8}m+\frac{59}{8}m\,e^2+\frac{945}{64}m\,e'^2\right),$$

$$b_{12}=\left(1-\frac{e^2}{2}\right)\left(\frac{63}{16}m-\frac{1017}{256}m\,e^2+\frac{49}{16}m\,e'^2\right);$$

$$2(1-m)b_{20}=\left[1-\frac{m^2}{3}+\frac{11}{144}m^4-\left(\frac{1}{2}+\frac{611}{384}m^2-\frac{945}{256}m^3\right)e^2-\frac{e^4}{8}-\frac{m^2e'^2}{2}\right]$$
$$\times\left\{\begin{aligned}&2m^2+\frac{19}{3}m^3+\frac{134}{9}m^4+\frac{1589}{54}m^5\\&+\left(\begin{aligned}&\frac{75}{8}m+\frac{1009}{32}m^2+\frac{186845}{1536}m^3+\frac{6619687}{18432}m^4\\&+\frac{355502953}{442368}m^5\end{aligned}\right)e^2\\&-\left(5m^2+\frac{239}{6}m^3+\frac{2803}{18}m^4+\frac{11743}{108}m^5\right)e'^2\\&+\left(\frac{135}{32}m-\frac{379}{128}m^2+\frac{216877}{6144}m^3\right)e^4\\&-\left(\frac{375}{16}m+\frac{4735}{32}m^2+\frac{635947}{3072}m^3\right)e^2e'^2\\&+\left(\frac{13}{8}m^2-\frac{653}{48}m^3\right)e'^4\\&+\frac{8775}{128}m\,e^4e'^2+\frac{975}{128}m\,e^2e'^4-\frac{2195}{256}m\,e^6\\&+\left(\frac{1765}{512}m^2+\frac{38985}{1024}m^3+\frac{525}{64}m\,e^2+\frac{375}{64}m\,e'^2\right)\frac{a^2}{a'^2}\end{aligned}\right\}$$

$$-\left(\frac{11}{2}m^2+\frac{61}{6}m^3+\frac{47363}{1152}m^4+\frac{5714621}{27648}m^5\right)e^2$$
$$-\left(\frac{15}{8}m^2+\frac{87}{8}m^3+\frac{141}{8}m^4-\frac{1887}{16}m^5\right)e'^2$$
$$-\left(\frac{75}{32}m+\frac{143}{128}m^2+\frac{70093}{6144}m^3\right)e^4$$
$$+\left(\frac{55}{4}m^2+\frac{1951}{24}m^3\right)e^2e'^2+\left(\frac{39}{64}m^2-\frac{411}{64}m^3\right)e'^4$$
$$+\frac{375}{64}me^4e'^2-\frac{5}{16}me^6$$
$$+\left(\frac{5}{16}m^2+\frac{875}{256}m^3\right)\frac{a^2}{a'^2},$$

$$b_{11}\left[\begin{array}{l}1-2m+\frac{3}{4}m^2+\frac{225}{32}m^3-\left(\frac{3}{8}m^2+\frac{675}{64}m^3\right)e^2\\ +\left(\frac{9}{8}m^2+\frac{825}{32}m^3\right)e'^2\end{array}\right]$$
$$=\left[1-\frac{m^2}{3}-\left(\frac{1}{2}+\frac{611}{384}m^2-\frac{945}{256}m^3\right)e^2-\frac{m^2e'^2}{2}-\frac{e^4}{8}\right]$$
$$\times\left\{\begin{array}{l}\frac{15}{4}m+\frac{203}{16}m^2+\frac{34585}{768}m^3+\frac{1309955}{9216}m^4\\ +\left(\frac{15}{4}m+\frac{177}{64}m^2+\frac{115941}{6144}m^3-\frac{6865743}{24576}m^4\right)e^2\\ +\left(-\frac{75}{8}m-\frac{425}{16}m^2+\frac{390457}{1536}m^3+\frac{35408233}{9216}m^4\right)e'^2\\ +\frac{1947}{512}me^4+\frac{195}{64}me'^4+\frac{105}{32}m\frac{a^2}{a'^2}\end{array}\right\}$$
$$-\left(\frac{15}{8}m+\frac{35}{16}m^2+\frac{15929}{1536}m^3+\frac{419351}{9216}m^4\right)e^2$$
$$+\left(\frac{75}{8}m^2+\frac{105}{4}m^3-\frac{27933}{128}m^4\right)e'^2-\frac{45}{64}me^4,$$

$$b_{22}\left(3-2m-\frac{3}{4}m^2-\frac{225}{32}m^3+\frac{3}{8}m^2e^2-\frac{9}{8}m^2e'^2\right)$$
$$=\left[1-\frac{m^2}{3}-\left(\frac{1}{2}+\frac{611}{384}m^2\right)e^2-\frac{m^2e'^2}{2}\right]$$
$$\times\left\{\begin{array}{l}\frac{41}{8}m^2+\frac{379}{24}m^3+\frac{22375}{576}m^4\\ +\left(\frac{585}{32}m+\frac{7729}{128}m^2+\frac{1509983}{6144}m^3+\frac{48899317}{73728}m^4\right)e^2\\ -\left(\frac{205}{16}m^2+\frac{3715}{24}m^3+\frac{2271871}{2304}m^4\right)e'^2-\frac{375}{512}me^4\end{array}\right\}$$
$$-\left(\frac{249}{32}m^2+\frac{425}{32}m^3+\frac{1033395}{9216}m^4\right)e^2$$
$$-\left(\frac{25}{8}m^2+\frac{185}{6}m^3+\frac{150337}{1152}m^4\right)e'^2-\frac{195}{64}me^4,$$

$$(2-3m)\, b_{33} = \left[1 - \frac{m^2}{3} - \left(\frac{1}{2} + \frac{611}{384} m^2\right) e^2\right]$$

$$\times \left\{ \begin{array}{l} 7m^2 + \frac{157}{4} m^3 + \frac{3341}{24} m^4 \\ + \left(\frac{175}{8} m + \frac{4219}{32} m^2 + \frac{996169}{1536} m^3 + \frac{17091571}{6144} m^4\right) e^2 \\ - \left(\frac{123}{8} m^2 + \frac{4305}{32} m^3\right) e'^2 - \frac{945}{64} m\, e^4 - \frac{3075}{64} m\, e^2 e'^2 \end{array} \right\}$$

$$- \left(\frac{77}{4} m^2 + \frac{2155}{32} m^3 + \frac{65571}{256} m^4\right) e^2 - \left(\frac{369}{64} m^2 + \frac{4059}{128} m^3\right) e'^2,$$

$$(2-m)\, b_{34} = \left[1 - \frac{m^2}{3} - \left(\frac{1}{2} + \frac{611}{384} m^2\right) e^2\right]$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} - m^2 - \frac{91}{12} m^3 - \frac{1385}{72} m^4 \\ - \left(\frac{75}{8} m + \frac{1067}{32} m^2 - \frac{168211}{1536} m^3 - \frac{43411183}{18432} m^4\right) e^2 \\ + \left(\frac{m^2}{8} - \frac{701}{96} m^3\right) e'^2 + \frac{4185}{128} m\, e^4 + \frac{75}{64} m\, e^2 e'^2 - \frac{375}{64} m \frac{a^2}{a'^2} \end{array} \right\}$$

$$+ \left(\frac{11}{4} m^2 + \frac{1585}{96} m^3 - \frac{220591}{2304} m^4\right) e^2 + \left(\frac{3}{64} m^2 - \frac{357}{128} m^3\right) e'^2,$$

$$-2m\, b_{35} = \left(1 - \frac{e^2}{2}\right)$$

$$\times \left[\begin{array}{l} \frac{15}{8} m - \frac{21}{32} m^2 + \left(\frac{15}{8} m - \frac{37}{64} m^2\right) e^2 \\ - \left(\frac{75}{16} m - \frac{165}{8} m^2\right) e'^2 \end{array} \right]$$

$$- \left(\frac{15}{16} m + \frac{7}{32} m^2\right) e^2 + \left(\frac{75}{16} m - \frac{105}{16} m^2\right) e'^2,$$

$$4 b_{36} = \frac{515}{16} m\, e^2,$$

$$b_{37} = \left(1 - \frac{e^2}{2}\right)\left(\frac{35}{4} m - \frac{35}{32} m\, e^2 - \frac{615}{32} m\, e'^2\right) - \frac{35}{8} m\, e^2,$$

$$b_{38} = \left(1 - \frac{e^2}{2}\right)\left(-\frac{15}{4} m + \frac{705}{64} m\, e^2 + \frac{15}{32} m\, e'^2\right) + \frac{15}{8} m\, e^2,$$

$$3 b_{39} = \frac{1365}{32} m\, e^2,$$

$$3 b_{40} = -\frac{585}{32} m\, e^2,$$

$$2 b_{41} = \frac{1275}{32} m\, e^2,$$

$$2 b_{42} = -\frac{225}{32} m\, e^2,$$

$$4b_{56} = -\frac{1749}{512} m\, e^2,$$

$$b_{70} = \left(1 - \frac{e^2}{2}\right)\left(-\frac{15}{8} m - \frac{135}{16} m\, e^2 - \frac{15}{8} m\, e'^2\right),$$

$$b_{74} = \left(1 - \frac{e^2}{2}\right)\left(\frac{5}{2} + \frac{65}{8} e^2 + \frac{5}{2} e'^2\right) - \frac{5}{4} e^2,$$

$$4b_{86} = \frac{2415}{64} m^2\, e^2 + \frac{435}{64} m^2\, e^2,$$

$$(3-4m)b_{87} = \left(1 - \frac{e^2}{2}\right)$$
$$\times\left[\frac{615}{64} m^2 + \left(\frac{8775}{256} m^2 + \frac{124545}{512} m^3\right) e^2 - \frac{5945}{64} m^2\, e'^2\right],$$
$$-\frac{3825}{128} m^2\, e^2 - \frac{725}{32} m^2\, e'^2$$

$$4b_{88} = \frac{28175}{128} m^2\, e^2 + \frac{5075}{128} m^2\, e^2,$$

$$4b_{90} = -\frac{7245}{128} m^2\, e^2 - \frac{1305}{128} m^2\, e^2.$$

57. Si l'on développe ces équations en ayant égard aux parties des valeurs de b_1, b_2, etc., déterminées n° 30, et qu'on y satisfasse ensuite par la méthode des coefficiens indéterminés, on trouvera, abstraction faite des termes indépendans des excentricités des orbites de la Lune et du Soleil,

$$b_1 = -\left(\frac{1}{4} + 17\, m^2 + \frac{3195}{32} m^3\right) e^2 - \left(9 m^2 + \frac{6125}{64} m^3\right) e'^2,$$

$$b_2 = -\left(\frac{11}{24} - \frac{76237}{2304} m^2\right) e^2 - \frac{3747}{128} m^2\, e'^2,$$

$$b_6 = -\frac{27}{8} m\, e'^2,$$

$$b_7 = -\frac{81}{32} m\, e^2 - \frac{7}{4} m\, e'^2,$$

$$b_8 = \frac{51}{32} m\, e^2 + \frac{189}{32} m\, e'^2,$$

$$b_9 = -\frac{51}{32} m\, e^2 - \frac{189}{32} m\, e'^2,$$

$$b_{18} = \frac{13}{16}\, m\, e^2 + \frac{945}{128}\, m\, e'^2,$$

$$b_{19} = -\frac{1521}{256}\, m\, e^2 + \frac{49}{16}\, m\, e'^2,$$

$$\begin{aligned} b_{20} = {} & \left(\frac{75}{16} m + \frac{1101}{64} m^2 + \frac{71471}{1024} m^3 + \frac{893915}{4096} m^4 + \frac{143944619}{294912} m^5\right) e^2 \\ & - \left(\frac{55}{16} m^2 + \frac{691}{24} m^3 + \frac{16579}{144} m^4 + \frac{91129}{864} m^5\right) e'^2 \\ & - \left(\frac{45}{32} m + \frac{733}{64} m^2 + \frac{118199}{3072} m^3\right) e^4 \\ & - \left(\frac{375}{32} m + \frac{4965}{64} m^2 + \frac{264025}{2048} m^3\right) e^2 e'^2 \\ & + \left(\frac{143}{128} m^2 - \frac{427}{48} m^3\right) e'^4 \\ & + \frac{11025}{256} m\, e^4 e'^2 + \frac{975}{256} m\, e^2 e'^4 - \frac{555}{512} m\, e^6 \\ & + \left(\frac{1925}{1024} m^2 + \frac{32085}{2048} m^3 + \frac{525}{128} m\, e^2 + \frac{375}{128} m\, e'^2\right) \frac{a^2}{a'^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{21} = {} & -\left(\frac{369}{64} m^2 + \frac{64221}{2048} m^3 + \frac{3406917}{8192} m^4\right) e^2 \\ & - \left(\frac{75}{8} m + \frac{575}{16} m^2 - \frac{326617}{1536} m^3 - \frac{37134073}{9216} m^4\right) e'^2 \\ & + \frac{387}{512} m\, e^4 + \frac{195}{64} m\, e'^4 + \frac{105}{32} m \frac{a^2}{a'^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{22} = {} & \left(\frac{195}{32} m + \frac{2655}{128} m^2 + \frac{180599}{2048} m^3 + \frac{6040589}{24576} m^4\right) e^2 \\ & - \left(\frac{85}{16} m^2 + \frac{785}{12} m^3 + \frac{957907}{2304} m^4\right) e'^2 - \frac{2205}{512} m\, e^4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{23} = {} & \left(\frac{175}{16} m + \frac{4541}{64} m^2 + \frac{392779}{1024} m^3 + \frac{7273931}{4096} m^4\right) e^2 \\ & - \left(\frac{1353}{128} m^2 + \frac{12669}{128} m^3\right) e'^2 - \frac{1645}{128} m\, e^4 - \frac{3075}{128} m\, e^2 e'^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{24} = {} & -\left(\frac{75}{16} m + \frac{1113}{64} m^2 - \frac{59161}{1024} m^3 - \frac{4791425}{4096} m^4\right) e^2 \\ & + \left(\frac{11}{128} m^2 - \frac{1921}{384} m^3\right) e'^2 + \frac{4785}{256} m\, e^4 \\ & + \frac{75}{128} m\, e^2 e'^2 - \frac{375}{128} m \frac{a^2}{a'^2}, \end{aligned}$$

$$b_{25} = \frac{15}{64} m\, e^2 - \frac{225}{32} m\, e'^2,$$

$$b_{36} = \frac{515}{64} m e^2,$$

$$b_{37} = -\frac{315}{32} m e^2 - \frac{615}{32} m e'^2,$$

$$b_{38} = \frac{945}{64} m e^2 + \frac{15}{32} m e'^2,$$

$$b_{39} = \frac{455}{32} m e^2,$$

$$b_{40} = -\frac{195}{32} m e^2,$$

$$b_{41} = \frac{1275}{64} m e^2,$$

$$b_{42} = -\frac{225}{64} m e^2,$$

$$b_{56} = -\frac{1749}{2048} m e^2,$$

$$b_{70} = -\frac{15}{2} m e^2 - \frac{15}{8} m e'^2,$$

$$b_{74} = \frac{45}{8} e^2 + \frac{5}{2} e'^2,$$

$$b_{86} = \frac{1425}{128} m^2 e^2,$$

$$b_{87} = \left(\frac{2925}{256} m^2 + \frac{43395}{512} m^2\right) e^2 - \frac{2465}{64} m^2 e'^2,$$

$$b_{89} = \frac{16625}{256} m^2 e^2,$$

$$b_{90} = -\frac{4275}{256} m^2 e^2.$$

58. Il nous reste à déterminer les termes de l'*équation annuelle* ou de l'inégalité dépendante de l'angle φ' dans l'expression de la longitude, multipliés par le facteur $e^2 e'$, et qui correspondent à ceux que nous avons obtenus n° 53, dans l'expression du rayon vecteur. Nous emploierons, pour faciliter le calcul de ces termes, la formule dont nous avons fait

usage n° 31,

$$\left.\begin{aligned}\frac{d.\delta v}{dt} &= \frac{d.(2d.r\delta r - dr\delta r)}{h\,dt^2} \\ &- \frac{1}{h}\left\{\begin{aligned} 3\int d'.\delta R + 2\delta.r\frac{dR}{dr} + \left(r\delta\frac{1}{r}\right)\left[r\frac{dR}{dr}\right] \\ + \frac{d.\delta v}{dt}\left[\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt\right], \end{aligned}\right\}\end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

la caractéristique δ étant supposée ici, comme dans le n° 31, se rapporter à l'excentricité e' de l'orbe solaire. Développons les différentes parties de cette formule.

En désignant par δ un accroissement quelconque donné à la fonction $\frac{1}{r}$ dans le mouvement elliptique, on a, n° 35,

$$r = r_1 - r_1^2\,\delta\frac{1}{r} + r_1^3\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2 - r_1^4\left(\delta\frac{1}{r}\right)^3 + r_1^5\left(\delta\frac{1}{r}\right)^4 - \text{etc.}$$

Au moyen des valeurs de $\delta\frac{1}{r}$, $\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2$, $\left(\delta\frac{1}{r}\right)^3$, etc., calculées précédemment, n°s 21, 26, 48 et 53, combinées avec les valeurs elliptiques de r_1^2, r_1^3, r_1^4, etc., n° 5, on a formé l'expression suivante :

$$\begin{aligned}\delta r = &\left[\left(\frac{3}{2}m^2 - \frac{409}{16}m^4\right) + \left(\frac{141}{16}m^2 + \frac{345033}{256}m^4\right)e^2\right] e'\cos\varphi' \\ &- \left(\begin{aligned}\frac{21}{8}m + \frac{1209}{64}m^2 + \frac{1577}{16}m^3 + \frac{2072593}{4096}m^4 \\ + \frac{52700659}{18432}m^5\end{aligned}\right) ee'\cos(\varphi - \varphi') \\ &+ \left(\begin{aligned}\frac{21}{8}m + \frac{741}{64}m^2 + \frac{7391}{128}m^3 + \frac{3518023}{12288}m^4 \\ + \frac{101966455}{73728}m^5\end{aligned}\right) ee'\cos(\varphi + \varphi') \\ &- \left[\begin{aligned}\frac{7}{2}m^2 + \frac{157}{8}m^3 + \frac{3365}{48}m^4 \\ + \left(\frac{35}{8}m + \frac{743}{32}m^2 + \frac{201893}{1536}m^4\right)e^2\end{aligned}\right] e'\cos(2\xi - \varphi')\end{aligned}$$

$$+\left[\begin{array}{l}\frac{m^2}{2}+\frac{91}{24}m^3+\frac{1025}{144}m^4\\ \quad+\left(\frac{15}{8}m+\frac{199}{32}m^2-\frac{43751}{1536}m^3\right)e^2\end{array}\right]e'\cos(2\xi+\varphi')$$

$$-\left(\frac{35}{8}m+\frac{1045}{64}m^2+\frac{35239}{768}m^3+\frac{280489}{12288}m^4\right)ee'\cos(2\xi-\varphi-\varphi')$$

$$+\left(\frac{15}{8}m+\frac{65}{64}m^2-\frac{53533}{768}m^3-\frac{26976037}{36864}m^4\right)ee'\cos(2\xi-\varphi+\varphi')$$

$$-\left(\frac{119}{32}m^2+\frac{2879}{128}m^3\right)ee'\cos(2\xi+\varphi-\varphi')$$

$$+\left(\frac{17}{32}m^2+\frac{2597}{384}m^3\right)ee'\cos(2\xi+\varphi+\varphi').$$

On a d'ailleurs, n° 50,

$$r=1-\frac{m^2}{6}+\left(\frac{1}{2}+\frac{643}{384}m^2\right)e^2$$

$$-\left(1-\frac{m^2}{6}-\frac{885}{128}m^3-\frac{203153}{4608}m^4\right)e\cos\varphi$$

$$-\left[m^2+\frac{19}{6}m^3+\frac{125}{18}m^4+\left(\frac{15}{8}m+\frac{173}{32}m^2+\frac{36505}{1536}m^3\right)e^2\right]\cos 2\xi$$

$$-\left(\frac{15}{8}m+\frac{155}{32}m^2+\frac{25849}{1536}m^3+\frac{1058591}{18432}m^4\right)e\cos(2\xi-\varphi)$$

$$-\left(\frac{17}{16}m^2+\frac{151}{48}m^3\right)e\cos(2\xi+\varphi).$$

En différentiant cette valeur et en substituant à la place des angles ξ et φ les quantités qu'ils représentent n°s 5 et 6, on a trouvé

$$\frac{dr}{dt}=\left(1-\frac{11}{2}m^2-\frac{1785}{128}m^3-\frac{349133}{4608}m^4\right)e\sin\varphi$$

$$+\left[2m^2+\frac{13}{3}m^3+\frac{68}{9}m^4+\left(\frac{15}{4}m+\frac{113}{16}m^2+\frac{28201}{768}m^3\right)e^2\right]\sin 2\xi$$

$$+\left(\frac{15}{8}m+\frac{35}{32}m^2+\frac{13129}{1536}m^3+\frac{748175}{18432}m^4\right)e\sin(2\xi-\varphi)$$

$$+\left(\frac{51}{16}m^2+\frac{117}{16}m^3\right)e\sin(2\xi+\varphi).$$

La combinaison de ces différentes valeurs donne

$$r\delta r=\left(\frac{249}{16}m^2+\frac{26595}{128}m^3+\frac{7874241}{4096}m^4\right)e^2e'\cos\varphi',$$

$$\frac{dr\,\delta r}{dt}=\left(-\frac{21}{8}m-\frac{675}{32}m^2-\frac{55897}{512}m^3-\frac{2870647}{6144}m^4-\frac{28096585}{16384}m^5\right)e^2e'\sin\varphi';$$

d'où il est aisé de conclure

$$\frac{d^2.r\delta r}{dt^2} = \left(-\frac{249}{16}m^4 - \frac{26595}{128}m^5 - \frac{7874241}{4096}m^6\right) e^2\, e' \cos\varphi',$$

$$\frac{d.(dr\,\delta r)}{dt^2}$$
$$= \left(-\frac{21}{8}m^2 - \frac{675}{32}m^3 - \frac{55897}{512}m^4 - \frac{2870647}{6144}m^5 - \frac{28096585}{16384}m^6\right) e^2 e' \cos\varphi',$$

et par suite

$$\frac{d.(2d.r\delta r - dr\,\delta r)}{dt^2}$$
$$= \left(\frac{21}{8}m^2 + \frac{675}{32}m^3 + \frac{39961}{512}m^4 + \frac{317527}{6144}m^5 - \frac{34897343}{16384}m^6\right) e^2 e' \cos\varphi'.$$

En portant jusqu'aux quantités de l'ordre $m^6\, e^2$ le développement de la fonction R, n° 45, j'ai trouvé

$$\delta R = \begin{pmatrix} \frac{9}{8}m^2 + \frac{975}{32}m^3 + \frac{105357}{512}m^4 + \frac{2584929}{2048}m^5 \\ + \frac{352034927}{49152}m^6 \end{pmatrix} e^2\, e' \cos\varphi'. \qquad (a)$$

De cette valeur on conclut celle de $\delta.r\frac{dR}{dr}$ au moyen de l'équation $\delta.r\frac{dR}{dr} = 2\delta R$.

En développant jusqu'au même ordre de quantités la fonction $\delta.\frac{dR}{dv}$, n° 46, j'ai trouvé

$$\delta.\frac{dR}{dv} = \left(\frac{75}{8}m^3 + \frac{825}{32}m^4 + \frac{67439}{512}m^5 + \frac{8162197}{6144}m^6\right) e^2\, e' \sin\varphi';$$

d'où l'on a conclu

$$m\int\delta.\left(\frac{dR}{dv}\right)dt = -\left(\frac{75}{8}m^3 + \frac{825}{32}m^4 + \frac{67439}{512}m^5 + \frac{8162197}{6144}m^6\right) e^2 e' \cos\varphi'.$$

On a généralement, relativement aux termes que nous considérons, $r'\frac{dR}{dr'} = -3R$; d'où, en n'ayant égard, dans l'expression de R, n° 45, qu'aux termes

non périodiques multipliés par e^2, on conclut

$$r'\frac{dR}{dr'} = -\left(\frac{9}{8}m^2 + \frac{675}{32}m^3 + \frac{50253}{512}m^4 + \frac{776949}{2048}m^5 + \frac{20933301}{16384}m^6\right)e^2,$$

et par suite

$$m\int\left(r'\frac{dR}{dr'}\right)e'\sin\varphi'$$
$$= \left(\frac{9}{8}m^2 + \frac{675}{32}m^3 + \frac{50253}{512}m^4 + \frac{776949}{2048}m^5 + \frac{20933301}{16384}m^6\right)e^2 e' \cos\varphi'.$$

En substituant dans l'équation (17), n° 31, pour $m\int\delta.\left(\frac{dR}{dv}\right)dt$ et $m\int\left(r'\frac{dR}{dr'}\right)e'\sin\varphi'$ leurs valeurs, on a trouvé

$$\int d''.\delta R$$
$$= \left(\frac{9}{8}m^2 + \frac{975}{32}m^3 + \frac{63453}{512}m^4 + \frac{1046705}{2048}m^5 + \frac{128097479}{49152}m^6\right)e^2 e' \cos\varphi'.$$

On a d'ailleurs, n° 14,

$$\int d'.\delta R = \delta R - \int d''.\delta R.$$

En substituant pour δR et $\int d''.\delta R$ leurs valeurs précédentes dans cette équation, on trouve

$$\int d'.\delta R = \left(\frac{2619}{32}m^4 + \frac{96139}{128}m^5 + \frac{9330727}{2048}m^6\right)e^2 e' \cos\varphi'. \quad (b)$$

Les termes multipliés par m^2 et par m^3 disparaissent de cette expression, ce qui est conforme au théorème général énoncé n° 9.

En supposant ici $r\frac{dR}{dr} = 2R$, on a, d'après la valeur de la fonction R rapportée n°s 16 et 45,

$$
\begin{aligned}
r\frac{dR}{dr} = {} & \frac{m^2}{2} - \frac{179}{48}m^4 + \left(\frac{3}{4}m^2 + \frac{225}{16}m^3 + \frac{16751}{256}m^4\right) e^2 \\
& - \left(m^2 + \frac{135}{16}m^3 + \frac{5903}{192}m^4 + \frac{111843}{1024}m^5\right) e \cos\varphi \\
& + \left[\frac{3}{2}m^2 - \frac{3}{2}m^4 - \frac{19}{6}m^5 - \left(\frac{15}{4}m^2 + \frac{15}{16}m^3 + \frac{6115}{256}m^4\right) e^2\right] \cos 2\xi \\
& - \left(\frac{9}{2}m^2 + \frac{15}{8}m^3 + \frac{163}{32}m^4 + \frac{1877}{1536}m^5\right) e \cos(2\xi - \varphi) \\
& + \left(\frac{3}{2}m^3 + \frac{19}{16}m^4\right) e \cos(2\xi + \varphi) \\
& + \frac{45}{16}m^3 e \cos(4\xi - \varphi).
\end{aligned}
$$

La valeur précédente de r, combinée avec la valeur de $\delta\frac{1}{r}$ donnée nos 26 et 53, produit la suivante :

$$
\begin{aligned}
r\delta\frac{1}{r} = {} & \left[-\frac{3}{2}m^2 + \frac{429}{16}m^4 - \left(\frac{15}{2}m^2 + \frac{1532221}{1536}m^4\right) e^2\right] e' \cos\varphi' \\
& + \left(\frac{21}{8}m + \frac{1161}{64}m^2 + \frac{3243}{32}m^3 + \frac{2245841}{4096}m^4\right) ee' \cos(\varphi - \varphi') \\
& - \left(\frac{21}{8}m + \frac{789}{64}m^2 + \frac{7227}{128}m^3 + \frac{1073773}{4096}m^4\right) ee' \cos(\varphi + \varphi') \\
& + \left\{ \begin{aligned} & \frac{7}{2}m^2 + \frac{157}{8}m^3 + \frac{1119}{16}m^4 \\ & + \left(\begin{aligned} & \frac{105}{16}m + \frac{2285}{64}m^2 + \frac{191061}{1024}m^3 \\ & + \frac{3473383}{4096}m^4 \end{aligned} \right) e^2 \end{aligned} \right\} e' \cos(2\xi - \varphi') \\
& - \left\{ \begin{aligned} & \frac{m^2}{2} + \frac{91}{24}m^3 + \frac{1145}{144}m^4 \\ & + \left(\begin{aligned} & \frac{45}{16}m + \frac{605}{64}m^2 - \frac{125509}{3072}m^3 \\ & - \frac{24997369}{36864}m^4 \end{aligned} \right) e^2 \end{aligned} \right\} e' \cos(2\xi + \varphi') \\
& + \left(\frac{35}{8}m + \frac{1157}{64}m^2 + \frac{13749}{256}m^3 + \frac{190723}{4096}m^4\right) ee' \cos(2\xi - \varphi - \varphi') \\
& - \left(\frac{15}{8}m + \frac{81}{64}m^2 - \frac{17255}{256}m^3 - \frac{9058967}{12288}m^4\right) ee' \cos(2\xi - \varphi + \varphi') \\
& + \left(\frac{175}{32}m^2 + \frac{4303}{128}m^3 + \frac{152653}{1024}m^4\right) ee' \cos(2\xi + \varphi - \varphi') \\
& - \left(\frac{25}{32}m^2 + \frac{3829}{384}m^3 + \frac{389849}{9216}m^4\right) ee' \cos(2\xi + \varphi + \varphi')
\end{aligned}
$$

$$+\frac{4375}{256}m^3 ee' \cos(4\xi-\varphi-\varphi')$$
$$-\frac{1125}{256}m^3 ee' \cos(4\xi-\varphi+\varphi');$$

d'où l'on a conclu

$$\left.\begin{array}{l}\left(r\delta\frac{1}{r}\right)\left(r\frac{dR}{dr}\right)\\ =-\left(\frac{45}{16}m^3+\frac{243}{8}m^4+\frac{271613}{1024}m^5+\frac{11254795}{6144}m^6\right)e^2 e' \cos\varphi'.\end{array}\right\}(c)$$

D'après la valeur de v, n°s 30 et 56, il est facile de former la suivante :

$$\begin{array}{l}\frac{d.\delta v}{dt}=\left(\frac{21}{4}m+\frac{1065}{32}m^2+\frac{12447}{64}m^3\right)ee'\cos(\varphi-\varphi')\\
-\left(\frac{21}{4}m+\frac{885}{32}m^2+\frac{1903}{16}m^3\right)ee'\cos(\varphi+\varphi')\\
+\left(\frac{35}{4}m+\frac{961}{32}m^2+\frac{11657}{128}m^3+\frac{163803}{2048}m^4\right)ee'\cos(2\xi-\varphi-\varphi')\\
-\left(\frac{15}{4}m+\frac{53}{32}m^2-\frac{50041}{384}m^3-\frac{26268109}{18432}m^4\right)ee'\cos(2\xi-\varphi+\varphi')\\
+\left(\frac{357}{16}m^2+\frac{7965}{64}m^3+\frac{269271}{512}m^4\right)ee'\cos(2\xi+\varphi-\varphi')\\
-\left(\frac{51}{16}m^2+\frac{2565}{64}m^3+\frac{86195}{512}m^4\right)ee'\cos(2\xi+\varphi+\varphi')\\
+\left\{\begin{array}{l}\frac{77}{8}m^2+\frac{727}{16}m^3+\frac{4677}{32}m^4\\ +\left(\begin{array}{l}\frac{175}{8}m+\frac{3491}{32}m^2+\frac{283795}{512}m^3\\ +\frac{4917257}{2048}m^4\end{array}\right)e^2\end{array}\right\}e'\cos(2\xi-\varphi')\\
-\left\{\begin{array}{l}\frac{11}{8}m^2+\frac{481}{48}m^3+\frac{5795}{288}m^4\\ +\left(\begin{array}{l}\frac{75}{8}m+\frac{963}{32}m^2-\frac{68065}{512}m^3\\ -\frac{4673103}{2048}m^4\end{array}\right)e^2\end{array}\right\}e'\cos(2\xi+\varphi')\\
+\frac{8925}{128}m^3 ee'\cos(4\xi-\varphi-\varphi')\\
-\frac{2295}{128}m^3 ee'\cos(4\xi-\varphi+\varphi').\end{array}$$

On a d'ailleurs, n°s 18 et 46,

$$\int'\left(\frac{dR}{dv}\right)dt = -\left(\frac{135}{16}m^3 + \frac{2649}{64}m^4 + \frac{164699}{1024}m^5\right) e \cos\varphi$$
$$+\left[\begin{array}{l}\frac{3}{4}m^2 + \frac{3}{4}m^3 + \frac{m^4}{2} + \frac{m^5}{2} \\ \qquad -\left(\frac{15}{8}m^2 + \frac{15}{8}m^3 + \frac{6319}{512}m^4\right)e^2\end{array}\right]\cos 2\xi$$
$$-\left(\frac{9}{2}m^2 + 9m^3 + \frac{123}{8}m^4 - \frac{129}{64}m^5\right) e\cos(2\xi - \varphi)$$
$$+\left(\frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{3} + \frac{67}{72}m^4\right) e\cos(2\xi + \varphi)$$
$$+\frac{15}{16}m^3\, e\cos(4\xi - \varphi);$$

d'où l'on conclut

$$\left.\begin{array}{l}\frac{d.\delta v}{dt}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt \\ \quad = -\left(\frac{105}{16}m^3 + \frac{3519}{64}m^4 + \frac{424109}{1024}m^5 + \frac{37600951}{12288}m^6\right)e^2 e'\cos\varphi'.\end{array}\right\} \quad (d)$$

Au moyen des valeurs (a), (b), (c), (d), on a formé la suivante :

$$3\int d'.\delta R + 2\delta.r\frac{dR}{dr} + \left(r\delta\frac{1}{r}\right)\left[r\frac{dR}{dr}\right] + \frac{d.\delta v}{dt}\left[\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt\right]$$
$$= \left(\frac{9}{2}m^2 + \frac{225}{2}m^3 + \frac{125859}{128}m^4 + \frac{211921}{32}m^5 + \frac{14371171}{384}m^6\right)e^2\, e'\cos\varphi'.$$

Si l'on substitue cette valeur et celle de la fonction $\frac{2d^2.r\delta r - d.(dr\delta r)}{dt^2}$ dans la formule (16), on trouvera, toute réduction faite,

$$\frac{d.\delta v}{dt} = \frac{1}{h}\left(\begin{array}{l} -\frac{15}{8}m^2 - \frac{2925}{32}m^3 - \frac{463475}{512}m^4 - \frac{40371305}{6144}m^5 \\ -\frac{1944201917}{49152}m^6\end{array}\right)e^2 e'\cos\varphi'. \quad (e)$$

Pour faire usage de cette équation, soit, n° 29,

$\delta v = b_6\, e' \sin \varphi'$, et par suite $d.\delta v = mdt\, b_6\, e' \cos\varphi'$, les termes du coefficient b_6 indépendans de l'excentricité e de l'orbe lunaire ont été déterminés dans le n° 30; supposons, par suite,

$$b_6 = -3m + \frac{735}{16}m^3 + \frac{1261}{4}m^4 + \frac{142817}{96}m^5 \\ -(\alpha m + \beta m^2 + \gamma m^3 + \delta m^4 + \lambda m^5)\, e^2.$$

On a d'ailleurs, n° 50,

$$h = \left[1 - \frac{m^2}{3} + \frac{11}{144}m^4 - \left(\frac{1}{2} + \frac{611}{384}m^2 - \frac{945}{256}m^3 - \frac{895433}{36864}m^4\right)e^2\right].$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (e), elle devient

$$\left[1 - \frac{m^2}{3} + \frac{11}{144}m^4 - \left(\frac{1}{2} + \frac{611}{384}m^2 - \frac{945}{256}m^3 - \frac{895433}{36864}m^4\right)e^2\right] \\ \times \left[\begin{array}{l} -3m + \frac{735}{16}m^3 + \frac{1261}{4}m^4 + \frac{142817}{96}m^5 \\ -(\alpha m + \beta m^2 + \gamma m^3 + \delta m^4 + \lambda m^5)\, e^2 \end{array}\right] \\ = \left(-\frac{15}{8}m - \frac{2925}{32}m^2 - \frac{463475}{512}m^3 - \frac{40371305}{6144}m^4 - \frac{1944201917}{49152}m^5\right)e^2.$$

Si l'on développe cette équation et qu'on compare les termes multipliés par e^2 et dépendans des mêmes puissances de m dans les deux membres, on trouvera

$$\alpha = \frac{27}{8},\quad \beta = \frac{2925}{32},\quad \gamma = \frac{454735}{512},\quad \delta = \frac{395222017}{6144},\quad \lambda = \frac{638335067}{16384};$$

d'où l'on conclura, enfin,

$$b_6 = -\left(\frac{27}{8}m + \frac{2925}{32}m^2 + \frac{454735}{512}m^3 + \frac{395222017}{6144}m^4 + \frac{638335067}{16384}m^5\right)e^2.$$

Inégalités du mouvement en latitude.

59. Reprenons la formule (25), n° 37,

$$\frac{d^2z}{dt^2}+z\left(1+\frac{3}{2}\bar{m}^2\right)+Q=0,$$

dans laquelle, pour abréger, on suppose

$$Q=z\left(\frac{1}{r^3}+\frac{m^2a'^3}{r'^3}\right).$$

Les valeurs trouvées par les approximations précédentes, relatives au rayon vecteur, fournissent tout ce qui est nécessaire au développement de la fonction $\frac{1}{r^3}$, qui se calculera comme il a été dit n° 40, au moyen de l'équation

$$\frac{1}{r^3}=\frac{1}{r_1^3}+\frac{3}{r_1^2}\left(\delta\frac{1}{r}\right)+\frac{3}{r_1}\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2+\left(\delta\frac{1}{r}\right)^3.$$

On a de plus, n° 5,

$$\frac{a'^3}{r'^3}=1+\frac{3}{2}e'^2+3\left(1+\frac{9}{8}e'^2\right)e'\cos\varphi'+\frac{9}{2}e'^2\cos 2\varphi'+\text{etc.}$$

En multipliant par m^2 cette quantité et en la réunissant à la valeur de la fonction $\frac{1}{r^3}$, on a formé, abstraction faite des termes qui ont déjà été rapportés n° 40, l'expression suivante :

$$\frac{1}{r^3}+\frac{m^2a'^3}{r'^3}=\left(\frac{3}{2}+\frac{771}{128}m^2+\frac{8145}{256}m^3+\frac{681789}{4096}m^4+\frac{1728559}{2048}m^5\right)e^2$$
$$+\left(\frac{9}{4}m^2+\frac{153}{64}m^3+\frac{1055}{32}m^4\right)e'^2$$
$$+\left[\left(\frac{27}{8}+\frac{603}{128}m^2\right)e^2-\frac{117}{8}m^2e'^2\right]e\cos\varphi$$
$$+\left(18\,m^2e^2-\frac{27}{16}m^2e'^2\right)e'\cos\varphi'+\left(\frac{7}{2}-\frac{43}{6}m^2\right)e^4\cos 2\varphi$$
$$+\left[\begin{array}{l}\left(\frac{135}{8}m+\frac{1941}{32}m^2+\frac{118219}{512}m^3+\frac{4217633}{6144}m^4\right)e^2\\-\left(\frac{15}{2}m^2+\frac{239}{4}m^3+\frac{1445}{6}m^4\right)e'^2\end{array}\right]\cos 2\xi$$
$$+\left[\left(\frac{225}{16}m+\frac{3963}{128}m^2\right)e^2-\left(\frac{225}{16}m+\frac{1395}{32}m^2\right)e'^2\right]e\cos(2\xi-\varphi)$$
$$+\left[\left(\frac{2385}{64}m+\frac{33561}{256}m^2\right)e^2-\frac{735}{32}m^2e'^2\right]e\cos(2\xi+\varphi)$$
$$+\left[\begin{array}{l}\left(\frac{315}{8}m+\frac{8031}{32}m^2+\frac{624879}{512}m^3\right)e^2\\-\left(\frac{369}{16}m^2+\frac{12915}{64}m^3\right)e'^2\end{array}\right]e'\cos(2\xi-\varphi')$$
$$-\left[\begin{array}{l}\left(\frac{135}{8}m+\frac{1983}{32}m^2-\frac{86453}{512}m^3\right)e^2\\+\left(\frac{3}{16}m^2-\frac{701}{64}m^3\right)e'^2\end{array}\right]e'\cos(2\xi+\varphi')$$
$$+\left(\frac{45}{4}m+\frac{951}{64}m^2\right)e^4\cos(2\xi-2\varphi)+\frac{4035}{64}m\,e^4\cos(2\xi+2\varphi)$$
$$+\left(\frac{735}{16}me^2+\frac{1845}{64}me'^2\right)ee'\cos(2\xi-\varphi-\varphi')-\frac{135}{8}me^2\frac{a}{a'}\cos\xi+\frac{4905}{64}m^2e^2\cos 4\xi.$$

En réunissant la valeur précédente à celle qui est rapportée n° 40, on aura la valeur complète de la fonction $\frac{1}{r^3}+\frac{m^2a'^3}{r'^3}$, nécessaire à la détermination des termes que nous nous proposons de calculer dans l'expression de la latitude.

En effet, en combinant les différens termes de l'expression complète de la fonction $\frac{1}{r^3}+\frac{m^2a'^3}{r'^3}$ avec ceux de la fonction z qu'une première approximation a fait connaître, j'ai trouvé pour les termes qui doivent être

ajoutés à la valeur de Q, n° 40, l'expression suivante :

$$Q = \begin{bmatrix} \left(3m^2 + \frac{387}{32}m^3 + \frac{6497}{128}m^4 + \frac{9306921}{32768}m^5\right)e^2 \\ + \left(\frac{9}{4}m^2 - \frac{33}{16}m^3 - \frac{3093}{128}m^4 - \frac{10135}{64}m^5\right)e'^2 \end{bmatrix} \gamma \underset{(105)}{\sin \eta}$$

$$+ \left[\left(\frac{15}{16} - \frac{405}{128}m - \frac{6925}{1024}m^2\right)e^2 + \frac{585}{128}m^2 e'^2\right] e\,\gamma \sin (\varphi \underset{(108)}{-} \eta)$$

$$- \left[\left(\frac{9}{8} + \frac{15825}{1024}m^2\right)e^2 + \frac{285}{64}m^2 e'^2\right] e\,\gamma \sin (\varphi \underset{(109)}{+} \eta)$$

$$- \left(\frac{183}{32}m^2 e^2 - \frac{27}{32}m^2 e'^2\right) e'\,\gamma \sin (\varphi' \underset{(110)}{-} \eta)$$

$$+ \left(\frac{183}{32}m^2 e^2 - \frac{27}{32}m^2 e'^2\right) e'\,\gamma \sin (\varphi' \underset{(111)}{+} \eta)$$

$$- \frac{3373}{384}m^2 e^4\,\gamma \sin (2\varphi \underset{(112)}{-} \eta) - \frac{19}{8}e^4\,\gamma \sin (2\varphi \underset{(113)}{+} \eta)$$

$$+ \begin{bmatrix} -\left(\frac{3}{8}m^2 + \frac{5}{2}m^3 + \frac{224387}{12288}m^4\right)e^2 \\ + \left(\frac{15}{4}m^2 + \frac{899}{32}m^3 + \frac{37297}{384}m^4\right)e'^2 \end{bmatrix} \gamma \sin (2\xi \underset{(130)}{-} \eta)$$

$$+ \left[\left(\frac{45}{4}m + \frac{585}{16}m^2 + \frac{37497}{256}m^3\right)e^2 - \left(\frac{15}{4}m^2 + \frac{257}{8}m^3\right)e'^2\right] \gamma \sin (2\xi \underset{(131)}{+} \eta)$$

$$+ \begin{bmatrix} \left(\frac{9}{8}m + \frac{1149}{128}m^2\right)e^2 \\ + \left(\frac{45}{8}m + \frac{111}{8}m^2\right)e'^2 \end{bmatrix} e\,\gamma \sin (2\xi - \underset{(132)}{\varphi} - \eta)$$

$$+ \begin{bmatrix} -\left(\frac{135}{128}m + \frac{13653}{1024}m^2\right)e^2 \\ -\left(\frac{225}{32}m + \frac{1305}{64}m^2\right)e'^2 \end{bmatrix} e\,\gamma \sin (2\xi - \underset{(133)}{\varphi} + \eta)$$

$$+ \left[\left(\frac{225}{128}m - \frac{909}{1024}m^2\right)e^2 - \left(\frac{45}{32}m + \frac{657}{64}m^2\right)e'^2\right] e\,\gamma \sin (2\xi + \underset{(134)}{\varphi} - \eta)$$

$$+ \left[\left(\frac{225}{8}m + 90m^2\right)e^2 - \frac{225}{16}m^2 e'^2\right] e\,\gamma \sin (2\xi + \underset{(135)}{\varphi} + \eta)$$

$$+\left[\left(-\frac{21}{16}m^2-\frac{15141}{1024}m^3\right)e^2+\left(\frac{369}{32}m^2+\frac{25065}{256}m^3\right)e'^2\right]e'\gamma\sin(2\xi\underset{(136)}{-}\varphi'-\eta)$$

$$+\left[\left(\frac{105}{4}m+\frac{5055}{64}m^2\right)e^2-\frac{369}{32}m^2e'^2\right]e'\gamma\sin(2\xi\underset{(137)}{-}\varphi'+\eta)$$

$$+\left[\left(\frac{3}{16}m^2-\frac{68159}{256}m^3\right)e^2+\left(\frac{3}{32}m^2-\frac{853}{256}m^3\right)e'^2\right]e'\gamma\sin(2\xi\underset{(138)}{+}\varphi'-\eta)$$

$$-\left[\left(\frac{45}{4}m+\frac{1395}{32}m^2\right)e^2-\frac{3}{32}m^2e'^2\right]e'\gamma\sin(2\xi\underset{(139)}{+}\varphi'+\eta)$$

$$+\left(-\frac{3465}{512}me^2+\frac{369}{32}me'^2\right)ee'\gamma\sin(2\xi\underset{(144)}{-}\varphi-\varphi'-\eta)$$

$$+\left(\frac{1155}{512}me^2-\frac{1845}{128}me'^2\right)ee'\gamma\sin(2\xi\underset{(145)}{-}\varphi-\varphi'+\eta)$$

$$+\left(\frac{45}{32}me^2+\frac{135}{64}me'^2\right)\frac{a}{a'}\gamma\sin(\xi\underset{(169)}{-}\eta)$$

$$+\left(-\frac{261}{64}me^2-\frac{45}{64}me'^2\right)\frac{a}{a'}\gamma\sin(\xi\underset{(170)}{+}\eta)$$

$$+\left[\left(\frac{135}{32}m^2+\frac{1107}{64}m^3\right)e^2-\frac{87}{16}m^2e'^2\right]\gamma\sin(4\xi\underset{(183)}{-}\eta).$$

60. L'équation (26), n° 39, après avoir remplacé $\overline{m}^2$ par sa valeur, n° 37, a donné d'abord

$$\left.\begin{aligned} &q_{105}\left(1+\frac{3}{2}m^2-\frac{9}{32}m^4+\frac{55}{16}m^5-g^2\right)\\ &\quad+\left(3m^2+\frac{387}{32}m^3+\frac{6497}{128}m^4+\frac{9306921}{32768}m^5\right)e^2\\ &\quad+\left(\frac{9}{4}m^2-\frac{33}{16}m^3-\frac{3093}{128}m^4-\frac{10135}{64}m^5\right)e'^2=0, \end{aligned}\right\}\quad(l)$$

le coefficient indéterminé q_{105} dans cette équation pouvant être choisi arbitrairement, n° 12; conformément aux principes énoncés n° 41, nous ferons ici

$$q_{105}=1-\frac{m^2}{6}+\frac{57}{128}m^3-\left(\frac{1}{2}-\frac{659}{1536}m^2\right)e^2+\frac{25}{8}m^2e'^2.$$

En supposant de plus, n° 41,

$$g^2 = 1 + \frac{3}{2}m^2 - \frac{9}{16}m^3 - \frac{237}{64}m^4 - \frac{10229}{1024}m^5$$
$$+ e^2(\alpha\, m^2 + 6\, m^3 + \gamma\, m^4 + \delta\, m^5)$$
$$+ e'^2(\alpha' m^2 + 6' m^3 + \gamma' m^4 + \delta' m^5),$$

l'équation (l), par la substitution de ces valeurs, deviendra

$$\left[1 - \frac{m^2}{6} + \frac{57}{128}m^3 - \left(\frac{1}{2} - \frac{659}{1536}m^2\right)e^2 + \frac{25}{8}m^2 e'^2\right]$$
$$\times\left[\frac{9}{16}m^3 + \frac{219}{64}m^4 + \frac{13749}{1024}m^5 - e^2(\alpha\, m^2 + 6\, m^3 + \gamma\, m^4 + \delta\, m^5) - e'^2(\alpha' m^2 + 6' m^3 + \gamma' m^4 + \delta' m^5)\right]$$
$$+ e^2\left(3m^2 + \frac{387}{32}m^3 + \frac{6497}{128}m^4 + \frac{9306921}{32768}m^5\right)$$
$$+ e'^2\left(\frac{9}{4}m^2 - \frac{33}{16}m^3 - \frac{3093}{128}m^4 - \frac{10135}{64}m^5\right) = 0,$$

En développant cette équation et en comparant les coefficiens de e^2 et de e'^2 dépendant des mêmes puissances de m, on trouvera

$$\alpha = 3,\quad 6 = \frac{189}{16},\quad \gamma = \frac{3171}{64},\quad \delta = \frac{9115581}{32768};$$
$$\alpha' = \frac{9}{4},\quad 6' = -\frac{33}{16},\quad \gamma' = -\frac{3045}{128},\quad \delta' = -\frac{80869}{512};$$

et par conséquent

$$g^2 = 1 + \frac{3}{2}m^2 - \frac{9}{16}m^3 - \frac{237}{64}m^4 - \frac{10229}{1024}m^5$$
$$+ e^2\left(3m^2 + \frac{189}{16}m^3 + \frac{3171}{64}m^4 + \frac{9115581}{32768}m^5\right)$$
$$+ e'^2\left(\frac{9}{4}m^2 - \frac{33}{16}m^3 - \frac{3045}{128}m^4 - \frac{80869}{512}m^5\right);$$

d'où, en supposant $g^2 = 1 + P$ au moyen de la formule

$$g = 1 + \frac{1}{2}P - \frac{1}{8}P^2 + \frac{1}{16}P^3 - \text{etc.},$$

on conclut

$$g = 1 + \frac{3}{4}m^2 - \frac{9}{32}m^3 - \frac{273}{128}m^4 - \frac{9797}{2048}m^5$$
$$+ e^2\left(\frac{3}{2}m^2 + \frac{189}{32}m^3 + \frac{3027}{128}m^4 + \frac{8852925}{65536}m^5\right)$$
$$+ e'^2\left(\frac{9}{8}m^2 - \frac{33}{32}m^3 - \frac{3261}{256}m^4 - \frac{79753}{1024}m^5\right).$$

61. En substituant la valeur précédente de g ainsi que celle de c, n° 24, dans les équations de condition du n° 39, et en remplaçant Q_{108}, Q_{109}, etc., par les quantités que ces lettres représentent n° 59, on a formé les équations suivantes :

$$q_{108}\left(1 + \frac{3}{2}m^2\right) + \left(\frac{15}{16} - \frac{405}{128}m - \frac{6925}{1024}m^2\right)e^2$$
$$+ \frac{585}{128}m^2 e'^2 = 0,$$

$$q_{109}\left(3 - \frac{3}{2}m^2 + \frac{15}{2}m^2 e^2\right) + \left(\frac{9}{8} + \frac{15825}{1024}m^2\right)e^2$$
$$+ \frac{285}{64}m^2 e'^2 = 0,$$

$$2q_{110} - \frac{183}{32}m^2 e^2 + \frac{27}{32}m^2 e'^2 = 0,$$

$$-2q_{111} + \frac{183}{32}m^2 e^2 - \frac{27}{32}m^2 e'^2 = 0,$$

$$q_{112}\left(6m^2 + \frac{3}{2}m^2 e^2\right) - \frac{3373}{384}m^2 e^2 = 0,$$

$$8q_{113} + \frac{19}{8}e^2 = 0,$$

$$q_{120}\left[4m - m^2 - \frac{57}{16}m^3 + \left(3m^2 + \frac{93}{16}m^3\right)e^2\right.$$
$$\left. + \left(\frac{9}{4}m^2 - \frac{105}{16}m^3\right)e'^2\right]$$
$$- \left(\frac{3}{8}m^2 + \frac{5}{2}m^3 + \frac{224387}{12288}m^4\right)e^2$$
$$+ \left(\frac{15}{4}m^2 + \frac{899}{32}m^3 + \frac{37297}{384}m^4\right)e'^2 = 0,$$

$$q_{121}(-8 + 12m - 7m^2) + \left(\frac{45}{4}m + \frac{585}{16}m^2 + \frac{37497}{256}m^3\right)e^2$$
$$- \left(\frac{15}{4}m^2 + \frac{257}{8}m^3\right)e'^2 = 0,$$

$$q_{132} + \left(\frac{9}{8}\,m + \frac{1149}{128}\,m^2\right) e^2 + \left(\frac{45}{8}\,m + \frac{111}{8}\,m^2\right) e'^2 = 0,$$

$$q_{133}(-3 + 8m) - \left(\frac{135}{128}\,m + \frac{13653}{1024}\,m^2\right) e^2$$
$$- \left(\frac{225}{32}\,m + \frac{1305}{64}\,m^2\right) e'^2 = 0,$$

$$q_{134}(-3 + 8m) + \left(\frac{225}{128}\,m - \frac{909}{1024}\,m^2\right) e^2$$
$$- \left(\frac{45}{32}\,m + \frac{657}{64}\,m^2\right) e'^2 = 0,$$

$$q_{135}(-15 + 16m) + \left(\frac{225}{8}\,m + 90m^2\right) e^2 - \frac{225}{16}\,m^2\,e'^2 = 0,$$

$$q_{136}\left(6m - 6m^2 + 3m^2\,e^2 + \frac{9}{4}\,m^2\,e'^2\right) + \left(-\frac{21}{16}\,m^2 - \frac{15141}{1024}\,m^3\right) e^2$$
$$+ \left(\frac{369}{32}\,m^2 + \frac{25065}{256}\,m^3\right) e'^2 = 0,$$

$$q_{137}(-8 + 18m) + \left(\frac{105}{4}\,m + \frac{5055}{64}\,m^2\right) e^2 - \frac{369}{32}\,m^2\,e'^2 = 0,$$

$$q_{138}\left(2m + 2m^2 + 3m\,e^2 + \frac{9}{4}\,m^2\,e'^2\right) + \left(\frac{3}{16}\,m^2 - \frac{68159}{256}\,m^3\right) e^2$$
$$- \left(\frac{3}{32}\,m^2 - \frac{853}{256}\,m^3\right) e'^2 = 0,$$

$$q_{139}(-8 + 6m) - \left(\frac{45}{4}\,m + \frac{1395}{32}\,m^2\right) e^2 + \frac{3}{32}\,m^2\,e'^2 = 0,$$

$$q_{144} - \frac{3465}{512}\,m\,e^2 + \frac{369}{32}\,m\,e'^2 = 0,$$

$$-3q_{145} + \frac{1155}{512}\,m\,e^2 - \frac{1845}{128}\,m\,e'^2 = 0,$$

$$q_{169} + \frac{45}{32}\,m\,e^2 + \frac{135}{64}\,m\,e'^2 = 0,$$

$$-3q_{170} - \frac{261}{64}\,m\,e^2 - \frac{45}{64}\,m\,e'^2 = 0,$$

$$q_{183}(-8 + 24m) + \left(\frac{135}{32}\,m^2 + \frac{1107}{64}\,m^3\right) e^2 - \frac{87}{16}\,m^2\,e'^2 = 0.$$

62. En ayant égard à la partie des valeurs des quantités q_{108}, q_{109}, etc., indépendante des excentricités e

et e' des orbites du Soleil et de la Lune, déterminée n° 43, et en satisfaisant ensuite aux équations précédentes par la méthode des coefficiens indéterminés, comme on en a vu un exemple n° 60, on trouve

$$q_{108} = \left(-\frac{15}{16} + \frac{405}{128}m + \frac{8365}{1024}m^2\right)e^2 - \frac{585}{128}m^2 e'^2,$$

$$q_{109} = \left(-\frac{3}{8} - \frac{6747}{1024}m^2\right)e^2 - \frac{95}{64}m^2 e'^2,$$

$$q_{110} = \frac{183}{64}\,m\,e^2 - \frac{27}{64}\,m\,e'^2,$$

$$q_{111} = \frac{183}{64}\,m\,e^2 - \frac{27}{64}\,m\,e'^2,$$

$$q_{112} = \frac{3085}{2304}\,e^2,$$

$$q_{113} = -\frac{19}{64}\,e^2,$$

$$q_{120} = \left(\frac{3}{32}\,m + \frac{47}{128}\,m^2 + \frac{158987}{49152}\,m^3\right)e^2$$
$$- \left(\frac{15}{16}\,m + \frac{239}{32}\,m^2 + \frac{83219}{3072}\,m^2\right)e'^2,$$

$$q_{121} = \left(\frac{45}{32}\,m + \frac{855}{128}\,m^2 + \frac{55497}{2048}\,m^2\right) - \left(\frac{15}{32}\,m^2 + \frac{151}{32}\,m^2\right)e'$$

$$q_{122} = -\left(\frac{9}{8}\,m + \frac{1149}{128}\,m^2\right)e^2 - \left(\frac{45}{8}\,m + \frac{111}{8}\,m^2\right)e'^2,$$

$$q_{123} = -\left(\frac{45}{128}m + \frac{5511}{1024}\,m^2\right)e^2 - \left(\frac{75}{32}\,m + \frac{835}{64}\,m^2\right)e'^2,$$

$$q_{124} = \left(\frac{75}{128}m + \frac{1297}{1024}\,m^2\right)e^2 - \left(\frac{15}{32}\,m + \frac{299}{256}\,m^2\right)e'^2,$$

$$q_{125} = \left(\frac{15}{8}\,m + 8\,m^2\right)e^2 - \frac{15}{16}\,m^2\,e'^2,$$

$$q_{126} = \left(\frac{7}{32}\,m + \frac{4599}{2048}\,m^2\right)e^2 - \left(\frac{123}{64}\,m + \frac{9507}{512}\,m^2\right)e'^2,$$

$$q_{127} = \left(\frac{105}{32}m + \frac{8835}{512}\,m^2\right)e^2 - \frac{369}{256}\,m^2\,e'^2,$$

$$q_{128} = \left(-\frac{3}{32}\,m + \frac{68495}{512}\,m^2\right)e^2 + \left(\frac{3}{64}\,m - \frac{661}{512}\,m^2\right)e'^2,$$

$$q_{129} = -\left(\frac{45}{32}\,m + \frac{1665}{64}\,m^2\right)e^2 + \frac{3}{256}\,m^2\,e'^2,$$

$$q_{144} = \frac{3465}{512} m e^2 - \frac{389}{32} m e'^2,$$
$$q_{148} = \frac{385}{512} m e^2 - \frac{615}{128} m e'^2,$$
$$q_{160} = -\frac{45}{32} m e^2 - \frac{135}{64} m e'^2,$$
$$q_{170} = -\frac{87}{64} m e^2 - \frac{15}{64} m e'^2,$$
$$q_{183} = \left(\frac{135}{256} m^2 + \frac{1917}{512} m^3\right) e^2 - \frac{87}{128} m^2 e'^2.$$

63. En joignant les valeurs précédentes à celles qui ont été déterminées n° 43, on formera l'expression complète de la fonction z. Si dans l'équation

$$s = \frac{z}{r}$$

on substitue ensuite pour z cette valeur, pour $\frac{1}{r}$ celle qui résulte des calculs effectués, n°s 26 et 53, et qu'on remplace s par l'expression en série que nous avons supposée à cette quantité n° 38, en comparant après les réductions les *sinus* semblables dans les deux membres, et en n'ayant égard qu'aux termes que nous considérons, on trouvera, pour fixer la valeur des coefficiens indéterminés introduits dans l'expression de la tangente s de la latitude, les équations suivantes :

$$c_{105} = 1 + \frac{33}{128} m^2 - \left(1 + \frac{31}{512} m^2\right) e^2 + \frac{27}{8} m^2 e'^2,$$
$$c_{108} = \left(-\frac{5}{8} + \frac{135}{64} m + \frac{4551}{512} m^2\right) e^2 - \frac{227}{64} m^2 e'^2,$$
$$c_{109} = \left(-\frac{5}{4} - \frac{8521}{512} m^2\right) e^2 - \frac{111}{32} m^2 e'^2,$$
$$c_{110} = \frac{195}{64} m e^2 - \frac{27}{64} m e'^2,$$

$$c_{111} = \frac{195}{64} m\, e^2 - \frac{27}{64} m\, e'^2,$$

$$c_{112} = \frac{2413}{2394} e^2,$$

$$c_{113} = -\frac{103}{64} e^2,$$

$$c_{130} = \left(\frac{27}{32} m + \frac{423}{128} m^2 + \frac{205161}{16384} m^3 \right) e^2$$
$$- \left(\frac{15}{16} m + \frac{199}{32} m^2 + \frac{56275}{3072} m^3 \right) e'^2,$$

$$c_{131} = \left(\frac{135}{32} m + \frac{1929}{128} m^2 + \frac{126875}{2048} m^3 \right) e^2$$
$$- \left(\frac{55}{32} m^2 + \frac{1481}{96} m^3 \right) e'^2,$$

$$c_{132} = -\left(\frac{3}{4} m + \frac{495}{64} m^2 \right) e^2 - \left(\frac{15}{4} m + \frac{21}{2} m^2 \right) e'^2,$$

$$c_{133} = -\left(\frac{165}{64} m + \frac{7479}{512} m^2 \right) e^2 - \left(\frac{75}{16} m + \frac{595}{32} m^2 \right) e'^2,$$

$$c_{134} = \left(\frac{123}{64} m + \frac{1921}{512} m^2 \right) e^2 - \left(\frac{15}{16} m + \frac{299}{32} m^2 \right) e'^2,$$

$$c_{135} = \left(\frac{15}{2} m + \frac{397}{16} m^2 \right) e^2 - \frac{35}{8} m^2\, e'^2,$$

$$c_{136} = \left(\frac{63}{32} m + \frac{28055}{2048} m^2 \right) e^2 - \left(\frac{123}{64} m + \frac{7539}{512} m^2 \right) e'^2,$$

$$c_{137} = \left(\frac{315}{32} m + \frac{27711}{512} m^2 \right) e^2 - \frac{1353}{256} m^2\, e'^2,$$

$$c_{138} = -\left(\frac{15}{16} m - \frac{67383}{512} m^2 \right) e^2 + \left(\frac{3}{64} m - \frac{677}{512} m^2 \right) e'^2,$$

$$c_{139} = -\left(\frac{135}{32} m + \frac{1849}{128} m^2 \right) e^2 + \frac{11}{256} m^2\, e'^2,$$

$$c_{144} = \frac{1183}{256} m\, e^2 - \frac{123}{16} m\, e'^2,$$

$$c_{145} = \frac{385}{512} m\, e^2 - \frac{615}{64} m\, e'^2,$$

$$c_{169} = -\frac{15}{16} m\, e^2 - \frac{45}{32} m\, e'^2,$$

$$c_{170} = -\frac{57}{32} m\, e^2 - \frac{15}{32} m\, e'^2,$$

$$c_{189} = \left(\frac{405}{256} m^2 + \frac{4545}{512} m^3 \right) e^2 - \frac{319}{128} m^2\, e'^2.$$

Termes de l'expression du rayon vecteur qui dépendent de l'inclinaison de l'orbe lunaire à l'écliptique.

64. Pour déterminer les termes de cette espèce qui entrent dans l'expression du rayon vecteur, reprenons l'équation ordinaire

$$\frac{d^2 . r^2}{2dt^2} - \frac{1}{r} + \frac{1}{a} - 2 \cdot \int d'R - r\frac{dR}{dr} = 0. \qquad (A)$$

Pour satisfaire à cette équation, nous supposerons, comme dans le n° 10,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \delta \frac{1}{r},$$

en désignant par r_1 la partie du rayon vecteur dépendante du mouvement elliptique, et par $\delta \frac{1}{r}$ l'accroissement de la fonction $\frac{1}{r}$ dû aux forces perturbatrices; mais, pour comprendre dans l'expression du rayon vecteur les termes dépendans des nouveaux argumens introduits dans le développement de la fonction R, n° 6, par la considération de l'angle que forment entre elles les orbites de la Lune et du Soleil, à l'expression de $\delta \frac{1}{r}$, donnée n° 15, nous ajouterons les termes suivans :

$$\begin{aligned}\delta \frac{1}{r} = &\; a_{18}\, \gamma^2 \cos 2\eta \\ &+ a_{19}\, e\, \gamma^2 \cos(\varphi - 2\eta) \\ &+ a_{20}\, e\, \gamma^2 \cos(\varphi + 2\eta) \\ &+ a_{21}\, e'\, \gamma^2 \cos(\varphi' - 2\eta) \\ &+ a_{22}\, e'\, \gamma^2 \cos(\varphi' + 2\eta) \\ &+ a_{23}\, e^2\, \gamma^2 \cos(2\varphi + 2\eta) \\ &+ a_{24}\, ee'\, \gamma^2 \cos(\varphi + \varphi' - 2\eta)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ a_{27}\, ee'\, \gamma^2 \cos(\varphi + \varphi' - 2\eta) \\
&+ a_{57}\, \gamma^2 \cos(2\xi - 2\eta) \\
&+ a_{59}\, e\, \gamma^2 \cos(2\xi - \varphi - 2\eta) \\
&+ a_{60}\, e\, \gamma^2 \cos(2\xi - \varphi + 2\eta) \\
&+ a_{61}\, e\, \gamma^2 \cos(2\xi + \varphi - 2\eta) \\
&+ a_{63}\, e'\, \gamma^2 \cos(2\xi - \varphi' - 2\eta) \\
&+ a_{65}\, e'\, \gamma^2 \cos(2\xi + \varphi' - 2\eta) \\
&+ a_{67}\, e^2\, \gamma^2 \cos(2\xi - 2\varphi - 2\eta) \\
&+ a_{68}\, e^2\, \gamma^2 \cos(2\xi - 2\varphi + 2\eta) \\
&+ a_{69}\, e^2\, \gamma^2 \cos(2\xi + 2\varphi - 2\eta) \\
&+ a_{100}\, \gamma^2 \cos(4\xi - 2\eta) \\
&+ a_{101}\, e\, \gamma^2 \cos(4\xi - \varphi - 2\eta).
\end{aligned}
$$

Si l'on substitue cette valeur dans l'équation (A), en conservant, du reste, toutes les notations établies n° 14, et égalant à zéro les coefficiens qui multiplient les cosinus dépendans des mêmes argumens, on formera les équations suivantes :

$$
\begin{aligned}
&a_{18}\,(4g^2-1)=4g^2P_{18}+R_{18}, \\
&a_{19}\,[(c-2g)^2-1]=(c-2g)^2P_{19}+R_{19}, \\
&a_{20}\,[(c+2g)^2-1]=(c+2g)^2P_{20}+R_{20}, \\
&a_{21}\,[(m-2g)^2-1]=(m-2g)^2P_{21}+R_{21}, \\
&a_{22}\,[(m+2g)^2-1]=(m+2g)^2P_{22}+R_{22}, \\
&a_{24}\,[(2c+2g)^2-1]=(2c+2g)^2P_{24}+R_{24}, \\
&a_{25}\,[(c-m-2g)^2-1]=(c-m-2g)^2P_{25}+R_{25}, \\
&a_{27}\,[(c+m-2g)^2-1]=(c+m-2g)^2P_{27}+R_{27}, \\
&a_{28}\,[(c+m+2g)^2-1]=(c+m+2g)^2P_{28}+R_{28}, \\
&a_{57}\,[(2-2m-2g)^2-1]=(2-2m-2g)^2P_{57}+R_{57}, \\
&a_{59}\,[(2-2m-c-2g)^2-1]=(2-2m-c-2g)^2P_{59}+R_{59}, \\
&a_{60}\,[(2-2m-c+2g)^2-1]=(2-2m-c+2g)^2P_{60}+R_{60}, \\
&a_{61}\,[(2-2m+c-2g)^2-1]=(2-2m+c-2g)^2P_{61}+R_{61}, \\
&a_{63}\,[(2-3m-2g)^2-1]=(2-3m-2g)^2P_{63}+R_{63}, \\
&a_{65}\,[(2-m-2g)^2-1]=(2-m-2g)^2P_{65}+R_{65}, \\
&a_{67}\,[(2-2m-2c-2g)^2-1]=(2-2m-2c-2g)^2P_{67}+R_{67}, \\
&a_{68}\,[(2-2m-2c+2g)^2-1]=(2-2m-2c+2g)^2P_{68}+R_{68}, \\
&a_{69}\,[(2-2m+2c-2g)^2-1]=(2-2m+2c-2g)^2P_{69}+R_{69}, \\
&a_{100}\,[(4-4m)^2-1]=(4-4m)^2P_{100}+R_{100}, \\
&a_{101}\,[(4-4m-c-2g)^2-1]=(4-4m-c-2g)^2P_{101}+R_{101}.
\end{aligned}
$$

Ces équations serviront à calculer les valeurs des coefficiens indéterminés a_{18}, a_{19}, a_{20}, etc., que nous avons introduits dans l'expression du rayon vecteur; quant aux termes multipliés par le carré γ^2 de la tangente de l'inclinaison de l'orbe lunaire à l'écliptique, qui doivent servir à compléter les valeurs des coefficiens a_0, a_1, a_2, etc., les équations de condition du n° 15 suffiront encore pour les déterminer.

65. Il ne s'agit donc que de développer les diverses quantités qui entrent dans ces formules. Occupons-nous d'abord de la fonction perturbatrice R; en faisant abstraction des termes dépendans de la parallaxe solaire, on a, n° 3,

$$R = \frac{m'r^2}{4r'^3}[1 + 3(1 - s^2)\cos 2(v - v') - 3s^2].$$

En désignant donc par la caractéristique δ les quantités multipliées par le facteur γ^2, on aura

$$\delta R = -\left(r\frac{dR}{dr}\right) r\delta\frac{1}{r} + \left(\frac{dR}{dv}\right)\delta v + \frac{1}{2}\left(\frac{dR}{sds}\right)s^2.$$

On substituera dans cette formule, à la place de $r\delta\frac{1}{r}$ et de δv, les termes de leurs valeurs affectés du coefficient γ^2, et qui seront donnés par les approximations successives; la valeur de s^2 se formera en élevant au carré la valeur de s, n°s 36 et 44; on la trouvera d'ailleurs développée, avec toute l'étendue nécessaire, dans le n° 73. Quant aux quantités entourées de parenthèses, elles sont indépendantes de l'inclinaison de l'orbe lunaire à l'écliptique, et pourront se former aisément d'après le développement des fonctions R et $\frac{dR}{dv}$

effectué n°s 16, 17, 45 et 46, en observant que l'on a

$$\left(r\frac{d\mathrm{R}}{dr}\right) = 2\mathrm{R}\,; \quad \frac{1}{2}\left(\frac{d\mathrm{R}}{sds}\right) = -\left[\mathrm{R} + \frac{m^2\left(\frac{r}{a}\right)^2}{2\left(\frac{r'}{a'}\right)^3}\right].$$

Quant aux termes dépendans de la parallaxe solaire, comme nous négligerons les quantités de cette espèce qui seraient de l'ordre $m^3\gamma^2$, il suffira de supposer ici

$$\delta\mathrm{R} = -\frac{3m^2 s^2\left(\frac{r}{a}\right)^3}{16\left(\frac{r'}{a'}\right)^4}\left(\frac{a}{a'}\right)[11\cos(v - v') + 5\cos 3(v - v')].$$

Le développement de cette fonction n'offrira aucune difficulté dans l'ordre d'approximation auquel nous nous arrêtons.

En exécutant les opérations que nous venons d'indiquer, nous avons formé l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
\delta\mathrm{R} = & \left(-\frac{3}{8}m^2 + \frac{9}{32}m^3 + \frac{985}{512}m^4 + \frac{8615}{2048}m^5\right)\underset{(0)}{\gamma^2} \\
& + \left(\frac{3}{4}m^2 + \frac{117}{32}m^3 + \frac{2015}{128}m^4 + \frac{228863}{2048}m^5\right)\gamma^2 e \cos \underset{(1)}{\varphi} \\
& + \frac{3}{16}m^2\gamma^2 e^2 \cos \underset{(2)}{2\varphi} + \left(-\frac{9}{8}m^2 + \frac{39}{32}m^3 + \frac{4875}{512}m^4\right)\gamma^2 e' \cos \underset{(6)}{\varphi'} - \frac{27}{16}m^2\gamma^2 e'^2 \cos \underset{(7)}{2\varphi'} \\
& + \frac{9}{8}m^2\gamma^2 ee' \cos \underset{(8)}{(\varphi - \varphi')} + \frac{9}{8}m^2\gamma^2 ee' \cos \underset{(9)}{(\varphi + \varphi')} \\
& + \frac{27}{16}m^2\gamma^2 ee'^2 \cos \underset{(12)}{(\varphi - 2\varphi')} + \left(\frac{3}{8}m^2 - \frac{9}{16}m^3 + \frac{141}{256}m^4\right)\gamma^2 \cos \underset{(18)}{2\eta} \\
& - \left(\frac{m^2}{2}a_{19} + \frac{9}{8}m^2 - \frac{549}{256}m^4\right) e\gamma^2 \cos \underset{(19)}{(\varphi - 2\eta)} \\
& + \frac{3}{8}m^2 e \gamma^2 \cos \underset{(20)}{(\varphi + 2\eta)}
\end{aligned}$$

$$+\left(\frac{9}{16}m^2-\frac{9}{8}m^3\right)e'\gamma^2\cos\underset{(21)}{(\varphi'-2\eta)}+\frac{9}{16}m^2e'\gamma^2\cos\underset{(22)}{(\varphi'+2\eta)}$$

$$-\frac{39}{32}m^2ee'\gamma^2\cos\underset{(25)}{(\varphi-\varphi'-2\eta)}-\frac{39}{32}m^2ee'\gamma^2\cos\underset{(26)}{(\varphi+\varphi'-2\eta)}$$

$$+\left[\begin{array}{l}-\frac{3}{8}m^2+\frac{9}{32}m^3+\frac{585}{512}m^4+\frac{11653}{6144}m^5\\+\left(\frac{15}{16}m^2+\frac{123}{64}m^3\right)e^2+\left(\frac{15}{16}m^2+\frac{477}{32}m^3\right)e'^2\end{array}\right]\gamma^2\cos\underset{(30)}{2\xi}$$

$$+\left[\begin{array}{l}\frac{9}{8}m^2+\frac{33}{32}m^3+\frac{17}{4}m^4+\frac{73}{192}m^5\\-\frac{3}{8}m^2e^2-\frac{45}{16}m^2e'^2\end{array}\right]\gamma^2e\cos\underset{(31)}{(2\xi-\varphi)}$$

$$-\left(\frac{3}{8}m^2-\frac{9}{32}m^3+\frac{53}{32}m^4\right)\gamma^2e\cos\underset{(32)}{(2\xi+\varphi)}$$

$$-\left(\frac{21}{16}m^2+\frac{165}{64}m^3\right)\gamma^2e'\cos\underset{(33)}{(2\xi-\varphi')}+\left(\frac{3}{16}m^2+\frac{243}{64}m^3\right)\gamma^2e'\cos\underset{(34)}{(2\xi+\varphi')}$$

$$-\left(\frac{15}{32}m^2+\frac{1215}{256}m^3\right)\gamma^2e^2\cos\underset{(35)}{(2\xi-2\varphi)}$$

$$+\frac{63}{16}m^2\gamma^2ee'\cos\underset{(37)}{(2\xi-\varphi-\varphi')}-\frac{9}{16}m^2\gamma^2ee'\cos\underset{(38)}{(2\xi-\varphi+\varphi')}$$

$$+\left(\frac{3}{8}m^2-\frac{9}{32}m^3-\frac{761}{512}m^4\right)\gamma^2\cos\underset{(57)}{(2\xi-2\eta)}$$

$$+\left(-\frac{3}{8}m^2-\frac{3}{2}m^3\right)e\gamma^2\cos\underset{(59)}{(2\xi-\varphi-2\eta)}-\frac{15}{32}m^2e\gamma^2\cos\underset{(60)}{(2\xi-\varphi+2\eta)}$$

$$+\left(\frac{33}{32}m^2-\frac{1077}{256}m^3\right)e\gamma^2\cos\underset{(61)}{(2\xi+\varphi-2\eta)}$$

$$+\left(\frac{21}{16}m^2-\frac{15}{64}m^3\right)e'\gamma^2\cos\underset{(63)}{(2\xi-\varphi'-2\eta)}-\left(\frac{3}{16}m^2+\frac{63}{64}m^3\right)e'\gamma^2\cos\underset{(65)}{(2\xi+\varphi'-2\eta)}$$

$$-\frac{33}{32}m^3\frac{a}{a'}\gamma^2\cos\underset{(70)}{\xi}+\frac{27}{64}m^3\frac{a}{a'}\gamma^2e'\cos\underset{(73)}{(\xi-\varphi')}$$

$$-\left(\frac{1}{2}a_{74}+\frac{3}{32}\right)m^3\frac{a}{a'}\gamma^2e'\cos\underset{(74)}{(\xi+\varphi')}$$

$$-\frac{45}{64}m^3\gamma^2e\cos\underset{(87)}{(4\xi-\varphi)}$$

$$+\left(\frac{9}{32}m^3-\frac{291}{512}m^4\right)\gamma^2\cos\underset{(100)}{(4\xi-2\eta)}-\frac{9}{128}m^3e\gamma^2\cos\underset{(101)}{(4\xi-\varphi-2\eta)}.$$

66. Développons de la même manière la fonction $\frac{dR}{dv}$. En faisant abstraction des termes qui dépendent de la parallaxe solaire, on a, n° 3,

$$\frac{dR}{dv} = -\frac{3m'r^2}{2r'^3}(1-s^2)\sin 2(v-v').$$

En affectant, comme précédemment, la caractéristique δ au coefficient γ^2 et aux quantités qui en dépendent, on aura

$$\delta.\frac{dR}{dv} = -\left[r\frac{d.\left(\frac{dR}{dv}\right)}{dr}\right]r\delta\frac{1}{r} + \left[\frac{d.\left(\frac{dR}{dv}\right)}{dv}\right]\delta v + \frac{1}{2}\left[\frac{d.\left(\frac{dR}{dv}\right)}{sds}\right]s^2.$$

On substituera dans cette formule pour $r\delta\frac{1}{r}$ et δv, les parties de leurs valeurs qui sont affectées du facteur γ^2 : l'expression de s^2 se trouvera développée n° 73; quant aux quantités entourées de parenthèses, elles sont indépendantes de l'inclinaison des orbites de la Lune et du Soleil, elles seront donc faciles à former d'après ce qui précède en observant qu'on a

$$r\frac{d.\left(\frac{dR}{dv}\right)}{dr} = 2\left(\frac{dR}{dv}\right), \quad \frac{1}{2}\frac{d.\left(\frac{dR}{dv}\right)}{sds} = -\left(\frac{dR}{dv}\right).$$

On a trouvé, de cette manière,

$$\begin{aligned}\delta.\frac{dR}{dv} = &-\left(\frac{135}{16}m^2 + \frac{6033}{128}m^4\right)\gamma^2 e \cos \underset{(2)}{\varphi} \\ &+\left(\frac{3}{8}m^2 - \frac{33}{32}m^4 - \frac{23209}{512}m^5\right)\gamma^2 e' \sin \underset{(6)}{\varphi'} \\ &+\frac{21}{32}m^2\gamma^2 e'^2 \sin \underset{(7)}{2\varphi'} + \left(\frac{9}{8}m^2 - \frac{201}{128}m^4\right)\gamma^2 \sin \underset{(18)}{2\eta} \\ &-\frac{45}{16}m^2\gamma^2 e' \sin \underset{(21)}{(\varphi' - 2\eta)}\end{aligned}$$

$$+\left[\begin{array}{l}\frac{3}{4}m^2-\frac{37}{256}m^4+\frac{27}{512}m^5 \\ -\frac{15}{8}m^2\ e^2-\left(\frac{15}{8}m^2+\frac{117}{4}m^3\right)\ e'^2\end{array}\right]\gamma^2\cos \underset{(30)}{2\xi}$$

$$+\left[\ \frac{9}{2}m^2-\left(\frac{9}{4}m^2+\frac{231}{64}m^4\right)\ \gamma^2\right]e\sin(2\xi \underset{(31)}{-} \varphi)$$

$$+\left[-\frac{3}{2}m^2+\left(\frac{3}{4}m^2+\frac{317}{64}m^4\right)\ \gamma^2\right]e\sin(2\xi \underset{(32)}{+} \varphi)$$

$$+\left(\frac{21}{8}m^2+\frac{117}{16}m^3\right)\gamma^2\ e'\sin(2\xi \underset{(33)}{-} \varphi')$$

$$-\left(\frac{3}{8}m^2+\frac{117}{16}m^3\right)\gamma^2\ e'\sin(2\xi \underset{(34)}{+} \varphi')$$

$$+\left(\frac{15}{16}m^2+\frac{405}{128}m^3\right)\gamma^2\ e^2\sin(2\xi \underset{(35)}{-} 2\varphi)$$

$$-\left(\frac{3}{4}m^2-\frac{515}{256}m^4\right)\gamma^2\sin(2\xi \underset{(57)}{-} 2\eta)+\frac{3}{4}m^2\ e\ \gamma^2\sin(2\xi-\underset{(59)}{\varphi}-2\eta)$$

$$+\frac{15}{8}m^2\ e\ \gamma^2\sin(2\xi-\underset{(60)}{\varphi}+2\eta)-\frac{33}{16}m^2\ e\ \gamma^2\sin(2\xi+\underset{(61)}{\varphi}-2\eta)$$

$$+\frac{45}{32}m^3\ \gamma^2\ e\sin(4\xi \underset{(87)}{-} \varphi)+\left(-\frac{9}{16}m^2+\frac{159}{128}m^4\right)\gamma^2\sin(4\xi \underset{(100)}{-} 2\eta).$$

On conclura de là la valeur de la fonction $-\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt$, en multipliant respectivement chaque terme de l'expression précédente par les facteurs suivans :

Argument.	Facteur pour l'intégration.
φ	$\frac{1}{c}=1,$
$2\varphi'$	$\frac{1}{2c}=\frac{1}{2},$
φ'	$\frac{1}{c'm}=\frac{1}{m},$
$2\varphi'$	$\frac{1}{2c'm}=\frac{1}{2m},$
2η	$\frac{1}{2g}=\frac{1}{2},$
$\varphi'-2\eta$	$\frac{1}{c'm-2g}=-\frac{1}{2},$

Argument.	Facteurs pour l'intégration.
2ξ	$\frac{1}{2-2m}=\frac{1}{2}(1+m+m^2+m^3)$,
$2\xi-\varphi$	$\frac{1}{2-2m-c}=1+2m+\frac{13}{4}m^2+\frac{3}{2}m^2\gamma^2$,
$2\xi+\varphi$	$\frac{1}{2-2m+c}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{3}m+\frac{25}{36}m^2-\frac{1}{2}m^2\gamma^2\right)$,
$2\xi-\varphi'$	$\frac{1}{2-3m}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}m\right)$,
$2\xi+\varphi'$	$\frac{1}{2-m}\ =\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{2}m\right)$,
$2\xi-2\varphi$	$\frac{1}{2-2m-2c}=-\frac{1}{2m}\left(1+\frac{3}{4}m-\frac{3}{2}m\gamma^2\right)$,
$2\xi-2\eta$	$\frac{1}{2-2m-2g}=-\frac{1}{2m}\left(1-\frac{3}{4}m+\frac{27}{32}m^2+\frac{165}{128}m^3\right)$,
$2\xi-\varphi-2\eta$	$\frac{1}{2-2m-c-2g}=-1$,
$2\xi-\varphi+2\eta$	$\frac{1}{2-2m-c+2g}=\frac{1}{3}$,
$2\xi+\varphi-2\eta$	$\frac{1}{2-2m+c-2g}=1$,
$4\xi-\varphi$	$\frac{1}{4\xi-\varphi}=\frac{1}{3}$,
$4\xi-2\eta$	$\frac{1}{4-4m-2g}=\frac{1}{2}(1+2m)$.

On aura ainsi

$$\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt=\left(\frac{135}{16}m^3+\frac{6033}{128}m^4\right)\gamma^2\, e\,\cos \underset{(1)}{\varphi}$$

$$+\left(-\frac{3}{8}m^2+\frac{33}{32}m^3+\frac{23209}{512}m^4\right)\gamma^2\, e'\,\cos \underset{(6)}{\varphi'}$$

$$+\frac{21}{64}m^2\,\gamma^2\,e'^2\,\cos \underset{(7)}{2\varphi'}$$

$$+\left(-\frac{9}{16}m^3+\frac{201}{256}m^4\right)\gamma^2\cos \underset{(18)}{2\eta}-\frac{45}{32}m^2\gamma^2 e'\cos \underset{(11)}{(\varphi-2\eta)}$$

$$-\left\{\begin{array}{l}\frac{3}{8}m^2+\frac{3}{8}m^3+\frac{155}{512}m^4+\frac{337}{1024}m^5\\+\left(\frac{15}{16}m^2+\frac{15}{16}m^3\right)e^2\\+\left(\frac{15}{16}m^2+\frac{249}{16}m^3\right)e'^2\end{array}\right\}\gamma^2\cos \underset{(30)}{2\xi}$$

$$+\left(\frac{9}{4}m^2+\frac{9}{2}m^3+\frac{267}{64}m^4\right)\gamma^2\, e\cos(2\xi\underset{(31)}{-}\varphi)$$

$$-\left(\frac{m^2}{4}+\frac{m^3}{6}+\frac{1195}{576}m^4\right)\gamma^2\, e\cos(2\xi\underset{(32)}{+}\varphi)$$

$$-\left(\frac{21}{16}m^2+\frac{45}{8}m^3\right)\gamma^2\, e'\cos(2\xi\underset{(33)}{-}\varphi')$$

$$+\left(\frac{3}{16}m^2+\frac{15}{4}m^3\right)\gamma^2\, e'\cos(2\xi\underset{(34)}{+}\varphi')$$

$$+\left(\frac{15}{32}m+\frac{1215}{256}m^2\right)\gamma^2\, e^2\cos(2\xi\underset{(35)}{-}2\varphi)$$

$$-\left(\frac{3}{8}m-\frac{9}{32}m^2-\frac{353}{512}m^3\right)\gamma^2\cos(2\xi\underset{(57)}{-}2\eta)$$

$$+\frac{3}{4}m^2 e\gamma^2\cos(2\xi-\underset{(59)}{\varphi}-2\eta)-\frac{5}{8}m^2 e\gamma^2\cos(2\xi-\underset{(60)}{\varphi}+2\eta)$$

$$+\frac{33}{16}m\, e\gamma^2\cos(2\xi+\underset{(61)}{\varphi}-2\eta)$$

$$-\frac{15}{32}m^2\gamma^2 e\cos(4\xi\underset{(87)}{-}\varphi)+\left(\frac{9}{32}m^3-\frac{15}{256}m^4\right)\gamma^2\cos(4\xi\underset{(100)}{-}2\eta).$$

67. En ne considérant que les termes indépendans de l'excentricité de l'orbe solaire, on a

$$2\int d'\mathrm{R}+r\frac{d\mathrm{R}}{dr}=4\mathrm{R}+2m\int\left(\frac{d\mathrm{R}}{dv}\right)dt.$$

Au moyen des valeurs précédentes de R et de $\int\left(\frac{d\mathrm{R}}{dv}\right)dt$, on formera l'expression suivante :

$$2\int d'\mathrm{R}+r\frac{d\mathrm{R}}{dr}=\left(3m^2+\frac{117}{8}m^3+\frac{2555}{32}m^4+\frac{277127}{512}m^5\right)\gamma^2\, e\cos\underset{(1)}{\varphi}$$

$$+\frac{3}{4}m^2\gamma^2 e^2\cos 2\underset{(2)}{\varphi}$$

$$+\left(\frac{3}{2}m^2-\frac{9}{4}m^3+\frac{69}{64}m^4\right)\gamma^2\cos 2\underset{(18)}{\eta}$$

$$-\left(2m^2a_{12}+\frac{9}{2}m^3-\frac{549}{64}m^3\right)e\,\gamma^2\cos(\varphi\underset{(19)}{-}2\eta)$$

$$+\frac{3}{2}m^2\, e\, \gamma^2 \cos(\varphi \underset{(10)}{+} 2\eta)$$

$$-\left\{\begin{array}{l} \left(\frac{3}{2}m^2 - \frac{3}{8}m^3 - \frac{489}{128}m^4 - \frac{10723}{1536}m^5\right) \\ -\left(\frac{15}{4}m^2 + \frac{153}{16}m^3\right)e^2 \\ -\left(\frac{15}{4}m^2 + \frac{123}{2}m^3\right)e'^2 \end{array}\right\}\gamma^2 \underset{(30)}{\cos 2\xi}$$

$$+\left(\frac{9}{2}m^2 + \frac{69}{8}m^3 + 26m^4 + \frac{947}{96}m^5 - \frac{3}{2}m^2 e^2 - \frac{45}{4}m^2 e'^2\right)\gamma^2 e \cos(2\xi \underset{(31)}{-} \varphi)$$

$$-\left(\frac{3}{2}m^2 - \frac{5}{8}m^3 + \frac{167}{24}m^4\right)\gamma^2\, e \cos(2\xi \underset{(32)}{+} \varphi)$$

$$-\frac{15}{16}m^2\, \gamma^2\, e^2 \cos(2\xi \underset{(35)}{-} 2\varphi)$$

$$+\left(\frac{3}{4}m^2 - \frac{9}{16}m^3\right)\gamma^2 \cos(2\xi \underset{(57)}{-} 2\eta)$$

$$-\left(\frac{3}{2}m^2 + \frac{9}{2}m^3\right)e\,\gamma^2 \cos(2\xi - \underset{(59)}{\varphi} - 2\eta) - \frac{15}{8}m^2\, e\,\gamma^2 \cos(2\xi - \underset{(60)}{\varphi} + 2\eta)$$

$$+\left(\frac{33}{8}m^2 - \frac{813}{64}m^3\right)e\,\gamma^2 \cos(2\xi + \underset{(61)}{\varphi} - 2\eta)$$

$$-\frac{45}{16}m^3\, \gamma^2\, e \cos(4\xi \underset{(87)}{-} \varphi)$$

$$+\left(\frac{9}{8}m^3 - \frac{219}{128}m^4\right)\gamma^2 \cos(4\xi \underset{(100)}{-} 2\eta) - \frac{9}{32}m^3\, e\,\gamma^2 \cos(4\xi - \underset{(101)}{\varphi} - 2\eta).$$

Au moyen de la formule

$$\int d'\mathrm{R} = \mathrm{R} + m\int\left(\frac{d\mathrm{R}}{dv}\right)dt - m\int\left[\begin{array}{l}\left(r'\frac{d\mathrm{R}}{dr'}\right)\quad e'\sin\varphi' \\ +\left(\frac{d\mathrm{R}}{dv'}\right)2e'\cos\varphi'\end{array}\right]dt,$$

dans laquelle on substituera pour R et $\int\left(\frac{d\mathrm{R}}{dv}\right)dt$ les termes de leurs valeurs précédentes multipliés par l'excentricité e' de l'orbe solaire, en observant d'ailleurs que relativement aux termes que nous considé-

rons, on a $\left(r'\frac{dR}{dr'}\right) = -3R$; $\frac{d'R}{dv'} = -\frac{dR}{dv}$; on a formé l'expression suivante:

$$\begin{aligned}\int d'R = {} & \frac{153}{32} m^4 \gamma^2 e' \underset{(6)}{\cos\varphi'} + \frac{9}{8} m^2 \gamma^2 ee' \underset{(8)}{\cos(\varphi - \varphi')} \\ & + \frac{9}{8} m^2 \gamma^2 ee' \underset{(9)}{\cos(\varphi + \varphi')} + \frac{27}{16} m^2 \gamma^2 ee'^2 \underset{(12)}{\cos(\varphi - 2\varphi')} \\ & + \left(\frac{9}{16} m^2 - \frac{27}{32} m^3\right) e' \gamma^2 \underset{(21)}{\cos(\varphi' - 2\eta)} + \frac{9}{16} m^2 e' \gamma^2 \underset{(22)}{\cos(\varphi' + 2\eta)} \\ & - \frac{39}{32} m^2 ee' \gamma^2 \underset{(25)}{\cos(\varphi - \varphi' - 2\eta)} - \frac{39}{32} m^2 ee' \gamma^2 \underset{(27)}{\cos(\varphi + \varphi' - 2\eta)} \\ & - \left(\frac{21}{16} m^2 + \frac{291}{64} m^3\right) \gamma^2 e' \underset{(33)}{\cos(2\xi - \varphi')} \\ & + \left(\frac{3}{16} m^2 + \frac{249}{64} m^3\right) \gamma^2 e' \underset{(34)}{\cos(2\xi + \varphi')} \\ & + \frac{63}{16} m^2 \gamma^2 ee' \underset{(37)}{\cos(2\xi - \varphi - \varphi')} - \frac{9}{16} m^2 \gamma^2 ee' \underset{(38)}{\cos(2\xi - \varphi + \varphi')}.\end{aligned}$$

En doublant cette valeur et en observant que l'on a $r\frac{dR}{dr} = 2R$, on obtient aisément la suivante:

$$\begin{aligned}2\int d'R + r\frac{dR}{dr} = {} & \left(-\frac{9}{4} m^2 + \frac{39}{16} m^3 + \frac{7323}{256} m^4\right) e' \underset{(6)}{\cos\varphi'} - \frac{27}{8} m^2 \gamma^2 e'^2 \underset{(7)}{\cos 2\varphi'} \\ & + \frac{9}{2} m^2 \gamma^2 ee' \underset{(8)}{\cos(\varphi - \varphi')} + \frac{9}{2} m^2 ee' \gamma^2 \underset{(9)}{\cos(\varphi + \varphi')} \\ & + \frac{27}{4} m^2 \gamma^2 ee'^2 \underset{(12)}{\cos(\varphi - 2\varphi')} \\ & + \left(\frac{9}{4} m^2 - \frac{63}{16} m^3\right) e' \gamma^2 \underset{(21)}{\cos(\varphi' - 2\eta)} + \frac{9}{4} m^2 e' \gamma^2 \underset{(22)}{\cos(\varphi' + 2\eta)} \\ & - \frac{39}{8} m^2 ee' \gamma^2 \underset{(25)}{\cos(\varphi - \varphi' - 2\eta)} - \frac{39}{8} m^2 ee' \gamma^2 \underset{(27)}{\cos(\varphi + \varphi' - 2\eta)} \\ & - \left(\frac{21}{4} m^2 + \frac{57}{4} m^3\right) \gamma^2 e' \underset{(33)}{\cos(2\xi - \varphi')}\end{aligned}$$

$$+\left(\frac{3}{4}m^2+\frac{123}{8}m^3\right)\gamma^2\,e'\cos(2\xi\underset{(34)}{+}\varphi')$$
$$+\frac{63}{4}m^2\gamma^2ee'\cos(2\xi-\underset{(37)}{\varphi}-\varphi')-\frac{9}{4}m^2\gamma^2ee'\cos(2\xi-\underset{(38)}{\varphi}+\varphi')$$
$$+\left(\frac{21}{8}m^2-\frac{15}{32}m^3\right)e'\gamma^2\cos(2\xi-\underset{(63)}{\varphi'}-2\eta)$$
$$-\left(\frac{3}{8}m^2+\frac{63}{32}m^3\right)e'\gamma^2\cos(2\xi+\underset{(65)}{\varphi'}-2\eta).$$

Considérons maintenant les termes dépendans de la parallaxe solaire. En désignant par R_1 les termes de cette espèce qui résultent de la première partie de la fonction R, n° 3, et par R_2 ceux qui sont produits par la seconde partie de la même fonction, on aura, relativement à ces termes, n° 16,

$$r\frac{dR}{dr}=2R_1+3R_2.$$

D'après cette formule, en calculant séparément les deux parties R_1 et R_2, nous avons formé la valeur suivante :

$$r\frac{dR}{dr}=-\frac{99}{32}m^2\frac{a}{a'}\gamma^2\cos\xi-\frac{9}{4}m^2\frac{a}{a'}\gamma^2\,e'\cos(\xi-\varphi')$$
$$-\left(a_{74}+\frac{39}{32}\right)m^2\frac{a}{a'}\gamma^2\,e'\cos(\xi+\varphi').$$

Il suffira de supposer ici $\int d'R=R$, et, d'après la valeur précédente de R, on aura

$$\int d'R=-\frac{33}{32}m^2\frac{a}{a'}\gamma^2\cos\xi+\frac{27}{64}m^2\frac{a}{a'}\gamma^2\,e'\cos(\xi-\varphi')$$
$$-\left(\frac{1}{2}a_{74}+\frac{3}{32}\right)m^2\frac{a}{a'}\gamma^2\,e'\cos(\xi+\varphi').$$

On conclura de là

$$2\int d'R+r\frac{dR}{dr}=-\frac{165}{32}m^2\frac{a}{a'}\gamma^2\underset{(70)}{\cos\xi}-\frac{45}{32}m^2\frac{a}{a'}\gamma^2e'\cos(\xi\underset{(71)}{-}\varphi')$$
$$-\left(2a_{74}+\frac{45}{32}\right)m^2\frac{a}{a'}\gamma^2\,e'\cos(\xi\underset{(74)}{+}\varphi').$$

68. Au moyen de la valeur de $\delta \frac{1}{r}$ résultante des approximations successives, on a formé la suivante :

$$\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2 = -\left(\frac{m^4}{2} + \frac{67}{24}m^5\right)\gamma^2 - \left(\frac{15}{8}m^3 + \frac{5939}{384}m^4 + \frac{75867}{1024}m^5\right)\gamma^2 e \cos\varphi$$
$$- \frac{9}{4} m^4 \gamma^2 e' \cos\varphi'$$
$$- \frac{7}{12} m^4 \gamma^2 \cos 2\eta + \left(\frac{m^3}{3} a_{19} - \frac{123}{64} m^3\right) e \gamma^2 \cos(\varphi - 2\eta)$$
$$+ \left[\left(-\frac{m^4}{6} - \frac{29}{72} m^5\right) - \frac{2045}{1024} m^3 e^2\right] \gamma^2 \cos 2\xi$$
$$+ \left(-\frac{5}{16}m^3 - \frac{925}{384}m^4 - \frac{26539}{9216}m^5\right)\gamma^2 e \cos(2\xi - \varphi)$$
$$- \frac{413}{384} m^4 \gamma^2 e \cos(2\xi + \varphi) + \frac{m^4}{2}\gamma^2 \cos(2\xi - 2\eta)$$
$$- \frac{25}{16} m^3 \frac{a}{a'} \gamma^2 e' \cos(\xi - \varphi') + \frac{m^2}{3} a_{74} \frac{a}{a'} \gamma^2 e' \cos(\xi + \varphi')$$
$$- \frac{75}{64} m e^2 \gamma^2 \cos(2\xi - 2\varphi + 2\eta)$$
$$- \frac{15}{8} m^3 \gamma^2 e \cos(4\xi - \varphi) - \frac{3}{4} m^4 \gamma^2 \cos(4\xi - 2\eta)$$
$$- \frac{33}{16} m^3 e \gamma^2 \cos(4\xi - \varphi - 2\eta);$$

$$\left(\delta\frac{1}{r}\right)^3 = -\frac{15}{16} m^3 \gamma\ e \cos\varphi - \frac{185}{64} m^3 \gamma^2 e \cos(\xi - \varphi).$$

Si l'on suppose, pour abréger, comme dans le n° 13,

$$P = -r_1^3 \,\delta\frac{1}{r} + \frac{3}{2} r_1^4 \left(\delta\frac{1}{r}\right)^2 - 2r_1^5 \left(\delta\frac{1}{r}\right)^3;$$

qu'on substitue dans cette expression pour $\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2$ et $\left(\delta\frac{1}{r}\right)^3$ la valeur précédente, pour $\left(\delta\frac{1}{r}\right)$ celle qui résulte des approximations successives, et enfin, pour r_1^3, r_1^4, r_1^5 leurs valeurs elliptiques, la seule valeur $r^2 = 1$ exceptée, on aura

$$
\begin{aligned}
P = {} & \left[\frac{m^2}{2} + \frac{45}{16}m^3 - \left(\frac{45}{16}m^3 + \frac{5171}{256}m^4 + \frac{189457}{2048}m^5\right)\gamma^2\right]\gamma^2 e \cos \varphi \quad {\scriptstyle(1)} \\
& - \frac{249}{256} m^3 \gamma^2 e^2 \cos 2\varphi \quad {\scriptstyle(2)} \\
& + \frac{27}{8} m^2 \gamma^2 ee' \cos(\varphi - \varphi') \, {\scriptstyle(8)} + \frac{27}{8} m^2 \gamma^2 ee' \cos(\varphi + \varphi') \, {\scriptstyle(9)} \\
& - \frac{189}{32} m^2 \gamma^2 e^2 e' \cos(2\varphi - \varphi') \, {\scriptstyle(10)} + \frac{81}{16} m^2 \gamma^2 e e'^2 \cos(\varphi - 2\varphi') \, {\scriptstyle(12)} \\
& + \left[-\frac{7}{8}m^4 + \left(-\frac{15}{16} + \frac{405}{128}m\right)e^2\right]\gamma^2 \cos 2\eta \quad {\scriptstyle(18)} \\
& + \left(\frac{m^2}{2} a_{19} + \frac{3}{4}m^2 - \frac{513}{128}m^3\right) e \gamma^2 \cos(\varphi - 2\eta) \, {\scriptstyle(19)} + \frac{3}{4} m^2 e \gamma^2 \cos(\varphi + 2\eta) \, {\scriptstyle(20)} \\
& + \frac{81}{32} m^2 ee' \gamma^2 \cos(\varphi - \varphi' - 2\eta) \, {\scriptstyle(25)} + \frac{81}{32} m^2 ee' \gamma^2 \cos(\varphi + \varphi' - 2\eta) \, {\scriptstyle(27)} \\
& + \left[-\frac{m^4}{4} - \frac{29}{48}m^5 - \left(\frac{45}{32}m + \frac{243}{32}m^2 + \frac{35631}{1024}m^3\right)e^2\right]\gamma^2 \cos 2\xi \quad {\scriptstyle(30)} \\
& + \left[\frac{3}{2}m^2 + \frac{91}{16}m^3 - \left(\begin{array}{c} \frac{3}{4}m^2 + \frac{73}{32}m^3 + \frac{1063}{192}m^4 - \frac{35153}{18432}m^5 \\ + \frac{111}{54}m^2 e^2 + \frac{15}{8}m^2 e'^2 \end{array}\right)\gamma^2\right] e \cos(2\xi - \varphi) \quad {\scriptstyle(31)} \\
& - \left(\frac{3}{4}m^2 + \frac{29}{16}m^3 + \frac{679}{192}m^4 + \frac{45}{8}m e^2\right)\gamma^2 e \cos(2\xi + \varphi) \quad {\scriptstyle(32)} \\
& - \frac{105}{32} m \gamma^2 e^2 e' \cos(2\xi - \varphi') \, {\scriptstyle(33)} + \frac{45}{32} m \gamma^2 e^2 e' \cos(2\xi + \varphi') \, {\scriptstyle(34)} \\
& - \frac{21}{8} m^2 \gamma^2 ee' \cos(2\xi - \varphi - \varphi') \, {\scriptstyle(37)} + \frac{3}{8} m^2 \gamma^2 ee' \cos(2\xi - \varphi + \varphi') \, {\scriptstyle(38)} \\
& + \left(-\frac{9}{8}m^2 + \frac{123}{64}m^3\right) e\gamma^2 \cos(2\xi - \varphi - 2\eta) \, {\scriptstyle(59)} - \frac{15}{16} m e \gamma^2 \cos(2\xi - \varphi + 2\eta) \, {\scriptstyle(60)} \\
& + \left(-\frac{33}{16}m^2 + \frac{25}{32}m^3\right) e\gamma^2 \cos(2\xi + \varphi - 2\eta) \quad {\scriptstyle(61)} \\
& - \frac{63}{64} m e^2 \gamma^2 \cos(2\xi - 2\varphi + 2\eta) \, {\scriptstyle(67)} - \frac{225}{128} m e^2 \gamma^2 \cos(2\xi - 2\varphi + 2\eta) \, {\scriptstyle(68)} \\
& - \frac{99}{128} m e^2 \gamma^2 \cos(2\xi + 2\varphi - 2\eta) \quad {\scriptstyle(69)} \\
& - \frac{75}{32} m^2 \frac{a}{a'} \gamma^2 e' \cos(\xi - \varphi') \, {\scriptstyle(73)} + \frac{m^2}{2} a_{74} \frac{a}{a'} \gamma^2 e' \cos(\xi + \varphi') \, {\scriptstyle(74)}
\end{aligned}
$$

$$-\frac{45}{16}m^2\gamma^2 e\cos(4\xi-\varphi)_{(87)}-\frac{9}{8}m^4\gamma^2\cos(4\xi-2\eta)_{(100)}$$

$$-\frac{81}{32}m^2 e\gamma^2\cos(4\xi-\varphi-2\eta)_{(101)}.$$

En substituant les valeurs qui résultent des développemens précédens dans les équations de condition des n°s 15 et 62, il sera facile de calculer, par leur moyen, les termes dépendans de la quantité γ^2, qui doivent servir à compléter l'expression du rayon vecteur.

69. Déterminons d'abord les termes de cette espèce qui entrent dans l'expression du coefficient a_0. Nous suivrons ici la méthode que nous avons déjà employée n°s 23 et 50; mais il est nécessaire d'ajouter au second membre de l'équation (14) dont nous avons fait usage dans ces numéros, les termes dépendans de l'inclinaison des orbites de la Lune et du Soleil, que nous avions alors négligés. La seconde des équations (3), n° 1, donne

$$\frac{r^2dv^2}{(1+s^2)dt^2}=\frac{rd^2r}{dt^2}+\frac{1}{r}-r\frac{dR}{dr}-\frac{r^2ds^2}{dt^2}.$$

On a d'ailleurs, même numéro,

$$\frac{dv}{dt}=\frac{1+s^2}{r^2}\left[h+\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt\right]; \qquad (m)$$

d'où l'on tire, en élevant au carré,

$$\frac{r^2dv^2}{(1+s^2)dt^2}=\frac{h^2(1+s^2)}{r^2}+\frac{2dv}{dt}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt-\frac{1+s^2}{r^2}\left[\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt\right]^2.$$

En égalant ces deux valeurs de $\frac{r^2dv^2}{(1+s^2)dt^2}$, on trouve

$$\left.\begin{aligned}\frac{h^2(1+s^2)}{r^2}=\frac{rd^2r}{dt^2}+\frac{1}{r}-r\frac{dR}{dr}-\frac{2dv}{dt}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt\\+\frac{1+s^2}{r^2}\left[\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt\right]^2-\frac{r^2ds^2}{dt^2}.\end{aligned}\right\} \qquad (n)$$

Développons cette équation en n'ayant égard qu'aux termes non périodiques et multipliés par le facteur γ^2 que ses deux membres peuvent renfermer.

Si l'on désigne par $\alpha_0 \gamma^2$ le terme dépendant de γ^2 dans l'expression de a_0, et que, d'après la valeur de $\delta \frac{1}{r}$ qu'on trouvera n° 71, on fasse

$$\delta \frac{1}{r} = \left[m^2 + \frac{19}{6} m^3 - \left(\frac{m^2}{2} + \frac{29}{24} m^3\right) \gamma^2\right] \cos 2\xi,$$

on en conclura, en n'ayant égard qu'aux termes que nous considérons,

$$\frac{r d^2 r}{dt^2} = \left(2 m^4 + \frac{43}{6} m^5\right) \gamma^2, \quad \frac{1}{r} = \alpha_0 \gamma^2.$$

En ne considérant que la partie non périodique du développement de R donné n° 65, et en observant que $r \frac{dR}{dr} = 2R$, on aura

$$r \frac{dR}{dr} = -\left(\frac{3}{4} m^2 - \frac{9}{16} m^3 - \frac{985}{256} m^4 - \frac{8615}{1024} m^5\right) \gamma^2.$$

D'après la valeur de v, n°s 30 et 77, en différentiant on trouve

$$\frac{dv}{dt} = \left[\frac{11}{4} m^2 + \frac{85}{12} m^3 - \left(\frac{3}{8} m + \frac{35}{32} m^2 + \frac{2893}{1536} m^3\right) \gamma^2\right] \cos 2\xi.$$

On a d'ailleurs, n°s 18 et 66,

$$\int \left(\frac{dR}{dv}\right) dt = \left[\frac{3}{4} m^2 + \frac{3}{4} m^3 + \frac{m^4}{2} - \left(\frac{3}{8} m^2 + \frac{3}{8} m^3\right) \gamma^2\right] \cos 2\xi;$$

d'où l'on a conclu

$$\frac{2 dv}{dt} \int \left(\frac{dR}{dv}\right) dt = \left(-\frac{9}{32} m^3 - \frac{273}{128} m^4 - \frac{12509}{2048} m^5\right) \gamma^2.$$

De la valeur précédente de $\int \left(\frac{dR}{dv}\right) dt$ on tire aisé-

ment

$$\left[\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt\right]^2=\left[\frac{9}{32}m^4+\frac{9}{16}m^5+\left(-\frac{9}{32}m^4-\frac{9}{16}m^5\right)\gamma^2\right].$$

On peut supposer ici $\frac{1+s^2}{r^2}=1+\frac{\gamma^2}{2}$; d'où l'on conclura

$$\frac{1+s^2}{r^2}\left[\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt\right]^2=\left(-\frac{9}{64}m^4-\frac{9}{32}m^5\right)\gamma^2.$$

La valeur de la fonction s a été donnée n° 44; en la différentiant on a formé la suivante :

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt}=&\left(1+\frac{3}{4}m^2-\frac{3}{128}m^3-\frac{851}{512}m^4-\frac{195307}{24576}m^5\right)\gamma\cos\eta\\&+\left(\frac{3}{8}m+\frac{m^2}{32}+\frac{125}{1536}m^3+\frac{6661}{18432}m^4\right)\gamma\cos(2\xi-\eta)\\&+\left(\frac{33}{16}m^2+6m^3\right)\gamma\cos(2\xi+\eta);\end{aligned}$$

d'où l'on a conclu

$$\begin{aligned}\frac{ds^2}{dt^2}=&\left(\frac{1}{2}+\frac{105}{128}m^2-\frac{3}{256}m^3+\frac{3183}{4096}m^4+\frac{55891}{12288}m^5\right)\gamma^2\\&+\left(\frac{3}{8}m+\frac{67}{32}m^2+\frac{9773}{1536}m^3\right)\gamma^2\cos 2\xi.\end{aligned}$$

On a d'ailleurs, en négligeant l'excentricité de l'orbe lunaire :

$$r^2=1-2\delta\frac{1}{r}+3\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2-4\left(\delta\frac{1}{r}\right)^3+\text{etc.}$$

En substituant pour $\left(\delta\frac{1}{r}\right)$, $\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2$, $\left(\delta\frac{1}{r}\right)^3$ leurs valeurs, n°s 26 et 21, on trouvera, au moyen de cette formule :

$$\begin{aligned}r^2=&1-\frac{m^2}{3}+\frac{407}{144}m^4+\frac{325}{24}m^5\\&-\left(2m^2+\frac{19}{3}m^3+\frac{122}{9}m^4\right)\cos 2\xi.\end{aligned}$$

La combinaison de ces deux expressions donne

$$\frac{r^2 ds^2}{dt^2} = \left(\frac{1}{2} + \frac{251}{384}m^2 - \frac{99}{256}m^3 - \frac{50297}{36864}m^4 - \frac{51749}{12288}m^5\right)\gamma^2.$$

En substituant dans l'équation (n) ces différentes valeurs, on trouve

$$\frac{h^2(1+s^2)}{r^2} = \left(-\frac{1}{2} + \frac{37}{384}m^2 + \frac{27}{256}m^3 + \frac{55625}{36864}m^4 + \frac{108031}{12288}m^5 + \alpha_0\right)\gamma^2.$$

On a, n°s 73 et 27,

$$s^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{9}{128}m^2 + \frac{141}{256}m^3 + \frac{7103}{4096}m^4 + \frac{6541}{4096}m^5\right)\gamma^2$$
$$- \left(\frac{3}{8}m + \frac{3}{32}m^2 - \frac{273}{512}m^3\right)\gamma^2 \cos 2\xi;$$

$$\frac{1}{r^2} = 1 + \frac{m^2}{3} - \frac{103}{144}m^4 - \frac{7}{8}m^5 + \left(2m^2 + \frac{19}{3}m^3 + \frac{134}{9}m^4\right)\cos 2\xi;$$

d'où l'on a conclu

$$\frac{s^2}{r^2} = \left(\frac{1}{2} + \frac{91}{384}m^2 + \frac{45}{256}m^3 + \frac{4375}{36864}m^4 - \frac{14897}{12288}m^5\right)\gamma^2.$$

On a d'ailleurs, n° 23,

$$h^2 = 1 - \frac{2}{3}m^2 + \frac{19}{72}m^4 - \frac{9}{2}m^5;$$

par conséquent,

$$\frac{h^2 s^2}{r^2} = \left(\frac{1}{2} - \frac{37}{384}m^2 + \frac{45}{256}m^3 + \frac{3415}{36864}m^4 - \frac{43985}{12288}m^5\right)\gamma^2.$$

En retranchant cette valeur de celle de $\frac{h^2(1+s^2)}{r^2}$ trouvée plus haut, on aura

$$\frac{h^2}{r^2} = \left(-1 + \frac{37}{192}m^2 - \frac{9}{128}m^3 + \frac{26105}{18432}m^4 + \frac{3167}{256}m^5 + \alpha_0\right)\gamma^2.$$

En négligeant l'excentricité de l'orbe lunaire, on a

$$\frac{1}{r^2} = 1 + 2\delta\frac{1}{r} + \left(\delta\frac{1}{r}\right)^2.$$

Nous avons trouvé, n° 65, $\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2 = -\left(\frac{m^4}{2} + \frac{67}{24}m^5\right)\gamma^2$, et nous avons supposé $\delta\frac{1}{r} = \alpha_0\gamma^2$; en ne considérant donc que la partie non périodique de la fonction $\frac{1}{r^2}$, on aura

$$\frac{1}{r^2} = \left(2\alpha_0 - \frac{m^4}{2} - \frac{67}{24}m^5\right)\gamma^2.$$

Nous avons trouvé, n° 23, en faisant abstraction des termes multipliés par γ^2,

$$\frac{h^2}{r^2} = 1 - \frac{m^2}{3} - \frac{97}{144}m^4 - \frac{43}{8}m^5, \quad \frac{1}{r^2} = 1 + \frac{m^2}{3} - \frac{103}{144}m^4 - \frac{7}{8}m^5.$$

En réunissant ces valeurs à celles de $\frac{h^2}{r^2}$ et de $\frac{1}{r^2}$ trouvées plus haut, et divisant ensuite la première quantité par la seconde, on aura

$$h^2 = \frac{1 - \frac{m^2}{3} - \frac{97}{144}m^4 - \frac{43}{8}m^5 + \left(\alpha_0 - 1 + \frac{37}{192}m^2 - \frac{9}{128}m^3 + \frac{26105}{18432}m^4 + \frac{3167}{256}m^5\right)\gamma^2}{1 + \frac{m^2}{3} - \frac{103}{144}m^4 - \frac{7}{8}m^5 + \left(2\alpha_0 - \frac{m^4}{2} - \frac{67}{24}m^5\right)\gamma^2}.$$

En observant que les premières approximations donnent $\alpha_0 = (0)\gamma^2 + (0)m^2\gamma^2 + (0)m^3\gamma^2$, on tire de cette équation, en effectuant la division indiquée,

$$h^2 = 1 - \frac{2}{3}m^2 + \frac{19}{72}m^4 - \frac{9}{2}m^5$$
$$- \left(\alpha_0 + 1 - \frac{101}{192}m^2 + \frac{9}{128}m^3 - \frac{18905}{18432}m^4 - \frac{10991}{768}m^5\right)\gamma^2;$$

d'où, par l'extraction des racines, on conclut

$$h = 1 - \frac{m^2}{3} + \frac{11}{144}m^4 - \frac{9}{4}m^5$$
$$- \left(\frac{1}{2}\alpha_0 + \frac{1}{2} - \frac{37}{384}m^2 + \frac{9}{256}m^3 - \frac{21497}{36864}m^4 - \frac{9245}{1536}m^5\right)\gamma^2.$$

En multipliant cette expression par la valeur précédente de $\frac{1}{r^2}$, on forme la suivante:

$$\frac{h}{r^2} = 1 - \frac{3}{4}m^4 - \frac{25}{8}m^5$$
$$+ \left(\frac{3}{2}\alpha_0 - \frac{1}{2} - \frac{27}{384}m^2 - \frac{9}{256}m^3 + \frac{17433}{36864}m^4 + \frac{5611}{1536}m^5\right)\gamma^2$$
$$+ \left(2m^2 + \frac{19}{3}m^3 + \frac{128}{9}m^4\right)\cos 2\xi.$$

On a d'ailleurs, d'après la valeur de s^2 donnée plus haut :

$$1 + s^2 = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{9}{128}m^2 + \frac{141}{256}m^3 + \frac{7103}{4096}m^4 + \frac{6541}{4096}m^5\right)\gamma^2$$
$$+ \left(-\frac{3}{8}m - \frac{3}{32}m^2 + \frac{273}{512}m^3\right)\gamma^2 \cos 2\xi;$$

d'où l'on conclura

$$\frac{h(1+s^2)}{r^2} = \left(\frac{3}{2}\alpha_0 + \frac{9}{64}m^3 + \frac{141}{256}m^4 + \frac{5149}{4096}m^5\right)\gamma^2.$$

Nous avons trouvé plus haut :

$$\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt = \left[\frac{3}{4}m^2 + \frac{3}{4}m^3 + \frac{m^4}{4} - \left(\frac{3}{8}m^2 + \frac{3}{8}m^3\right)\gamma^2\right]\cos 2\xi.$$

On a d'ailleurs, nos 27 et 75 :

$$\frac{1}{r^2} = 1 + \frac{m^2}{3} + \left[2m^2 + \frac{19}{3}m^3 - \left(m^2 + \frac{29}{12}m^3\right)\gamma^2\right]\cos 2\xi;$$

d'où il est aisé de conclure :

$$\frac{1}{r^2}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt = \frac{3}{4}m^4 + \frac{25}{8}m^5 - \left(\frac{3}{4}m^4 + \frac{91}{32}m^4\right)\gamma^2$$
$$+ \left(\frac{3}{4}m^2 + \frac{3}{4}m^3 + \frac{3}{4}m^4\right)\cos 2\xi.$$

En combinant cette expression avec la valeur précédente de $(1 + s^2)$, on trouvera

$$\frac{1+s^2}{r^2}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt = \left(-\frac{9}{64}m^3 - \frac{141}{256}m^4 - \frac{5149}{4096}m^5\right)\gamma^2.$$

Si l'on substitue cette valeur et celle de $\frac{h(1+s^2)}{r^2}$ dans l'équation (m), et qu'on observe que, d'après la supposition que la longitude moyenne est la même dans le mouvement elliptique et dans le mouvement troublé, n° 23, en ne considérant que les termes non périodiques de l'expression de la longitude vraie, on doit avoir $\frac{dv}{dt}=1$, on trouvera, pour déterminer la valeur du coefficient α_0, que nous considérons, l'équation

$$0=\frac{3}{2}\alpha_0+\left(\frac{9}{64}-\frac{9}{64}=0\right)m^2+\left(\frac{141}{256}-\frac{141}{256}=0\right)m^4+\left(\frac{5149}{4096}-\frac{5149}{4096}=0\right)m^6;$$

d'où l'on conclut

$$\alpha_0=(0)\gamma^2+(0)m^2\gamma^2+(0)m^3\gamma^2+(0)m^4\gamma^2+(0)m^5\gamma^2,$$

et par suite, d'après l'expression précédente de h,

$$h=\left(-\frac{1}{2}+\frac{37}{384}m^2-\frac{9}{256}m^3+\frac{21497}{36864}m^4+\frac{9245}{1536}m^5\right)\gamma^2.$$

70. La substitution des valeurs des quantités R_1 et P_1, dans l'équation de condition (12), n° 15, donnera d'abord l'équation suivante :

$$\left.\begin{aligned}(a_1+1)(c^2-1)=c^2&\left[\frac{m^2}{2}+\frac{45}{16}m^3-\left(\frac{45}{16}m^3+\frac{5171}{256}m^4+\frac{189457}{2048}m^5\right)\gamma^2\right]\\&+\left(3m^2+\frac{117}{8}m^3+\frac{2555}{32}m^4+\frac{277127}{512}m^5\right)\gamma^2.\end{aligned}\right\}(p)$$

Le coefficient indéterminé a_1 étant l'une des arbitraires de la théorie, n° 24, nous supposerons dans ce qui va suivre

$$a_1=\frac{m^2}{6}-\frac{645}{128}m^3-\left(\frac{83}{128}m^2-\frac{1707}{256}m^3\right)\gamma^2,$$

et l'équation précédente servira à déterminer la quan-

tité c ou la vitesse moyenne du périgée lunaire. En supposant

$$c^2-1=-\frac{3}{2}m^2-\frac{225}{16}m^3+(\alpha m^2+6m^3+\delta m^4+\lambda m^5)\gamma^2,$$

et en substituant ces différentes valeurs dans l'équation (p), la comparaison des termes affectés des mêmes puissances de m donnera

$$\alpha=3,\quad 6=\frac{189}{16},\quad \delta=\frac{3819}{64},\quad \lambda=\frac{243951}{512}.$$

On aura donc

$$c^2=1-\frac{3}{2}m^2-\frac{225}{16}m^3+\left(3m^2+\frac{189}{16}m^3+\frac{3819}{64}m^4+\frac{243951}{512}m^5\right)\gamma^2,$$

et par suite

$$c=1-\frac{3}{4}m^2-\frac{225}{32}m^3+\left(\frac{3}{2}m^2+\frac{189}{32}m^3+\frac{3963}{128}m^4+\frac{259287}{1024}m^5\right)\gamma^2.$$

71. Cette valeur de c, jointe à la valeur de g, nº 40, et à celles des quantités R_2, R_6, etc., P_2, P_6, etc., fournit tout ce qui est nécessaire au développement des équations de condition, nºs 15 et 64, et l'on a formé, par leur substitution, les équations suivantes :

$$3a_2+3m^2\gamma^2=-\frac{249}{64}m^3\gamma^2+\frac{3}{4}m^2\gamma^2,$$

$$a_6(m^2-1)=\left(-\frac{9}{4}m^2+\frac{39}{16}m^3+\frac{7323}{256}m^4\right)\gamma^2,$$

$$-a_7=-\frac{27}{8}m^2e'^2,$$

$$-2m\,a_8=\frac{27}{8}m^2\gamma^2+\frac{9}{2}m^3\gamma^2,$$

$$2m\,a_9=\frac{27}{8}m^2\gamma^2+\frac{9}{2}m^3\gamma^2,$$

$$3a_{16} = -\frac{4.189}{32} m\,\gamma^2,$$

$$-4m\,a_{17} = \frac{81}{16} m^2 \gamma^2 + \frac{27}{4} m^2 \gamma^2,$$

$$a_{18}(3+6m^2) = 4\left[-\frac{7}{8}m^4 + \left(-\frac{15}{16}+\frac{405}{128}m\right)e^2\right]$$
$$+\left(\frac{3}{2}m^2 - \frac{9}{4}m^3 + \frac{69}{64}m^4\right),$$

$$a_{19}\left(\frac{9}{2}m^2 + \frac{207}{16}m^3\right) = \left(\frac{m^2}{2}a_{18} + \frac{3}{4}m^2 - \frac{513}{128}m^3\right)$$
$$-\left(2m^2 a_{16} + \frac{9}{2}m^2 - \frac{549}{94}m^3\right),$$

$$8a_{20} = 9\left(\frac{3}{4}m^2 - \frac{15}{8}e^2\right) + \frac{3}{2}m^2,$$

$$a_{21}(3-4m) = \frac{9}{4}m^2 - \frac{63}{16}m^3,$$

$$3a_{22} = \frac{9}{4}m^2,$$

$$2m\,a_{25} = \frac{81}{32}m^2 - \frac{39}{8}m^3,$$

$$-2m\,a_{27} = \frac{81}{32}m^2 - \frac{39}{8}m^3,$$

$$a_{30}(3-8m+4m^2) = (4-8m+4m^2)$$
$$\times\left[-\frac{m^4}{4} - \frac{29}{48}m^5 - \left(\frac{45}{32}m + \frac{243}{32}m^2 + \frac{35631}{1024}m^3\right)e^2\right]\gamma^2$$
$$+\left(-\frac{3}{2}m^2 + \frac{3}{8}m^3 + \frac{489}{128}m^4 + \frac{10723}{1536}m^5\right)\gamma^2$$
$$+\left(\frac{15}{4}m^2 + \frac{153}{16}m^3\right)e^2\gamma^2 + \left(\frac{15}{4}m^2 + \frac{123}{2}m^3\right)e'^2\gamma^2,$$

$$a_{31}\left[-4m + \frac{11}{2}m^2 + \frac{177}{16}m^3 + \frac{2307}{64}m^4 - \left(3m^2 + \frac{93}{16}m^3 + \frac{2883}{64}m^4\right)\gamma^2\right]$$
$$= \left[1 - 4m + \frac{11}{2}m^2 + \frac{177}{16}m^3 - \left(3m^2 + \frac{93}{16}m^3\right)\gamma^2\right]$$
$$\times\left[\frac{3}{2}m^2 + \frac{91}{16}m^3 - \left(\begin{array}{c}\frac{3}{4}m^2 + \frac{73}{32}m^3 + \frac{1063}{192}m^4 - \frac{35153}{18432}m^5 \\ + \frac{111}{64}m^2 e^2 + \frac{15}{8}m^2 e'^2\end{array}\right)\gamma^2\right]$$
$$+\left(\frac{9}{2}m^2 + \frac{69}{8}m^3 + 26m^4 + \frac{947}{96}m^5 - \frac{3}{2}m^2 e^2 - \frac{45}{4}m^2 e'^2\right)\gamma^2,$$

$$a_{31}\left(8-12m-\frac{m^2}{2}+9m^2\gamma^2\right)=\left(9-12m-\frac{m^2}{2}+9m^2\gamma^2\right)$$

$$\times\left[\frac{3}{4}m^2-\left(\begin{array}{c}\frac{3}{4}m^2+\frac{29}{16}m^3+\frac{679}{192}m^4\\+\frac{45}{16}me^2\end{array}\right)\gamma^2\right]$$

$$-\left(\frac{3}{2}m^2-\frac{5}{8}m^3+\frac{167}{24}m^4\right)\gamma^2,$$

$$a_{33}(3-12m)=-\frac{4.105}{32}me^2\gamma^2-\left(\frac{21}{4}m^2+\frac{57}{4}m^3\right)\gamma^2,$$

$$a_{34}(3-4m)=\frac{4.45}{32}me^2\gamma^2+\left(\frac{3}{4}m^2+\frac{123}{8}m^3\right)\gamma^2,$$

$$-a_{36}=-\frac{15}{16}m^2\gamma^2,$$

$$-6ma_{37}=-\frac{21}{8}m^3\gamma^2+\frac{63}{4}m^2\gamma^2,$$

$$-2ma_{38}=\frac{3}{8}m^3\gamma^2-\frac{9}{4}m^2\gamma^2,$$

$$(4m^2-1)-a_{57}=\frac{3}{4}m^2-\frac{9}{16}m^3-\frac{1169}{256}m^4,$$

$$a_{59}\left(4m+\frac{11}{2}m^2\right)=(1+4m)\left(-\frac{9}{8}m^2+\frac{123}{64}m^3\right)-\frac{3}{2}m^2-\frac{9}{2}m^3,$$

$$8a_{60}=-\frac{9.15}{16}m^2-\frac{15}{8}m^2,$$

$$a_{61}\left(-4m-\frac{m^2}{2}\right)=(1-4m)\left(-\frac{33}{16}m^2+\frac{25}{32}m^3\right)$$

$$+\frac{33}{8}m^2-\frac{813}{64}m^3,$$

$$-a_{62}=\frac{21}{8}m^2-\frac{15}{32}m^3,\quad -a_{65}=-\frac{3}{8}m^2-\frac{63}{32}m^3,\quad 3a_{67}=-\frac{63}{16}m,$$

$$3a_{68}=-\frac{225}{32}m,\quad 3a_{69}=-\frac{99}{32}m,$$

$$-2ma_{70}=-\frac{165}{32}m^2\gamma^2,\quad -4ma_{72}=-\frac{75}{32}m^2\gamma^2-\frac{45}{32}m^2\gamma^2,$$

$$0=\frac{m^2}{2}a_{74}-2m^2a_{74}-\frac{45}{32}m^2\gamma^2,$$

$$8a_{97}=-\frac{9.45}{16}m^2\gamma^2-\frac{45}{16}m^2\gamma^2,$$

$$a_{100}(3-16m)=-\frac{4.9}{8}m^2+\left(\frac{9}{8}m^3-\frac{219}{128}m^4\right),$$

$$-8ma_{101}=-\frac{81}{32}m^3-\frac{9}{32}m^3.$$

72. En résolvant ces équations, on en tire

$$a_2 = -\frac{131}{64} m^2 \gamma^2,$$

$$a_6 = \left(\frac{9}{4} m^2 - \frac{39}{16} m^3 - \frac{6747}{256} m^4\right) \gamma^2,$$

$$a_7 = \frac{27}{8} m^2 \gamma^2,$$

$$a_8 = -\frac{63}{16} m \gamma^2,$$

$$a_9 = \frac{63}{16} m \gamma^2,$$

$$a_{10} = -\frac{63}{8} m \gamma^2,$$

$$a_{12} = -\frac{189}{64} m \gamma^2,$$

$$a_{18} = -\frac{m^2}{2} - \frac{3}{4} m^3 - \frac{347}{192} m^4 + \left(-\frac{5}{4} + \frac{135}{32} m^2\right) e^2,$$

$$a_{21} = \frac{3}{4} m^2 - \frac{5}{16} m^3, \quad a_{22} = \frac{3}{4} m^2,$$

$$a_{26} = -\frac{75}{64} m^2, \quad a_{27} = \frac{75}{64} m^2,$$

$$a_{30} = \left[\begin{array}{l} -\frac{m^2}{2} - \frac{29}{24} m^3 - \frac{1861}{1152} m^4 - \frac{7031}{13824} m^5 \\ -\left(\frac{15}{8} m + \frac{81}{8} m^2 + \frac{110305}{2048} m^3\right) e^2 + \left(\frac{5}{4} m^2 + \frac{205}{12} m^3\right) e'^2 \end{array}\right] \gamma^2,$$

$$a_{31} = \left(-\frac{15}{16} m - \frac{161}{32} m^2 - \frac{67151}{3072} m^3 - \frac{3476833}{36864} m^4 - \frac{15}{256} m e^2 + \frac{75}{32} m e'^2\right) \gamma^2,$$

$$a_{32} = \left(-\frac{33}{32} m^2 - \frac{305}{128} m^3 - \frac{691}{96} m^4 - \frac{405}{128} m e^2\right) \gamma^2,$$

$$a_{33} = \left(-\frac{7}{4} m^2 - \frac{47}{4} m^3 - \frac{35}{8} m e^2\right) \gamma^2,$$

$$a_{34} = \left(\frac{m^2}{4} + \frac{131}{24} m^3\right) \gamma^2,$$

$$a_{35} = \frac{15}{16} m^2 \gamma^2,$$

$$a_{37} = -\frac{35}{16} m \gamma^2,$$

$$a_{38} = \frac{15}{16} m \gamma^2,$$

$$a_{57} = -\frac{3}{4}m^2 + \frac{9}{16}m^3 + \frac{401}{256}m^4,$$

$$a_{59} = -\frac{21}{32}m - \frac{111}{128}m^2,$$

$$a_{60} = -\frac{165}{128}m^2,$$

$$a_{61} = -\frac{33}{64}m + \frac{503}{512}m^2,$$

$$a_{62} = -\frac{21}{8}m^2 + \frac{15}{32}m^3, \quad a_{66} = \frac{3}{8}m^2 + \frac{63}{32}m^3, \quad a_{67} = -\frac{21}{16}m,$$

$$a_{68} = -\frac{75}{32}m, \quad a_{69} = -\frac{33}{32}m,$$

$$a_{70} = \frac{165}{64}m\,\gamma^2, \quad a_{73} = \frac{15}{16}m\,\gamma^2, \quad a_{74} = -\frac{15}{16}\gamma^2,$$

$$a_{97} = -\frac{45}{64}m^2\gamma^2,$$

$$a_{100} = \frac{3}{8}m^3 - \frac{9}{128}m^4, \quad a_{101} = \frac{45}{128}m^3.$$

Inégalités de la longitude dépendantes de l'inclinaison de l'orbe lunaire à l'écliptique.

73. Déterminons maintenant les termes dépendans de l'inclinaison de l'orbe lunaire à l'écliptique qui entrent dans l'expression de la longitude.

Reprenons la deuxième des équations (A), n° 1,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1+s^2}{r^2}\left[h + \int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt\right].$$

En différentiant cette équation par rapport à la caractéristique δ, on aura

$$\frac{dv}{dt} = \left[\frac{dv}{dt}\right]s^2 + \frac{1}{r^2}\delta.\left[h + \int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt\right] + \left[h + \int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt\right]\delta\frac{1}{r^2}. \quad (a)$$

Nous supposerons, comme dans les numéros pré-

cédens, que la caractéristique δ se rapporte ici au carré γ^2 de la tangente de l'inclinaison de l'orbe lunaire à l'écliptique, en sorte que les quantités qui en sont affectées doivent être multipliées par γ^2, tandis que les quantités entourées de parenthèses sont indépendantes de l'inclinaison mutuelle des orbites de la Lune et du Soleil.

Au moyen de la valeur de s donnée nos 44 et 63, on a formé la suivante :

$$
\begin{aligned}
s^2 = &\left(\frac{1}{2} + \frac{9}{128}m^2 + \frac{141}{256}m^3 + \frac{7103}{4096}m^4 + \frac{6541}{4096}m^5\right)\gamma^2 \\
&+ \left(\frac{109}{32}m^2 + \frac{1629}{128}m^3\right)\gamma^2\, e\cos \underset{(1)}{\varphi} \\
&+ \left(-\frac{5}{8} + \frac{135}{64}m + \frac{3723}{512}m^2\right)\gamma^2\, e^2 \cos \underset{(2)}{2\varphi} \\
&+ \left(-\frac{3}{4}m^2 + \frac{155}{64}m^3 + \frac{3517}{192}m^4\right)\gamma^2\, e' \cos \underset{(6)}{\varphi'} \\
&- \frac{87}{64}m^2\gamma^2 e'^2 \cos \underset{(7)}{2\varphi'} - \frac{381}{64}m\gamma^2 e^2 e' \cos \underset{(10)}{(2\varphi - \varphi')} \\
&+ \left(-\frac{1}{2} + \frac{253}{256}m^4 + 2e^2\right)\gamma^2 \cos \underset{(18)}{2\eta} \\
&+ \left(1 - \frac{3}{2}m^2 - \frac{177}{128}m^3 - \frac{7}{8}e^2\right) e\gamma^2 \cos \underset{(19)}{(\varphi - 2\eta)} - \left(1 + \frac{m^2}{2} - \frac{27}{8}e^2\right) e\gamma^2 \cos \underset{(20)}{(\varphi + 2\eta)} \\
&+ \left(-\frac{3}{8}m - \frac{9}{64}m^2 + \frac{4593}{256}m^3 + \frac{267}{64}m e^2 - \frac{27}{64}m e'^2\right) e'\gamma^2 \cos \underset{(21)}{(\varphi' - 2\eta)} \\
&+ \left(\frac{3}{8}m + \frac{69}{64}m^2\right) e'\gamma^2 \cos \underset{(22)}{(\varphi' + 2\eta)} \\
&- \frac{13}{8}e^2\gamma^2 \cos \underset{(24)}{(2\varphi + 2\eta)} + \frac{15}{8}m\, ee'\gamma^2 \cos \underset{(25)}{(\varphi - \varphi' - 2\eta)} \\
&- \frac{27}{8}m\, ee'\gamma^2 \cos \underset{(26)}{(\varphi - \varphi' + 2\eta)} - \frac{15}{8}m\, ee'\gamma^2 \cos \underset{(27)}{(\varphi + \varphi' - 2\eta)}
\end{aligned}
$$

$$+\frac{27}{8}m\,ee'\gamma^2\cos(\varphi+\varphi'+2\eta)_{(28)}-\frac{9}{32}m\,e'^2\gamma^2\cos(2\varphi'-2\eta)_{(29)}$$

$$+\left\{\begin{array}{l}\left(-\frac{3}{8}m-\frac{3}{32}m^2+\frac{273}{512}m^3+\frac{2947}{2048}m^4+\frac{153031}{49152}m^5\right)\\ +\left(\frac{3}{4}m+\frac{15}{64}m^2+\frac{27939}{4096}m^3\right)e^2\\ +\left(\frac{15}{16}m+\frac{159}{32}m^2+\frac{5121}{1024}m^3\right)e'^2\end{array}\right\}\gamma^2\cos 2\xi_{(30)}$$

$$+\left[\begin{array}{l}\left(\frac{3}{4}m+\frac{39}{16}m^2+\frac{2925}{768}m^3+\frac{5789073}{18432}m^4\right)\\ +\frac{27}{32}m\,e^2-\frac{15}{8}m\,e'^2\end{array}\right]\gamma^2 e\cos(2\xi-\varphi)_{(31)}$$

$$+\left[\begin{array}{l}\left(-\frac{3}{4}m-\frac{7}{16}m^2-\frac{173}{768}m^3+\frac{126193}{18432}m^4\right)\\ -\frac{21}{16}m\,e^2+\frac{15}{8}m\,e'^2\end{array}\right]\gamma^2 e\cos(2\xi+\varphi)_{(32)}$$

$$+\left[\left(-\frac{7}{8}m-\frac{55}{32}m^2+\frac{469}{512}m^3\right)+\frac{7}{4}me^2+\frac{123}{64}me'^2\right]\gamma^2 e'\cos(2\xi-\varphi')_{(33)}$$

$$+\left[\left(\frac{3}{8}m+\frac{51}{32}m^2+\frac{1125}{1536}m^3\right)-\frac{21}{32}me^2-\frac{3}{64}me'^2\right]\gamma^2 e'\cos(2\xi+\varphi')_{(34)}$$

$$+\frac{9}{8}m\,\gamma^2e^2\cos(2\xi-2\varphi)_{(35)}-\frac{39}{32}m\,\gamma^2e^2\cos(2\xi+2\varphi)_{(36)}$$

$$+\frac{7}{4}m\,\gamma^2ee'\cos(2\xi-\varphi-\varphi')_{(37)}-\frac{3}{4}m\,\gamma^2ee'\cos(2\xi-\varphi+\varphi')_{(38)}$$

$$-\frac{7}{4}m\,\gamma^2ee'\cos(2\xi+\varphi-\varphi')_{(39)}+\frac{3}{4}m\,\gamma^2ee'\cos(2\xi+\varphi+\varphi')_{(40)}$$

$$-\frac{51}{32}m\,\gamma^2e'^2\cos(2\xi-2\varphi')_{(41)}+\frac{9}{32}m\,\gamma^2e'^2\cos(2\xi+2\varphi')_{(42)}$$

$$+\left(\frac{3}{8}m+\frac{25}{32}m^2+\frac{2957}{1536}m^3-\frac{21}{32}me^2-\frac{15}{16}me'^2\right)\gamma^2\cos(2\xi-2\eta)_{(57)}$$

$$+\left(-\frac{11}{16}m^2-\frac{59}{24}m^3-\frac{195}{32}me^2\right)\gamma^2\cos(2\xi+2\eta)_{(58)}$$

$$+\left(\frac{15}{8}m+\frac{235}{32}m^2\right)e\,\gamma^2\cos(2\xi-\varphi-2\eta)_{(59)}$$

$$+\left(-\frac{15}{8}m-\frac{219}{32}m^2-\frac{42105}{1536}m^3\right)e\,\gamma^2\cos(2\xi-\underset{(60)}{\varphi}+2\eta)$$

$$-\left(\frac{m^2}{16}-\frac{821}{1536}m^3\right)e\,\gamma^2\cos(2\xi+\underset{(61)}{\varphi}-2\eta)-\frac{39}{16}m^2\,e\,\gamma^2\cos(2\xi+\underset{(62)}{\varphi}+2\eta)$$

$$-\frac{77}{32}m^2\,e'\,\gamma^2\cos(2\xi-\underset{(64)}{\varphi'}+2\eta)+\frac{11}{32}m^2\,e'\,\gamma^2\cos(2\xi+\underset{(66)}{\varphi'}+2\eta)$$

$$+\frac{135}{32}m\;e^2\,\gamma^2\cos(2\xi-\underset{(67)}{2\varphi}-2\eta)+\frac{135}{64}m\;e^2\,\gamma^2\cos(2\xi-\underset{(68)}{2\varphi}+2\eta)$$

$$-\frac{15}{64}m^2\,e^2\,\gamma^2\cos(2\xi+\underset{(69)}{2\varphi}-2\eta)-\frac{33}{64}m^2\,\gamma^2\cos\underset{(86)}{4\xi}$$

$$-\left(\frac{45}{32}m^2+\frac{531}{64}m^3\right)\gamma^2\,e\cos(4\xi\underset{(87)}{-}\varphi)$$

$$-\frac{385}{128}m^2\,\gamma^2\,e'\cos(4\xi\underset{(89)}{-}\varphi')+\frac{99}{128}m^2\,\gamma^2\,e'\cos(4\xi\underset{(90)}{+}\varphi')$$

$$-\left(\frac{9}{128}m^2+\frac{9}{256}m^3-\frac{761}{4096}m^4\right)\gamma^2\cos(4\xi\underset{(100)}{-}2\eta)$$

$$+\frac{9}{64}m^2\,e\,\gamma^2\cos(4\xi-\underset{(101)}{\varphi}-2\eta)-\frac{9}{64}m^2\,e\,\gamma^2\cos(4\xi+\varphi-2\eta).$$

D'après la valeur de v déterminée par les approximations précédentes, on a

$$\left[\frac{dv}{dt}\right]=1+\left(2-\frac{e^2}{4}-\frac{975}{64}m^2\right)e\cos\underset{(1)}{\varphi}+\left(\frac{5}{2}+\frac{23}{8}m^2\right)e^2\cos\underset{(2)}{2\varphi}$$

$$+\left(-3m^2+\frac{735}{16}m^4\right)e'\cos\underset{(6)}{\varphi'}-\frac{9}{2}m^2\,e'^2\cos\underset{(7)}{2\varphi'}$$

$$+\frac{21}{4}m\,e\,e'\cos(\varphi\underset{(8)}{-}\varphi')-\frac{21}{4}m\,e\,e'\cos(\varphi\underset{(9)}{+}\varphi')$$

$$+\frac{105}{8}m\;e^2e'\cos(2\varphi\underset{(10)}{-}\varphi')+\frac{63}{16}m\;e\;e'^2\cos(\varphi\underset{(12)}{-}2\varphi')$$

$$+\left[\begin{array}{l}\left(\frac{11}{4}m^2+\frac{85}{12}m^3+\frac{539}{36}m^4+\frac{3031}{108}m^5\right)\\+\left(\frac{75}{8}m+\frac{801}{32}m^2+\frac{53855}{512}m^3\right)e^2-\left(\frac{55}{8}m^2+\frac{1217}{24}m^3\right)e'^2\end{array}\right]\cos\underset{(16)}{2\xi}$$

$$+\left(\frac{15}{4}m+\frac{143}{16}m^2+\frac{27289}{768}m^3+\frac{1121471}{9216}m^4-\frac{75}{8}me'^2\right)e\cos(2\xi\underset{(31)}{-}\varphi)$$

$$+\left(\frac{51}{8}m^2+\frac{135}{8}m^3+\frac{2495}{64}m^4+\frac{585}{32}m\,e^2\right)e\cos(2\xi\underset{(32)}{+}\varphi)$$

$$+\left(\frac{77}{8}m^2+\frac{727}{16}m^3+\frac{175}{8}m\,e^2\right)e'\cos(2\xi\underset{(33)}{-}\varphi')$$

$$-\left(\frac{11}{8}m^2+\frac{481}{48}m^3-\frac{75}{8}m\,e^2\right)e'\cos(2\xi\underset{(34)}{+}\varphi')$$

$$+\frac{35}{4}m\,e\,e'\cos(2\xi\underset{(37)}{-\varphi}-\varphi')-\frac{15}{4}m\,e\,e'\cos(2\xi\underset{(38)}{-\varphi}+\varphi').$$

$$-\frac{15}{8}m\frac{a}{a'}\cos\xi+\frac{15}{8}m\frac{a}{a'}e'\cos(\xi\underset{(73)}{-}\varphi')$$

$$+\frac{5}{2}\frac{a}{a'}e'\cos(\xi\underset{(74)}{+}\varphi')+\frac{201}{64}m^4\cos\underset{(86)}{4\xi}+\frac{765}{64}m^3\,e\cos(4\xi\underset{(87)}{-}\varphi).$$

En combinant entre elles ces valeurs, on formera la suivante :

$$\left[\frac{dv}{dt}\right]s^2=\left(1+\frac{91}{32}m^2+\frac{405}{128}m^3\right)\gamma^2\,e\cos\underset{(1)}{\varphi}$$

$$+\left(\frac{5}{8}+\frac{135}{64}m+\frac{5573}{512}m^2\right)\gamma^2\,e^2\cos\underset{(2)}{2\varphi}$$

$$+\left(-\frac{9}{4}m^2+\frac{3}{16}m^3+\frac{8219}{256}m^4\right)\gamma^2\,e'\cos\underset{(6)}{\varphi'}-\frac{231}{64}m^2\gamma^2e'^2\cos\underset{(7)}{2\varphi'}$$

$$+\frac{21}{8}m\,\gamma^2\,e\,e'\cos(\varphi\underset{(8)}{-}\varphi')-\frac{21}{8}m\,\gamma^2\,e\,e'\cos(\varphi\underset{(9)}{+}\varphi')$$

$$+\frac{39}{64}m\,\gamma^2\,e^2e'\cos(2\varphi\underset{(10)}{-}\varphi')+\frac{63}{32}m\,\gamma^2e\,e'^2\cos(\varphi\underset{(12)}{-}2\varphi')$$

$$+\left[\left(-\frac{1}{2}+\frac{33}{64}m^2+\frac{313}{128}m^4\right)+2e^2\right]\gamma^2\cos\underset{(18)}{2\eta}$$

$$+\frac{1}{2}e\,\gamma^2\cos(\varphi\underset{(19)}{-}2\eta)$$

$$-\left(\frac{3}{2}+\frac{m^2}{2}-\frac{107}{16}e^2\right)e\,\gamma^2\cos(\varphi\underset{(20)}{+}2\eta)$$

$$+\left(\begin{array}{l}-\frac{3}{8}m+\frac{39}{64}m^2+\frac{4923}{256}m^3-\frac{69}{64}m e^2\\ -\frac{27}{64}m e'^2\end{array}\right) e' \gamma^2 \cos\underset{(21)}{(\varphi' - 2\eta)}$$

$$+\left(\frac{3}{8}m+\frac{117}{64}m^2\right) e' \gamma^2 \cos\underset{(22)}{(\varphi' + 2\eta)}$$

$$-\frac{13}{4} e^2 \gamma^2 \cos\underset{(24)}{(2\varphi + 2\eta)} + \frac{15}{16} m\, e\, e' \gamma^2 \cos\underset{(25)}{(\varphi - \varphi' - 2\eta)}$$

$$-\frac{81}{16} m\, e\, e' \gamma^2 \cos\underset{(26)}{(\varphi - \varphi' + 2\eta)} - \frac{15}{16} m\, e\, e' \gamma^2 \cos\underset{(27)}{(\varphi + \varphi' - 2\eta)}$$

$$+\frac{81}{16} m\, e\, e' \gamma^2 \cos\underset{(28)}{(\varphi + \varphi' + 2\eta)} - \frac{9}{32} m\, e'^2 \gamma^2 \cos\underset{(29)}{(2\varphi' - 2\eta)}$$

$$+\left\{\begin{array}{l}-\frac{3}{8}m+\frac{41}{32}m^2+\frac{6259}{1536}m^3+\frac{168071}{18432}m^4+\frac{7900991}{442368}m^5\\ +\left(\frac{87}{16}m+\frac{59}{4}m^2+\frac{860689}{12288}m^3\right)e^2\\ +\left(\frac{15}{16}m+\frac{49}{32}m^2-\frac{60221}{3072}m^3\right)e'^2\end{array}\right\} \gamma^2 \cos\underset{(30)}{2\xi}$$

$$+\left[\begin{array}{l}\frac{9}{4}m+\frac{109}{16}m^2+\frac{34363}{1536}m^3+\frac{1762187}{4608}m^4\\ \qquad +\frac{117}{64}m e^2-\frac{45}{8}m e'^2\end{array}\right] \gamma^2 e \cos\underset{(31)}{(2\xi - \varphi)}$$

$$+\left[\begin{array}{l}-\frac{9}{8}m+\frac{85}{32}m^2+\frac{13433}{1536}m^3+\frac{164809}{4608}m^4\\ \qquad +\frac{459}{64}m e^2+\frac{45}{16}m e'^2\end{array}\right] \gamma^2 e \cos\underset{(32)}{(2\xi + \varphi)}$$

$$+\left[\begin{array}{l}-\frac{7}{8}m+\frac{99}{32}m^2+\frac{12389}{512}m^3\\ \qquad +\frac{203}{16}m e^2+\frac{123}{64}m e'^2\end{array}\right] \gamma^2 e' \cos\underset{(33)}{(2\xi - \varphi')}$$

$$+\left[\begin{array}{l}\frac{3}{8}m+\frac{29}{32}m^2-\frac{5707}{1536}m^3\\ \qquad -\frac{171}{32}m e^2-\frac{3}{64}m e'^2\end{array}\right] \gamma^2 e' \cos\underset{(34)}{(2\xi + \varphi')}$$

$$-\frac{39}{16} m \gamma^2 e^2 \cos\underset{(36)}{(2\xi + 2\varphi)}$$

$$+\frac{21}{4}m\gamma^2 ee'\cos(2\xi-\varphi-\varphi')_{(37)}-\frac{9}{4}m\gamma^2 ee'\cos(2\xi-\varphi+\varphi')_{(38)}$$

$$-\frac{21}{8}m\gamma^2 ee'\cos(2\xi+\varphi-\varphi')_{(39)}+\frac{9}{8}m\gamma^2 ee'\cos(2\xi+\varphi+\varphi')_{(40)}$$

$$-\frac{51}{32}m\gamma^2 e'^2\cos(2\xi-2\varphi')_{(41)}+\frac{9}{32}m\gamma^2 e'^2\cos(2\xi+2\varphi')_{(42)}$$

$$-\left(\frac{11}{8}m^2+\frac{203}{48}m^3+\frac{195}{16}me^2\right)\gamma^2\cos(2\xi+2\eta)_{(58)}$$

$$+\left(\frac{21}{16}m+\frac{289}{64}m^2\right)e\gamma^2\cos(2\xi-\varphi-2\eta)_{(59)}$$

$$+\left(-\frac{45}{16}m-\frac{537}{64}m^2-\frac{108171}{3072}m^3\right)e\gamma^2\cos(2\xi-\varphi+2\eta)_{(60)}$$

$$+\left(\frac{3}{8}m+\frac{m^2}{2}+\frac{1369}{768}m^3\right)e\gamma^2\cos(2\xi+\varphi-2\eta)_{(61)}-\frac{195}{32}m^2e\gamma^2\cos(2\xi+\varphi+2\eta)_{(62)}$$

$$-\frac{77}{16}m^2e'\gamma^2\cos(2\xi-\varphi'+2\eta)_{(64)}+\frac{11}{16}m^2e'\gamma^2\cos(2\xi+\varphi'+2\eta)_{(66)}$$

$$+\frac{75}{16}me^2\gamma^2\cos(2\xi-2\varphi-2\eta)_{(67)}+\frac{135}{64}me^2\gamma^2\cos(2\xi-2\varphi+2\eta)_{(68)}$$

$$+\frac{15}{64}me^2\gamma^2\cos(2\xi+2\varphi-2\eta)_{(69)}-\frac{15}{16}m\frac{a}{a'}\gamma^2\cos\xi_{(70)}$$

$$+\frac{15}{16}m\frac{a}{a'}\gamma^2e'\cos(\xi-\varphi')_{(73)}+\frac{5}{4}\frac{a}{a'}\gamma^2e'\cos(\xi+\varphi')_{(74)}$$

$$-\frac{33}{32}m^2\gamma^2\cos 4\xi_{(86)}+\left(-\frac{135}{64}m^2-\frac{117}{32}m^3\right)\gamma^2e\cos(4\xi-\varphi)_{(87)}$$

$$-\frac{385}{64}m^3\gamma^2e'\cos(4\xi-\varphi')_{(89)}+\frac{99}{64}m^3\gamma^2e'\cos(4\xi+\varphi')_{(90)}$$

$$+\left(-\frac{9}{128}m^2+\frac{123}{256}m^3+\frac{7385}{4096}m^4\right)\gamma^2\cos(4\xi-2\eta)_{(100)}$$

$$+\frac{99}{128}m^3e\gamma^2\cos(4\xi-\varphi-2\eta)_{(101)}-\frac{27}{128}m^3e\gamma^2\cos(4\xi+\varphi-2\eta).$$

74. En ne considérant que les termes affectés du coefficient γ^2 dans l'expression de la quantité h, on

trouve, nos 4 et 69,

$$\delta h = -\left(\frac{1}{2} - \frac{37}{384}m^2 + \frac{9}{256}m^3 - \frac{21497}{36864}m^4\right)\gamma^2 + \frac{e^2\gamma^2}{4}.$$

La valeur de la fonction $\delta\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt$ a été développée dans le n° 66; en la réunissant à la précédente, on a formé l'expression qui suit:

$$\delta\left[h + \int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt\right] = -\left(\frac{1}{2} - \frac{37}{384}m^2 + \frac{9}{256}m^3 - \frac{21497}{36864}m^4\right)\gamma^2 + \frac{e^2\gamma^2}{4}$$

$$+\left(-\frac{3}{8}m^2 + \frac{33}{32}m^3 + \frac{23209}{512}m^4\right)\gamma^2 e' \cos \underset{(6)}{\varphi'}$$

$$-\frac{21}{64}m^2\gamma^2 e'^2 \cos \underset{(7)}{2\varphi'}$$

$$+\left(-\frac{9}{16}m^3 + \frac{201}{256}m^4\right)\gamma^2 \cos \underset{(18)}{2\eta}$$

$$-\frac{45}{32}m^3 e'\gamma^2 \cos \underset{(21)}{(\varphi' - 2\eta)}$$

$$-\left\{\begin{array}{l} \frac{3}{8}m^2 + \frac{3}{8}m^3 + \frac{155}{512}m^4 + \frac{337}{1024}m^5 \\ +\left(\frac{15}{16}m^2 + \frac{15}{16}m^3\right)e^2 \\ +\left(\frac{15}{16}m^2 + \frac{249}{16}m^3\right)e'^2 \end{array}\right\}\gamma^2 \cos \underset{(30)}{2\xi}$$

$$+\left(\frac{9}{4}m^2 + \frac{9}{2}m^3 + \frac{267}{64}m^4\right)\gamma^2 e \cos \underset{(31)}{(2\xi - \varphi)}$$

$$-\left(\frac{m^2}{4} + \frac{m^3}{6} + \frac{1195}{576}m^4\right)\gamma^2 e \cos \underset{(32)}{(2\xi + \varphi)}$$

$$-\left(\frac{21}{16}m^2 + \frac{45}{8}m^3\right)\gamma^2 e' \cos \underset{(33)}{(2\xi - \varphi')}$$

$$+\left(\frac{3}{16}m^2 + \frac{15}{4}m^3\right)\gamma^2 e' \cos \underset{(34)}{(2\xi + \varphi')}$$

$$+\frac{15}{32}m\gamma^2 e^2 \cos \underset{(35)}{(2\xi - 2\varphi)}$$

$$-\left(\frac{3}{8}m-\frac{9}{32}m^2-\frac{353}{512}m^3+\frac{7225}{2048}m^4\right)\gamma^2\cos(2\xi-2\eta) \quad (57)$$

$$+\frac{3}{4}m^2\,e\,\gamma^2\cos(2\xi-\varphi-2\eta) \quad (59)$$

$$-\left(\frac{5}{16}m^2-\frac{325}{384}m^3\right)e\,\gamma^2\cos(2\xi-\varphi+2\eta) \quad (60)$$

$$+\left(\frac{33}{16}m^2-\frac{687}{128}m^3\right)e\,\gamma^2\cos(2\xi+\varphi-2\eta) \quad (61)$$

$$-\frac{15}{32}m^2\,\gamma^2\,e\cos(4\xi-\varphi) \quad (87)$$

$$+\left(\frac{9}{32}m^3-\frac{15}{256}m^4\right)\gamma^2\cos(4\xi-2\eta). \quad (100)$$

Cette valeur, combinée avec l'expression de $\frac{1}{r^2}$ qu'on trouve nos 27 et 54, a donné la suivante :

$$\frac{1}{r^2}\delta\left[h+\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt\right]=\left(-1-\frac{9}{64}m^2+\frac{213}{64}m^3\right)\gamma^2\,e\cos\varphi \quad (1)$$

$$+\left(-\frac{5}{4}-\frac{173}{256}m^2\right)\gamma^2\,e^2\cos 2\varphi \quad (2)$$

$$+\left(\frac{9}{8}m^2+\frac{33}{32}m^3+\frac{6837}{512}m^4\right)\gamma^2\,e'\cos\varphi' \quad (6)$$

$$+\frac{123}{64}m^2\,\gamma^2\,e'^2\cos 2\varphi' \quad (7)$$

$$-\frac{21}{8}m\,\gamma^2\,ee'\cos(\varphi-\varphi') \quad (8) \quad +\frac{21}{8}m\,\gamma^2\,ee'\cos(\varphi+\varphi') \quad (9)$$

$$-\frac{105}{16}m\,\gamma^2\,e^2\,e'\cos(2\varphi-\varphi') \quad (10)$$

$$-\frac{63}{32}m\,\gamma^2\,ee'^2\cos(\varphi-2\varphi') \quad (11)$$

$$+\left[-\frac{15}{16}m^2-\frac{31}{256}m^4+\left(-\frac{25}{8}+\frac{675}{64}m\right)e^2\right]\gamma^2\cos 2\eta \quad (18)$$

$$-\frac{45}{32}m^2\,e'\,\gamma^2\cos(\varphi'-2\eta) \quad (21)$$

$$+\left\{\begin{array}{l} -\frac{11}{8}m^2-\frac{85}{24}m^3-\frac{35387}{4608}m^4-\frac{404411}{27648}m^5 \\ +\left(-\frac{75}{16}m-\frac{801}{64}m^2-\frac{27265}{512}m^3\right)e^2 \\ +\left(\frac{55}{16}m^2+\frac{1703}{48}m^3\right)e'^2 \end{array}\right\}\gamma^2\cos \underset{(30)}{2\xi}$$

$$+\left(\begin{array}{l} -\frac{15}{8}m-\frac{143}{32}m^2-\frac{13847}{768}m^3-\frac{301529}{4608}m^4 \\ -\frac{15}{32}me^2+\frac{75}{16}me'^2 \end{array}\right)\gamma^2 e\cos(2\xi\underset{(31)}{-}\varphi)$$

$$+\left(-\frac{51}{16}m^2-\frac{405}{48}m^3-\frac{22031}{1024}m^4-\frac{585}{64}me^2\right)\gamma^2 e\cos(2\xi\underset{(32)}{+}\varphi)$$

$$+\left(-\frac{77}{16}m^2-\frac{101}{4}m^3-\frac{175}{16}me^2\right)\gamma^2 e'\cos(2\xi\underset{(33)}{-}\varphi')$$

$$+\left(\frac{11}{16}m^2+\frac{181}{24}m^3+\frac{75}{16}me^2\right)\gamma^2 e'\cos(2\xi\underset{(34)}{+}\varphi')$$

$$-\frac{35}{8}m\gamma^2 ee'\cos(2\xi-\underset{(37)}{\varphi}-\varphi')+\frac{15}{8}m\gamma^2 ee'\cos(2\xi-\underset{(38)}{\varphi}+\varphi')$$

$$+\left(-\frac{3}{8}m+\frac{33}{32}m^2\right)e\gamma^2\cos(2\xi-\underset{(59)}{\varphi}-2\eta)$$

$$-\left(\frac{5}{16}m^2-\frac{325}{384}m^3\right)e\gamma^2\cos(2\xi-\underset{(60)}{\varphi}+2\eta)$$

$$+\left(-\frac{3}{8}m+\frac{75}{32}m^2-\frac{2459}{512}m^3\right)e\gamma^2\cos(2\xi+\underset{(61)}{\varphi}-2\eta)$$

$$-\frac{15}{32}me^2\gamma^2\cos(2\xi-2\underset{(67)}{\varphi}-2\eta)-\frac{15}{32}me^2\gamma^2\cos(2\xi+2\underset{(69)}{\varphi}-2\eta)$$

$$+\frac{15}{16}m\frac{a}{a'}\gamma^2\cos\underset{(70)}{\xi}-\frac{15}{16}m\frac{a}{a'}\gamma^2 e'\cos(\xi\underset{(71)}{-}\varphi')-\frac{5}{4}\frac{a}{a'}\gamma^2 e'\cos(\xi\underset{(74)}{+}\varphi')$$

$$-\frac{765}{128}m^3\gamma^2 e\cos(4\xi\underset{(87)}{-}\varphi)$$

$$-\left(\frac{3}{32}m^3+\frac{247}{256}m^4\right)\gamma^2\cos(4\xi\underset{(100)}{-}2\eta)$$

$$-\frac{45}{64}m^3 e\gamma^2\cos(4\xi-\underset{(101)}{\varphi}-2\eta).$$

75. En désignant par $\delta\frac{1}{r}$ l'accroissement de la fonction $\frac{1}{r}$ dû aux forces perturbatrices, on a généralement :

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{r_1^2} + \frac{2}{r_1}\delta\frac{1}{r} + \left(\delta\frac{1}{r}\right)^2.$$

En substituant dans cette formule pour $\frac{1}{r_1}$ sa valeur elliptique, et pour $\delta\frac{1}{r}$, $\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2$ leurs valeurs, nos 72 et 68, on a formé l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
\delta\frac{1}{r^2} = & \left(-\frac{83}{64}m^2 + \frac{1467}{128}m^3\right)\gamma^2 e \cos \underset{(1)}{\varphi} - \frac{607}{128}m^2\gamma^2 e^2 \cos 2\underset{(2)}{\varphi} \\
& + \left(\frac{9}{2}m^2 - \frac{39}{8}m^3 - \frac{7035}{128}m^4\right)\gamma^2 e' \cos \underset{(6)}{\varphi'} + \frac{27}{4}m^2\gamma^2 e'^2 \cos 2\underset{(7)}{\varphi'} \\
& - \frac{63}{8}m\gamma^2 ee' \cos(\varphi \underset{(8)}{-} \varphi') + \frac{63}{8}m\gamma^2 ee' \cos(\varphi \underset{(9)}{+} \varphi') \\
& - \frac{315}{16}m\gamma^2 e^2 e' \cos(2\varphi \underset{(10)}{-} \varphi') - \frac{189}{32}m\gamma^2 ee'^2 \cos(\varphi \underset{(12)}{-} 2\varphi') \\
& + \left[m^2 - \frac{3}{2}m^3 - \frac{403}{96}m^4 - \left(\frac{25}{8} - \frac{675}{64}m\right)e^2\right]\gamma^2 \cos 2\underset{(18)}{\eta} \\
& + \left(-\frac{5}{4} + \frac{135}{32}m\right)e\gamma^2 \cos(\varphi \underset{(19)}{-} 2\eta) + \left(\frac{41}{16}m^2 - \frac{195}{32}e^2\right)e\gamma^2 \cos(\varphi \underset{(20)}{+} 2\eta) \\
& + \left(\frac{3}{2}m^2 - \frac{5}{8}m^3\right)e'\gamma^2 \cos(\varphi' \underset{(21)}{-} 2\eta) + \frac{3}{2}m^2 e'\gamma^2 \cos(\varphi' \underset{(22)}{+} 2\eta) \\
& - \frac{75}{32}m ee'\gamma^2 \cos(\varphi - \underset{(25)}{\varphi'} - 2\eta) + \frac{75}{32}m ee'\gamma^2 \cos(\varphi + \underset{(27)}{\varphi'} - 2\eta) \\
& - \left\{\begin{matrix} m^2 + \frac{29}{12}m^3 + \frac{1957}{576}m^4 + \frac{9815}{6912}m^5 \\ + \left(\frac{75}{16}m + \frac{421}{16}m^2 + \frac{191851}{1536}m^3\right)e^2 \\ - \left(\frac{5}{2}m^2 + \frac{143}{3}m^3\right)e'^2 \end{matrix}\right\}\gamma^2 \cos 2\underset{(30)}{\xi}
\end{aligned}$$

$$-\left(\begin{array}{c}\frac{15}{8}m+\frac{169}{16}m^2+\frac{69487}{1536}m^3+\frac{3551009}{18432}m^4\\ -\frac{255}{128}m\,e^2+\frac{75}{16}m\,e'^2\end{array}\right)\gamma^2\,e\cos(2\xi\underset{(31)}{-}\varphi)$$

$$-\left(\frac{41}{16}m^2+\frac{1147}{192}m^3+\frac{4921}{288}m^4-\frac{525}{64}m\,e^2\right)\gamma^2\,e\cos(2\xi\underset{(32)}{+}\varphi)$$

$$-\left(\frac{7}{2}m^2+\frac{47}{2}m^3-\frac{175}{16}m\,e^2\right)\gamma^2\,e'\cos(2\xi\underset{(33)}{-}\varphi')$$

$$+\left(\frac{m^2}{2}+\frac{131}{12}m^3+\frac{75}{16}m\,e^2\right)\gamma^2\,e'\cos(2\xi\underset{(34)}{+}\varphi')$$

$$-\frac{35}{8}m\gamma^2ee'\cos(2\xi-\underset{(37)}{\varphi}-\varphi')+\frac{15}{8}m\gamma^2ee'\cos(2\xi-\underset{(38)}{\varphi}+\varphi')$$

$$-\left(\frac{3}{2}m^2-\frac{9}{8}m^3\right)\gamma^2\cos(2\xi\underset{(57)}{-}2\eta)+\left(-\frac{21}{16}m-\frac{159}{64}m^2\right)e\gamma^2\cos(2\xi-\underset{(59)}{\varphi}-2\eta)$$

$$-\left(\frac{205}{64}m^2+\frac{205}{192}m^3+2a_{60}\,m^4\right)e\,\gamma^2\cos(2\xi-\underset{(60)}{\varphi}+2\eta)$$

$$+\left(-\frac{33}{32}m+\frac{151}{256}m^2+\frac{357}{64}m^3+2a_{61}\,m^4\right)e\,\gamma^2\cos(2\xi+\underset{(61)}{\varphi}-2\eta)$$

$$-\frac{105}{32}me^2\gamma^2\cos(2\xi-2\underset{(67)}{\varphi}-2\eta)-\frac{375}{64}m\,e^2\gamma^2\cos(2\xi-2\underset{(68)}{\varphi}+2\eta)$$

$$-\frac{165}{64}m\,e^2\,\gamma^2\cos(2\xi+2\underset{(69)}{\varphi}-2\eta)$$

$$+\frac{165}{32}m\,\gamma^2\,\frac{a}{a'}\cos\underset{(70)}{\xi}+\frac{15}{8}m\,\frac{a}{a'}\gamma^2\,e'\cos(\xi\underset{(71)}{-}\varphi')-\frac{15}{8}\frac{a}{a'}\gamma^2\,e'\cos(\xi\underset{(74)}{+}\varphi')$$

$$-\frac{345}{64}m^3\,\gamma^2\,e\cos(4\xi\underset{(87)}{-}\varphi)$$

$$+\left(\frac{3}{4}m^3-\frac{57}{64}m^4\right)\gamma^2\cos(4\xi\underset{(100)}{-}2\eta)+\frac{45}{64}m^3\,e\,\gamma^2\cos(4\xi-\underset{(101)}{\varphi}-2\eta).$$

En vertu des valeurs de h et de $\int\left(\frac{d\mathrm{R}}{dv}\right)dt$, nos 23 et 18, on a

$$h+\int\left(\frac{d\mathrm{R}}{dv}\right)dt=1-\frac{e^2}{2}-\frac{m^2}{3}+\frac{3}{4}m^2\cos\underset{(30)}{2\xi}$$
$$+\frac{21}{8}m^2e'\cos(2\xi\underset{(33)}{-}\varphi')-\frac{3}{8}m^2e'\cos(2\xi\underset{(34)}{+}\varphi').$$

En combinant cette valeur avec la précédente, on a formé l'expression suivante :

$$\left[h+\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt\right]\delta\frac{1}{r^2}=\left(-\frac{83}{64}m^2+\frac{1377}{128}m^3\right)\gamma^2 e\cos\underset{(1)}{\varphi}-\frac{607}{128}m^2\gamma^2e^2\cos\underset{(2)}{2\varphi}$$

$$+\left(\frac{9}{2}m^2-\frac{39}{8}m^3-\frac{7515}{128}m^4\right)\gamma^2\ e'\ \cos\underset{(6)}{\varphi'}$$

$$+\frac{27}{4}\ m^2\ \gamma^2\ e'^2\ \cos\underset{(7)}{2\varphi'}$$

$$-\frac{63}{8}\ m\gamma^2ee'\cos(\underset{(8)}{\varphi-\varphi'})+\frac{63}{8}\ m\gamma^2ee'\cos(\underset{(9)}{\varphi+\varphi'})$$

$$-\frac{315}{16}m\gamma^2e^2e'\cos(\underset{(10)}{2\varphi-\varphi'})-\frac{189}{32}m\gamma^2ee'^2\cos(\underset{(12)}{\varphi-2\varphi'})$$

$$+\left(m^2-\frac{3}{2}m^3-\frac{163}{32}m^4\right)\gamma^2\ \cos\underset{(18)}{2\eta}$$

$$+\left(-\frac{5}{4}+\frac{135}{32}m\right)e\ \gamma^2\ \cos(\underset{(19)}{\varphi-2\eta})$$

$$+\left(\frac{41}{16}m^2-\frac{195}{32}e^2\right)e\ \gamma^2\ \cos(\underset{(20)}{\varphi+2\eta})$$

$$+\left(\frac{3}{2}m^2-\frac{5}{8}m^3\right)e'\ \gamma^2\ \cos(\underset{(21)}{\varphi'-2\eta})$$

$$+\frac{3}{2}\ m^2\ e'\ \gamma^2\ \cos(\underset{(22)}{\varphi'+2\eta})$$

$$-\frac{75}{32}m\ ee'\ \gamma^2\ \cos(\underset{(25)}{\varphi-\varphi'-2\eta})$$

$$+\frac{75}{32}m\ ee'\ \gamma^2\ \cos(\underset{(27)}{\varphi+\varphi'-2\eta})$$

$$-\left\{\begin{array}{l}\left(m^2+\frac{29}{12}m^3+\frac{1765}{576}m^4+\frac{4247}{6912}m^5\right)\\+\left(\frac{75}{16}m+\frac{413}{16}m^2+\frac{187595}{1536}m^3\right)e^2\\-\left(\frac{5}{2}m^2+\frac{143}{3}m^3\right)e'^2\end{array}\right\}\gamma^2\cos\underset{(30)}{2\xi}$$

$$-\left(\begin{array}{l}\frac{15}{8}m+\frac{169}{16}m^2+\frac{68527}{1536}m^3+\frac{3624869}{18432}m^4\\ \quad-\frac{255}{128}m\,e^2+\frac{75}{16}m\,e'^2\end{array}\right)\gamma^2\,e\cos(2\xi\underset{(31)}{-}\varphi)$$

$$-\left(\frac{41}{16}m^2+\frac{1147}{192}m^3+\frac{77041}{4608}m^4-\frac{525}{64}m\,e^2\right)\gamma^2\,e\cos(2\xi\underset{(32)}{+}\varphi)$$

$$+\left(-\frac{7}{2}m^2-\frac{47}{2}m^3-\frac{175}{16}m\,e^2\right)\gamma^2\,e'\cos(2\xi\underset{(33)}{-}\varphi')$$

$$+\left(\frac{m^2}{2}+\frac{131}{12}m^3+\frac{75}{16}m\,e^2\right)\gamma^2\,e'\cos(2\xi\underset{(34)}{+}\varphi')$$

$$-\frac{35}{8}m\,\gamma^2\,ee'\cos(2\xi-\underset{(37)}{\varphi}-\varphi')+\frac{15}{8}m\,\gamma^2\,ee'\cos(2\xi-\underset{(38)}{\varphi}+\varphi')$$

$$-\left(\frac{21}{16}m+\frac{159}{64}m^2\right)e\,\gamma^2\cos(2\xi-\underset{(59)}{\varphi}-2\eta)$$

$$-\left(\frac{235}{64}m^2-\frac{1675}{768}m^3-2a_{60}\,m^3\right)e\,\gamma^2\cos(2\xi-\underset{(60)}{\varphi}+2\eta)$$

$$+\left(-\frac{33}{32}m+\frac{31}{256}m^2+\frac{1519}{768}m^3+2a_{61}\,m^3\right)e\,\gamma^2\cos(2\xi+\underset{(61)}{\varphi}-2\eta)$$

$$-\frac{105}{32}m\,e^2\,\gamma^2\cos(2\xi-\underset{(67)}{2\varphi}-2\eta)-\frac{375}{64}m\,e^2\,\gamma^2\cos(2\xi-\underset{(68)}{2\varphi}+2\eta)$$

$$-\frac{165}{64}m\,e^2\,\gamma^2\cos(2\xi+\underset{(69)}{2\varphi}-2\eta)$$

$$+\frac{165}{32}m\,\frac{a}{a'}\,\gamma^2\underset{(70)}{\cos\xi}+\frac{15}{8}m\,\frac{a}{a'}\,\gamma^2\,e'\cos(\xi\underset{(73)}{-}\varphi')-\frac{15}{8}\frac{a}{a'}\,\gamma^2\,e'\cos(\xi\underset{(74)}{+}\varphi')$$

$$-\frac{195}{32}m^3\,\gamma^2\,e\cos(4\xi\underset{(87)}{-}\varphi)$$

$$+\left(\frac{3}{4}m^2-\frac{93}{64}m^4\right)\gamma^2\cos(4\xi\underset{(100)}{-}2\eta)$$

$$+\frac{45}{64}m^3\,e\,\gamma^2\cos(4\xi-\underset{(101)}{\varphi}-2\eta).$$

76. Cela posé, pour satisfaire à l'équation (a), n° 73, soit

$$\begin{aligned}
\delta v = {} & b_{18}\, \gamma^2 \sin 2\eta \\
& + b_{19}\, e\, \gamma^2 \sin (\varphi - 2\eta) \\
& + b_{20}\, e\, \gamma^2 \sin (\varphi + 2\eta) \\
& + b_{21}\, e'\, \gamma^2 \sin (\varphi' - 2\eta) \\
& + b_{22}\, e'\, \gamma^2 \sin (\varphi' + 2\eta) \\
& + b_{23}\, e^2\, \gamma^2 \sin (2\varphi - 2\eta) \\
& + b_{24}\, e^2\, \gamma^2 \sin (2\varphi + 2\eta) \\
& + b_{25}\, ee'\, \gamma^2 \sin (\varphi - \varphi' - 2\eta) \\
& + b_{26}\, ee'\, \gamma^2 \sin (\varphi - \varphi' + 2\eta) \\
& + b_{27}\, ee'\, \gamma^2 \sin (\varphi + \varphi' - 2\eta) \\
& + b_{28}\, ee'\, \gamma^2 \sin (\varphi + \varphi' + 2\eta) \\
& + b_{29}\, e'^2\, \gamma^2 \sin (2\varphi' - 2\eta) \\
& + b_{57}\, \gamma^2 \sin (2\xi - 2\eta) \\
& + b_{58}\, \gamma^2 \sin (2\xi + 2\eta) \\
& + b_{59}\, e\, \gamma^2 \sin (2\xi - \varphi - 2\eta) \\
& + b_{60}\, e\, \gamma^2 \sin (2\xi - \varphi + 2\eta) \\
& + b_{61}\, e\, \gamma^2 \sin (2\xi + \varphi - 2\eta) \\
& + b_{62}\, e\, \gamma^2 \sin (2\xi + \varphi + 2\eta) \\
& + b_{63}\, e'\, \gamma^2 \sin (2\xi - \varphi' - 2\eta) \\
& + b_{64}\, e'\, \gamma^2 \sin (2\xi - \varphi' + 2\eta) \\
& + b_{65}\, e'\, \gamma^2 \sin (2\xi + \varphi' - 2\eta) \\
& + b_{66}\, e'\, \gamma^2 \sin (2\xi + \varphi' + 2\eta) \\
& + b_{67}\, e^2\, \gamma^2 \sin (2\xi - 2\varphi - 2\eta) \\
& + b_{68}\, e^2\, \gamma^2 \sin (2\xi - 2\varphi + 2\eta) \\
& + b_{69}\, e^2\, \gamma^2 \sin (2\xi + 2\varphi - 2\eta) \\
& + b_{100}\, \gamma^2 \sin (4\xi - 2\eta) \\
& + b_{101}\, e\, \gamma^2 \sin (4\xi - \varphi - 2\eta) \\
& + b e\, \gamma^2 \sin (4\xi + \varphi - 2\eta).
\end{aligned}$$

Si l'on ajoute cette valeur à celle de v, n° 29, qu'on différentie l'expression résultante en observant qu'on a, n°s 5 et 6, $d\xi = (1-m)dt$, $d\varphi = cdt$, $d\varphi' = mdt$, $d\eta = gdt$, et en remplaçant les lettres c et g par leurs valeurs; qu'on substitue ensuite dans l'équation (a), n° 73, à la place de $\frac{dv}{dt}$, $\left[\frac{dv}{dt}\right]s^2$, $\frac{1}{r^2}\,\delta\left[h + \int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt\right]$ et de $\left[h + \int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt\right]\delta\frac{1}{r^2}$, les développemens de ces quantités que nous venons d'effectuer, on trouvera, pour déterminer les termes

dépendans de γ^2 des coefficiens arbitraires b_1, b_2, etc., qui entrent dans l'expression de la longitude, les équations de condition suivantes :

$$b_1\left(1+\frac{3}{2}m^2\gamma^2+\frac{189}{32}m^3\gamma^2\right)=\left(\frac{45}{32}m^2+\frac{69}{4}m^3\right)\gamma^2,$$

$$b_2\left(2-\frac{3}{2}m^2+3m^2\gamma^2\right)=\left(-\frac{5}{8}+\frac{135}{64}m+\frac{2799}{512}m^2\right)\gamma^2,$$

$$mb_6=\left(\frac{27}{8}m^2-\frac{117}{32}m^3-\frac{6785}{512}m^4\right)\gamma^2,$$

$$2mb_7=\frac{81}{16}m^2\gamma^2,\qquad b_8=-\frac{63}{8}m\gamma^2,$$

$$b_9=\frac{63}{8}m\gamma^2,\quad 2b_{10}=-\frac{1641}{64}m\gamma^2,\quad b_{11}=-\frac{189}{32}m\gamma^2,$$

$$b_{12}\left(2+\frac{3}{2}m^2-\frac{9}{16}m^3-\frac{273}{64}m^4\right)=-\frac{1}{2}+m^2-\frac{123}{64}m^3+\frac{709}{256}m^4$$
$$+\left(-\frac{9}{8}+\frac{675}{64}m\right)e^2,$$

$$-b_{19}=-\frac{3}{4}+\frac{135}{32}m,\qquad b_{20}\left(3+\frac{3}{4}m^2\right)=-\frac{3}{2}+\frac{33}{16}m^2+\frac{19}{32}e^2,$$

$$-b_{21}\left(2-m+\frac{3}{2}m^2\right)=-\frac{3}{8}m+\frac{135}{64}m^2+\frac{4403}{256}m^3-\frac{69}{64}me^2-\frac{27}{64}me'^2,$$

$$b_{22}(2+m)=\frac{3}{8}m+\frac{213}{64}m^2,$$

$$4b_{24}=-\frac{13}{4},\qquad -b_{25}=-\frac{45}{32}m,\qquad 3b_{26}=-\frac{81}{16}m,$$

$$-b_{27}=\frac{45}{32}m,\qquad 3b_{28}=\frac{81}{16}m,\quad -2b_{29}=-\frac{9}{32}m,$$

$$b_{30}(2-2m)=\left\{\begin{array}{l}-\frac{3}{8}m-\frac{35}{32}m^2-\frac{2893}{1536}m^3-\frac{29957}{18432}m^4\\+\frac{1158607}{442368}m^5\\+\left(-\frac{63}{16}m-\frac{1509}{64}m^2-\frac{431477}{4096}m^3\right)e^2\\+\left(\frac{15}{16}m+\frac{239}{32}m^2+\frac{195203}{3072}m^3\right)e'^2\end{array}\right\}$$

$$b_{31}\left(1-2m+\frac{3}{4}m^2+\frac{225}{32}m^3-\frac{3}{2}m^2\gamma^2-\frac{189}{32}m^3\gamma^2\right)$$
$$=\left(\begin{matrix}-\frac{3}{2}m-\frac{263}{32}m^2-\frac{30929}{768}m^3+\frac{2217763}{18432}m^4\\ -\frac{81}{128}m\,e^2+\frac{15}{4}m\,e'^2\end{matrix}\right)\gamma^2,$$

$$b_{32}\left(3-2m-\frac{3}{4}m^2-\frac{225}{32}m^3+\frac{3}{2}m^2\gamma^2\right)$$
$$=\left(\begin{matrix}-\frac{9}{8}m-\frac{99}{32}m^2-\frac{2901}{512}m^3-\frac{2527}{1024}m^4\\ -\frac{651}{64}m\,e^2+\frac{45}{16}m\,e'^2\end{matrix}\right)\gamma^2,$$

$$b_{33}\,(2-3m)=\left(\begin{matrix}-\frac{7}{8}m-\frac{167}{32}m^2-\frac{12571}{512}m^3-\frac{147}{16}m\,e^2\\ +\frac{123}{64}m\,e'^2\end{matrix}\right)\gamma^2,$$

$$b_{34}\,(2-m)=\left(\begin{matrix}\frac{3}{8}m+\frac{67}{32}m^2+\frac{22645}{1536}m^3+\frac{129}{32}m\,e^2\\ -\frac{3}{64}m\,e'^2\end{matrix}\right)\gamma^2,$$

$$4b_{36}=-\frac{39}{16}m\gamma^2,\quad b_{37}=-\frac{7}{2}m\gamma^2,\quad b_{38}=\frac{3}{2}m\gamma^2,$$

$$3b_{39}=-\frac{21}{8}m\gamma^2,\quad 3b_{40}=\frac{9}{8}m\gamma^2,\quad 2b_{41}=-\frac{51}{32}m\gamma^2,$$

$$2b_{42}=\frac{9}{32}m\gamma^2,$$

$$(4-2m)\,b_{58}=-\frac{11}{8}m^2-\frac{203}{48}m^3-\frac{195}{16}m\,e^2,$$

$$-b_{59}\,(1+2m)=-\frac{3}{8}m+\frac{49}{16}m^2,$$

$$b_{60}\left(3-2m+\frac{9}{4}m^2\right)=-\frac{45}{16}m-\frac{99}{8}m^2-\frac{32957}{1024}m^3+2a_{60}m^3,$$

$$b_{61}\left(1-2m-\frac{9}{4}m^2\right)=-\frac{33}{32}m+\frac{759}{256}m^2-\frac{1601}{1536}m^3+2a_{61}m^3,$$

$$5b_{62}=-\frac{195}{32}m^2,\quad 4b_{64}=-\frac{27}{16}m^2,\quad 4b_{66}=\frac{11}{16}m^2,$$

$$-2b_{67}=\frac{15}{16}m,\quad 2b_{68}=-\frac{15}{4}m,\quad 2b_{69}=-\frac{45}{16}m,$$

$$b_{70}=\frac{165}{32}m\gamma^2,\quad b_{72}=\frac{15}{8}m\gamma^2,\quad b_{74}=-\frac{15}{8}\gamma^2.$$

$$4\,b_{86} = -\frac{33}{32}\,m^3\,\gamma^2, \quad 3\,b_{87} = -\frac{135}{64}m^2\,\gamma^2 - \frac{2013}{128}m^3\,\gamma^2,$$

$$4\,b_{89} = -\frac{385}{64}\,m^3\,\gamma^2, \quad 4\,b_{90} = \frac{99}{64}m^3\,\gamma^2,$$

$$b_{100}\left(2 - 4m - \frac{3}{2}m^2\right) = -\frac{9}{128}\,m^2 + \frac{291}{256}\,m^3 - \frac{2519}{4096}\,m^4.$$

$$b_{101} = \frac{99}{128}\,m^2, \qquad 3b = -\frac{27}{128}\,m^2.$$

77. En satisfaisant à ces équations par la méthode des coefficiens indéterminés, et en ayant égard aux valeurs de b_1, b_2, etc., trouvées n° 30, on aura

$$b_1 = \left(-\frac{51}{32}\,m^2 + \frac{87}{16}\,m^3\right)\gamma^2,$$

$$b_2 = \left(-\frac{5}{16} + \frac{135}{128}\,m + \frac{639}{1024}\,m^2\right)\gamma^2,$$

$$b_6 = \left(\frac{27}{8}\,m - \frac{117}{32}\,m^2 - \frac{6785}{512}\,m^3\right)\gamma^2,$$

$$b_7 = \frac{81}{32}\,m\,\gamma^2,$$

$$b_8 = -\frac{63}{8}\,m\,\gamma^2,$$

$$b_9 = \frac{63}{8}\,m\,\gamma^2,$$

$$b_{10} = -\frac{1641}{128}\,m\,\gamma^2,$$

$$b_{12} = -\frac{189}{32}\,m\,\gamma^2,$$

$$b_{18} = -\frac{1}{4} + \frac{11}{16}\,m^2 - \frac{33}{32}\,m^3 - \frac{623}{256}\,m^4 - \left(\frac{9}{16} - \frac{675}{128}\,m\right)e^2,$$

$$b_{19} = \frac{3}{4} - \frac{135}{32}\,m,$$

$$b_{20} = -\frac{1}{2} + \frac{13}{16}\,m^2 + \frac{19}{56}\,e^2,$$

$$b_{21} = \frac{3}{16}\,m - \frac{123}{128}\,m^2 - \frac{4721}{512}\,m^3 + \frac{69}{128}\,m\,e^2 + \frac{27}{128}\,m\,e'^2,$$

$$b_{22} = \frac{3}{16}\,m + \frac{201}{128}\,m^2,$$

$$b_{24} = -\frac{13}{16},$$

$$b_{25} = \frac{45}{32}m,$$

$$b_{26} = -\frac{27}{16}m,$$

$$b_{27} = -\frac{45}{32}m,$$

$$b_{28} = \frac{27}{16}m,$$

$$b_{29} = \frac{9}{64}m,$$

$$b_{30} = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{3}{16}m - \frac{47}{64}m^2 - \frac{5149}{3072}m^3 - \frac{91745}{36864}m^4 - \frac{1043273}{884736}m^5 \\ -\left(\frac{63}{32}m + \frac{1761}{128}m^2 + \frac{544181}{8192}m^3\right)e^2 \\ +\left(\frac{15}{32}m + \frac{269}{64}m^2 + \frac{221027}{6144}m^3\right)e'^2 \end{array} \right\} \gamma^2,$$

$$b_{31} = \left(-\frac{3}{2}m - \frac{359}{32}m^2 - \frac{42977}{768}m^3 + \frac{1367059}{18432}m^4 - \frac{81}{128}me^2 + \frac{15}{4}me'^2\right)\gamma^2,$$

$$b_{32} = \left(-\frac{3}{8}m - \frac{41}{32}m^2 - \frac{4357}{1536}m^3 - \frac{45853}{9216}m^4 - \frac{217}{64}me^2 + \frac{15}{16}me'^2\right)\gamma^2,$$

$$b_{33} = \left(-\frac{7}{16}m - \frac{209}{64}m^2 - \frac{17587}{1024}m^3 - \frac{147}{32}me^2 + \frac{123}{128}me'^2\right)\gamma^2,$$

$$b_{34} = \left(\frac{3}{16}m + \frac{73}{64}m^2 + \frac{24397}{3072}m^3 + \frac{129}{64}me^2 - \frac{3}{128}me'^2\right)\gamma^2,$$

$$b_{36} = -\frac{39}{64}m\,\gamma^2,$$

$$b_{37} = -\frac{7}{2}m\,\gamma^2,$$

$$b_{38} = \frac{3}{2}m\,\gamma^2,$$

$$b_{39} = -\frac{7}{8}m\,\gamma^2,$$

$$b_{40} = \frac{3}{8}m\,\gamma^2,$$

$$b_{41} = -\frac{51}{64}m\,\gamma^2,$$

$$b_{42} = \frac{9}{64} m \gamma^2,$$

$$b_{58} = -\frac{11}{32} m^2 - \frac{59}{48} m^3 - \frac{195}{64} m e^2,$$

$$b_{59} = \frac{3}{8} m - \frac{61}{16} m^2,$$

$$b_{60} = -\frac{15}{16} m - \frac{19}{4} m^2,$$

$$b_{61} = -\frac{33}{32} m + \frac{231}{256} m^2,$$

$$b_{62} = -\frac{39}{32} m^2,$$

$$b_{64} = -\frac{77}{64} m^2,$$

$$b_{66} = \frac{11}{64} m^2,$$

$$b_{67} = -\frac{15}{32} m,$$

$$b_{68} = -\frac{15}{8} m,$$

$$b_{69} = -\frac{45}{32} m,$$

$$b_{70} = \frac{165}{32} m \gamma^2,$$

$$b_{72} = \frac{15}{8} m \gamma^2,$$

$$b_{74} = -\frac{15}{8} \gamma^2,$$

$$b_{86} = -\frac{33}{128} m^3 \gamma^2,$$

$$b_{87} = -\frac{45}{64} m^2 \gamma^2 - \frac{671}{128} m^3 \gamma^2,$$

$$b_{88} = -\frac{385}{256} m^3 \gamma^2,$$

$$b_{90} = \frac{99}{256} m^3 \gamma^2,$$

$$b_{100} = -\frac{9}{256} m^2 + \frac{255}{512} m^3 + \frac{5425}{8192} m^4,$$

$$b_{101} = \frac{99}{128} m^2, \qquad b = -\frac{9}{128} m^2.$$

78. Il nous reste à déterminer les trois inégalités de la longitude qui dépendent des argumens $2\xi - 2\eta$, $2\xi - \varphi' - 2\eta$, $2\xi + \varphi' - 2\eta$; comme ces inégalités tombent dans le cas d'exception, n° 9, nous ferons usage, pour faciliter leur calcul, de la formule (B) du n° 2. Cette formule peut s'écrire ainsi :

$$\left.\begin{aligned} &\left[\frac{r^2 dv}{dt}\right]\frac{d.\delta v}{dt} \\ &= \frac{d.(2d.r\delta r - dr\delta r)}{dt^2} - \left\{3\int d'.\delta R + 2\delta.r\frac{dR}{dr} - \frac{\delta r}{r}\left[r\frac{dR}{dr}\right]\right\} \\ &+ \left[\frac{r^2 dv^2}{2dt^2}\right]s^2 - \left[\frac{r^2}{2}\right]\frac{ds^2}{dt^2} \end{aligned}\right\} \text{(B)}.$$

Les quantités entourées de crochets sont supposées indépendantes de l'inclinaison de l'orbe lunaire à l'écliptique; or, en négligeant cette inclinaison, on a, par la formule (13), n° 23,

$$\frac{r^2 dv}{dt} = h + \int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt;$$

$$\frac{r^2 dv^2}{dt^2} = \frac{h^2}{r^2} + \frac{2h}{r^2}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt + \frac{1}{r^2}\left[\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt\right]^2.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation précédente, on trouve

$$\left.\begin{aligned} \frac{d.\delta v}{dt} &= \frac{d.(2d.r\delta r - dr\delta r)}{h\,dt^2} \\ &- \frac{1}{h}\left\{3\int d'.\delta R + 2\delta.r\frac{dR}{dr} - \frac{\delta r}{r}\left[r\frac{dR}{dr}\right] + \frac{d.\delta v}{dt}\left[\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt\right]\right\} \\ &+ \frac{hs^2}{2r^2} - \frac{r^2 ds^2}{2h\,dt^2} + \frac{s^2}{r^2}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt + \frac{s^2}{2hr^2}\left[\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt\right]^2, \end{aligned}\right\} \text{(F)}$$

formule qui coïncide, comme cela devait être, avec la formule (16) du n° 31, lorsqu'on néglige les quatre derniers termes, c'est-à-dire les quantités dépendantes de l'inclinaison de l'orbe lunaire à l'écliptique. Dans l'usage que nous ferons de cette formule, nous suppo-

serons que la caractéristique δ s'applique aux quantités dépendantes de l'inclinaison de l'orbite de la Lune sur l'écliptique, c'est-à-dire aux quantités affectées du coefficient γ^2, et que les quantités entourées de crochets en sont indépendantes.

Considérons d'abord l'inégalité qui dépend de l'angle $2\xi - 2\eta$. Nous avons trouvé, n° 72,

$$\delta\frac{1}{r} = \frac{m^2}{2}\gamma^2 \cos 2\eta + \left(-\frac{3}{4}m^2 + \frac{9}{16}m^3\right)\gamma^2 \cos(2\xi - 2\eta);$$

d'où, au moyen de l'équation $\delta r = -r^2\left(\delta\frac{1}{r}\right)$, on conclut

$$r\delta r = \left(\frac{3}{4}m^2 - \frac{9}{16}m^3\right)\gamma^2 \cos(2\xi - 2\eta), \quad \delta r = -\frac{m^2}{2}\gamma^2 \cos 2\eta.$$

On a d'ailleurs $dr = 2m^2 \sin 2\xi$; au moyen de ces valeurs, en observant qu'on peut supposer ici,

$$2 - 2m - 2g = -\left(2m + \frac{3}{2}m^2\right),$$

on trouve aisément

$$\frac{2d^2.r\delta r}{dt^2} = -\left(6m^4 + \frac{9}{2}m^5\right)\gamma^2 \cos(2\xi - 2\eta),$$

$$\frac{d.(dr\delta r)}{dt^2} = m^5\gamma^2 \cos(2\xi - 2\eta);$$

d'où, en faisant $h = 1$, on conclut

$$\frac{d.(2d.r\delta r - dr\delta r)}{hdt^2} = -\left(6m^4 + \frac{11}{2}m^5\right)\gamma^2 \cos(2\xi - 2\eta). \quad (a)$$

Le développement de la fonction R a donné, n° 65,

$$\delta R = \left(\frac{3}{8}m^2 - \frac{9}{32}m^3 - \frac{761}{512}m^4 - \frac{2983}{2048}m^5\right)\gamma^2 \cos(2\xi - 2\eta).$$

(51)

En doublant cette valeur, on aura celle de la fonction

$r\frac{dR}{dr}$. Le développement de la fonction $\int\left(\frac{dR}{dv}\right) dt$ a donné ensuite, n° 66,

$$\int\left(\frac{dR}{dv}\right) dt = -\left(\frac{3}{8}m - \frac{9}{32}m^2 - \frac{353}{512}m^3 + \frac{6585}{2048}m^4\right)\gamma^2 \cos(2\xi - 2\eta). \quad (57)$$

En vertu de la formule $\int d'R = R + m\int\left(\frac{dR}{dv}\right) dt$, des valeurs précédentes, on conclut

$$\int d'.\delta R = \left\{\begin{array}{l} \left(\frac{3}{8} - \frac{3}{8} = 0\right)m^2 + \left(-\frac{9}{32} + \frac{9}{32} = 0\right)m^3 \\ + \left(-\frac{761}{512} + \frac{353}{512} = -\frac{51}{64}\right)m^4 \\ + \left(-\frac{2983}{2048} - \frac{6585}{2048} = -\frac{299}{64}\right)m^5 \end{array}\right\}\gamma^2 \cos(2\xi - 2\eta).$$

Les termes en m^2 et en m^3 disparaissent de cette expression, ce qui est conforme au théorème général énoncé n° 9.

En différentiant la valeur de δv, n°s 76 et 77, on trouve

$$\frac{d.\delta v}{dt} = \left(-\frac{1}{2} + m^2 - \frac{123}{64}m^3\right)\gamma^2 \cos 2\eta$$
$$+ \left(-\frac{9}{128}m^2 + \frac{291}{256}m^3\right)\gamma^2 \cos(4\xi - 2\eta).$$

On a d'ailleurs, n° 18,

$$\int\left(\frac{dR}{dv}\right) dt = \left(\frac{3}{4}m^2 + \frac{3}{4}m^3 + \frac{m^4}{2} + \frac{m^5}{2}\right)\cos 2\xi;$$

d'où l'on conclut

$$\frac{d.\delta v}{dt}\int\left(\frac{dR}{dv}\right) dt = \left(-\frac{3}{16}m^2 - \frac{3}{16}m^3 + \frac{229}{1024}m^4 - \frac{145}{2048}m^5\right)\gamma^2\cos(2\xi - 2\eta).$$

La fonction $\frac{\delta r}{r}\left[r\frac{dR}{dr}\right]$ ne contient pas de termes de l'espèce de ceux que nous considérons dans l'ordre

d'approximation auquel nous nous arrêtons; en effet, d'après la valeur de $\delta\frac{1}{r}$, n° 72, on trouve

$$r\delta\frac{1}{r}=\left(\frac{m^2}{2}-\frac{3}{4}m^3\right)\gamma^2\cos 2\eta+\left(-\frac{3}{4}m^2+\frac{9}{16}m^3\right)\gamma^2\cos(2\xi-2\eta)$$
$$+\frac{3}{8}m^3\gamma^2\cos(4\xi-2\eta).$$

On a d'ailleurs, n° 16,

$$r\frac{dR}{dr}=\frac{m^2}{2}+\frac{3}{2}m^2\cos 2\xi;$$

d'où l'on conclut

$$r\delta\frac{1}{r}\left[r\frac{dR}{dr}\right]=-\frac{\delta r}{r}\left[r\frac{dR}{dr}\right]$$
$$=\left[\left(-\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=0\right)m^4-\left(\frac{9}{32}-\frac{9}{16}+\frac{9}{32}=0\right)m^5\right]\gamma^2\cos(2\xi-2\eta).$$

En rassemblant les valeurs précédentes, on formera la quantité suivante

$$3\int d'.\delta R+2\delta.r\frac{dR}{dr}-\frac{\delta r}{r}\left[r\frac{dR}{dr}\right]+\frac{d.\delta v}{dt}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt$$
$$=\left(\frac{21}{16}m^2-\frac{21}{16}m^3-\frac{8307}{1024}m^4-\frac{40781}{2048}m^5\right)\gamma^2\cos(2\xi-2\eta);$$

d'où, en supposant, ce qui suffit ici, $\frac{1}{h}=1+\frac{m^2}{3}$, on conclut

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{h}\left\{3\int d'.\delta R+2\delta.r\frac{dR}{dr}-\frac{\delta r}{r}\left[r\frac{dR}{dr}\right]+\frac{d.\delta v}{dt}\left[\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt\right]\right\}\\&=\left(\frac{21}{16}m^2-\frac{21}{16}m^3-\frac{7859}{1024}m^4-\frac{41677}{2048}m^5\right)\gamma^2\cos(2\xi-2\eta).\end{aligned}\right\}\ (b)$$

Nous avons trouvé, n° 73,

$$s^2=-\frac{1}{2}\gamma^2\cos 2\eta$$
$$+\left(\frac{3}{8}m+\frac{25}{32}m^2+\frac{2957}{1536}m^3+\frac{88267}{18432}m^4+\frac{4793761}{442368}m^5\right)\gamma^2\cos(2\xi-2\eta)$$
$$-\left(\frac{9}{128}m^2+\frac{9}{256}m^3\right)\gamma^2\cos(4\xi-2\eta).$$

On a d'ailleurs, nº 27,

$$\frac{1}{r^2} = 1 + \frac{m^2}{3} - \frac{103}{144}m^4 + \left(2m^2 + \frac{19}{3}m^3 + \frac{134}{9}m^4 + \frac{1589}{54}m^5\right)\cos 2\xi;$$

d'où l'on conclut

$$\frac{s^2}{r^2} = \left(\frac{3}{8}m + \frac{9}{32}m^2 + \frac{717}{1536}m^3 + \frac{23163}{18432}m^4 + \frac{1590657}{442368}m^5\right)\gamma^2\cos(2\xi - 2\eta).$$

Par le nº 23 on a $h = 1 - \frac{m^2}{3} + \frac{11}{144}m^4$, et par suite

$$\frac{hs^2}{r^2} = \left(\frac{3}{8}m + \frac{9}{32}m^2 + \frac{175}{512}m^3 + \frac{7145}{6144}m^4 + \frac{1534497}{442368}m^5\right)\gamma^2\cos(2\xi - 2\eta).$$

En différentiant la valeur de s, nºs 38 et 44, et en élevant au carré la valeur résultante, j'ai trouvé

$$\begin{aligned}\frac{ds^2}{dt^2} = &\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}m^2 + \frac{3}{4}m^3\right)\gamma^2\cos 2\eta \\ &+ \left(\frac{3}{8}m + \frac{m^2}{32} + \frac{557}{1536}m^3 + \frac{6931}{18432}m^4 + \frac{665809}{442368}m^5\right)\gamma^2\cos(2\xi - 2\eta) \\ &+ \left(\frac{9}{128}m^2 + \frac{201}{256}m^3\right)\gamma^2\cos(4\xi - 2\eta).\end{aligned}$$

On a d'ailleurs, nº 69,

$$r^2 = 1 - \frac{m^2}{3} + \frac{407}{144}m^4 - \left(2m^2 + \frac{19}{3}m^3 + \frac{122}{9}m^4 + \frac{1361}{54}m^5\right)\cos 2\xi.$$

En combinant ces deux valeurs on trouve

$$\frac{r^2 ds^2}{dt^2} = \left(\frac{3}{8}m - \frac{15}{32}m^2 - \frac{689}{512}m^3 - \frac{70847}{18432}m^4 - \frac{1178117}{147456}m^5\right)\gamma^2\cos(2\xi - 2\eta).$$

La valeur de h, nº 23, donne $\frac{1}{h} = 1 + \frac{m^2}{3} + \frac{5}{144}m^4$,

d'où l'on conclut

$$\frac{r^2 ds^2}{h\,dt^2} = \left(\frac{3}{8}m - \frac{15}{32}m^2 - \frac{625}{512}m^3 - \frac{24575}{6144}m^4 - \frac{1242341}{147456}m^5\right)\gamma^2\cos(2\xi - 2\eta).$$

Nous avons trouvé, n° 23,

$$\frac{1}{r^2}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt=\frac{3}{4}m^4+\left(\frac{3}{4}m^2+\frac{3}{4}m^3+\frac{3}{4}m^4+\frac{3}{4}m^5\right)\cos 2\xi,$$

$$\frac{1}{r^2}\left[\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt\right]^2=\frac{9}{32}m^4;$$

en combinant ces expressions avec la valeur précédente de s^2, on trouve

$$\frac{s^2}{r^2}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt=\left(-\frac{3}{16}m^2-\frac{3}{16}m^3-\frac{219}{1024}m^4+\frac{111}{2048}m^5\right)\gamma^2\cos(2\xi-2\eta),$$

$$\frac{s^2}{r^2}\left[\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt\right]^2=\frac{27}{256}m^4\,\gamma^2\cos(2\xi-2\eta).$$

En rassemblant les dernières valeurs que nous venons de déterminer, on trouve

$$\left.\begin{aligned}&\frac{hs^2}{2r^2}-\frac{r^2ds^2}{2h\,dt^2}+\frac{s^2}{r^2}\left[\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt\right]+\frac{s^2}{2hr^2}\left[\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt\right]^2\\&\quad=\left(\frac{3}{16}m^2+\frac{19}{12}m^3+\frac{7273}{3072}m^4+\frac{55793}{9216}m^5\right)\gamma^2\cos(2\xi-2\eta).\end{aligned}\right\}\;(c)$$

Si dans l'équation (F) on substitue les valeurs (a), (b), (c) à la place des quantités qui les représentent, on trouvera enfin

$$\frac{d.\delta v}{dt}=\left(-\frac{9}{8}m^2+\frac{61}{32}m^3+\frac{6209}{1536}m^4+\frac{385303}{18432}m^5\right)\gamma^2\cos(2\xi-2\eta).$$

Nous avons supposé, n° 76, $\delta v=b_{37}\gamma^2\sin(2\xi-2\eta)$, et par conséquent

$$\frac{d.\delta v}{dt}=(2-2m-2g)\,b_{37}\gamma^2\cos(2\xi-2\eta);$$

en comparant ces deux expressions et en observant que d'après la valeur de g, n° 41, on a

$$\frac{1}{2-2m-2g}=-\frac{1}{2m}\left(1-\frac{3}{4}m+\frac{27}{32}m^2+\frac{165}{128}m^3\right),$$

on trouvera enfin

$$b_{,,}=\frac{9}{16}m-\frac{11}{8}m^2-\frac{2555}{3072}m^3-\frac{166169}{18432}m^4.$$

79. Calculons par la même formule (F) les deux inégalités de la longitude qui dépendent des angles $2\xi-\varphi'-2\eta$ et $2\xi+\varphi'-2\eta$.

Il nous suffira, dans l'ordre des termes auquel nous nous arrêtons, de supposer ici

$$\frac{d.\delta v}{dt}=2\delta.r\frac{dR}{dr}+\frac{hs^2}{2r^2}-\frac{r^2ds^2}{2hdt^2}. \qquad (f)$$

Le développement de la fonction R a donné, n° 65,

$$\left.\begin{aligned}\delta R=&\left(\frac{21}{16}m^2-\frac{15}{64}m^3\right)e'\gamma^2\sin(2\xi\underset{(65)}{-\varphi'}-2\eta)\\ &-\left(\frac{3}{16}m^2+\frac{63}{64}m^3\right)e'\gamma^2\sin(2\xi\underset{(65)}{+\varphi'}-2\eta).\end{aligned}\right\}\qquad (a)$$

En doublant cette valeur, on aura celle de la fonction $\delta.r\frac{dR}{dr}$.

Nous avons trouvé, n° 73,

$$\begin{aligned}s^2=&-\frac{1}{2}\gamma^2\cos 2\eta-\frac{3}{8}me'\gamma^2\cos(\varphi'-2\eta)+\frac{3}{8}me'\gamma^2\cos(\varphi'+2\eta)\\ &+\frac{3}{8}m\gamma^2\cos(2\xi-2\eta)\\ &+\left(\frac{7}{8}m+\frac{123}{32}m^2+\frac{6661}{512}m^3\right)e'\gamma^2\cos(2\xi-\varphi'-2\eta)\\ &-\left(\frac{3}{8}m+\frac{53}{32}m^2+\frac{3635}{1536}m^3\right)e'\gamma^2\cos(2\xi+\varphi'-2\eta).\end{aligned}$$

On a d'ailleurs, n° 27, en supposant $h=1-\frac{m^2}{3}$,

$$\begin{aligned}\frac{h}{r^2}=&1-3m^2e'\cos\varphi'+2m^2\cos 2\xi+\left(7m^2+\frac{157}{4}m^3\right)e'\cos(2\xi-\varphi')\\ &-\left(m^2+\frac{91}{12}m^3\right)e'\cos(2\xi+\varphi').\end{aligned}$$

En combinant ces deux expressions, on trouve

$$\frac{hs^2}{2r^2} = \left(\frac{7}{16}m + \frac{67}{64}m^2 + \frac{1541}{1024}m^3\right) e' \gamma^2 \cos(2\xi - \varphi' - 2\eta)$$
$$- \left(\frac{3}{16}m + \frac{45}{64}m^2 + \frac{721}{1024}m^3\right) e' \gamma^2 \cos(2\xi + \varphi' - 2\eta).$$

En différentiant la valeur de s, n° 38, et en élevant au carré la valeur résultante, j'ai trouvé

$$\frac{ds^2}{dt^2} = \frac{1}{2}\gamma^2 \cos 2\eta + \frac{3}{8} m e' \gamma^2 \cos(\varphi' - 2\eta) - \frac{3}{8} m e' \gamma^2 \cos(\varphi' + 2\eta)$$
$$+ \frac{3}{8} m \gamma^2 \cos(2\xi - 2\eta)$$
$$+ \left(\frac{7}{8}m + \frac{39}{32}m^2 + \frac{613}{512}m^3\right) e' \gamma^2 \cos(2\xi - \varphi' - 2\eta)$$
$$- \left(\frac{3}{8}m + \frac{41}{32}m^2 + \frac{1523}{1536}m^3\right) e' \gamma^2 \cos(2\xi + \varphi' - 2\eta).$$

D'ailleurs, en supposant $\frac{1}{h} = 1 + \frac{m^2}{3}$, on a

$$\frac{r^2}{h} = 1 + 3m^2 e' \cos\varphi' - 2m^2 \cos 2\xi - \left(7m^2 + \frac{157}{4}m^3\right) e' \cos(2\xi - \varphi')$$
$$+ \left(m^2 + \frac{91}{12}m^3\right) e' \cos(2\xi + \varphi');$$

d'où l'on conclut

$$\frac{r^2 ds^2}{2h dt^2} = \left(\frac{7}{16}m - \frac{17}{64}m^2 - \frac{3931}{1024}m^3\right) e' \gamma^2 \cos(2\xi - \varphi' - 2\eta)$$
$$- \left(\frac{3}{16}m + \frac{33}{64}m^2 - \frac{559}{1024}m^3\right) e' \gamma^2 \cos(2\xi + \varphi' - 2\eta).$$

En retranchant cette valeur de celle de la fonction $\frac{hs^2}{2r^2}$, on trouve

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{hs^2}{2r^2} - \frac{r^2 ds^2}{2h dt^2} \\
&= \left[\begin{aligned}&\left(\frac{7}{16} - \frac{7}{16} = 0\right) m + \left(\frac{67}{64} + \frac{17}{64} = \frac{21}{16}\right) m^2 \\ &+ \left(\frac{1541}{1024} + \frac{3931}{1024} = \frac{171}{32}\right) m^3\end{aligned}\right] e' \gamma^2 \cos(2\xi - \varphi' - 2\eta) \\
&+ \left[\begin{aligned}&\left(-\frac{3}{16} + \frac{3}{16} = 0\right) m + \left(-\frac{45}{64} + \frac{33}{64} = -\frac{3}{16}\right) m^2 \\ &- \left(\frac{721}{1024} + \frac{559}{1024} = \frac{5}{4}\right) m^3\end{aligned}\right] e' \gamma^2 \cos(2\xi + \varphi' - 2\eta).
\end{aligned}\right\} \quad (b)$$

En substituant les valeurs (a), (b) dans la formule (f), on aura enfin

$$\frac{d.\delta v}{dt} = \left[\begin{array}{l} \left(-\frac{21}{4}+\frac{21}{16}=-\frac{63}{16}\right)m^2 \\ +\left(\frac{15}{16}+\frac{171}{32}=\frac{201}{32}\right)m^3 \end{array}\right] e'\gamma^2 \cos(2\xi - \varphi' - 2\eta) \quad (61)$$
$$+\left[\begin{array}{l} \left(\frac{3}{4}-\frac{3}{16}=\frac{9}{16}\right)m^2 \\ +\left(\frac{63}{16}-\frac{5}{4}=\frac{43}{16}\right)m^3 \end{array}\right] e'\gamma^2 \cos(2\xi + \varphi' - 2\eta). \quad (65)$$

On a d'ailleurs, n° 76, en n'ayant égard qu'aux deux inégalités que nous considérons,

$$\frac{d.\delta v}{dt} = (2 - 3m - 2g)\, b_{61}\, e'\gamma^2 \cos(2\xi - \varphi' - 2\eta)$$
$$+ (2 - m - 2g)\, b_{65}\, e'\gamma^2 \cos(2\xi + \varphi' - 2\eta).$$

En comparant ces deux expressions et en observant qu'on a

$$\frac{1}{2-3m-2g} = -\frac{1}{3m}\left(1-\frac{1}{2}m\right), \quad \frac{1}{2-m-2g} = -\frac{1}{m}\left(1-\frac{3}{2}m\right),$$

on trouve

$$b_{61} = \frac{21}{16}m - \frac{11}{4}m^2, \quad b_{65} = -\frac{9}{16}m - \frac{59}{32}m^2.$$

Il est facile de s'assurer que les termes de la formule (F), n° 78, que nous avons omis pour faciliter le calcul des deux inégalités précédentes, se réduisent à zéro. En effet, en développant la fonction $\frac{dR}{dv}$ par la formule du n° 66, on a trouvé

$$\frac{dR}{dv} = -\left(\frac{21}{8}m^2 + \frac{27}{16}m^3\right) e'\gamma^2 \cos(2\xi - \varphi' - 2\eta)$$
$$+\left(\frac{3}{8}m^2 + \frac{27}{16}m^3\right) e'\gamma^2 \cos(2\xi + \varphi' - 2\eta).$$

Nous avons supposé, n° 19,

$$-\int d''R = m\int\left(\frac{dR}{dv} - r'\frac{dR}{dr'}e'\sin\varphi' - 2\frac{dR}{dv'}e'\cos\varphi'\right)dt,$$

et l'on a, n° 65,

$$r'\frac{dR}{dr'} = -3R = -\left(\frac{9}{8}m^2 - \frac{27}{32}m^3\right)\gamma^2\cos(2\xi - 2\eta),$$

$$\frac{dR}{dv'} = -\frac{dR}{dv} = \frac{3}{4}m^2\gamma^2\sin(2\xi - 2\eta).$$

Au moyen de ces valeurs on trouve

$$\begin{aligned}\frac{dR}{dv} - r'\frac{dR}{dr'}e'\sin\varphi' - 2\frac{dR}{dv'}e'\cos\varphi' \\ = -\left(\frac{63}{16}m^2 + \frac{81}{64}m^3\right)e'\gamma^2\sin(2\xi - \varphi' - 2\eta) \\ + \left(\frac{3}{16}m^2 + \frac{81}{64}m^3\right)e'\gamma^2\sin(2\xi + \varphi' - 2\eta).\end{aligned}$$

Si l'on multiplie par mdt cette expression et qu'on l'intègre ensuite, ce qui revient à multiplier les deux termes du second membre de l'équation précédente, le premier par le facteur $-\frac{1}{3m}\left(1 - \frac{m}{2}\right)$, le second par le facteur $-\frac{1}{m}\left(1 - \frac{3}{2}m\right)$, on aura

$$\begin{aligned}\int d''R = \left(\frac{21}{16}m^2 - \frac{15}{64}m^3\right)e'\gamma^2\cos(2\xi - \varphi' - 2\eta) \\ - \left(\frac{3}{16}m^2 + \frac{63}{64}m^3\right)e'\gamma^2\cos(2\xi + \varphi' - 2\eta).\end{aligned}$$

On a d'ailleurs, n° 14, $\int d'R = R - \int d''R$; en substituant pour R et $\int d''R$ leurs valeurs, on trouve

$$\begin{aligned}\int d'R = \left[\left(\frac{21}{16} - \frac{21}{16} = 0\right)m^2 + \left(-\frac{15}{64} + \frac{15}{64} = 0\right)m^3\right]e'\gamma^2\cos(2\xi - \varphi' - 2\eta) \\ + \left[\left(-\frac{3}{16} + \frac{3}{16} = 0\right)m^2 + \left(-\frac{63}{64} + \frac{63}{64} = 0\right)m^3\right]e'\gamma^2\cos(2\xi + \varphi' - 2\eta).\end{aligned}$$

Les termes de l'ordre m^2 et m^3 disparaissent donc de

l'expression de $\int d'\mathrm{R}$, ce qui est conforme au théorème général énoncé n° 9.

La valeur de δv, trouvée par les approximations précédentes, donne en différentiant

$$\frac{d.\delta v}{dt} = -\frac{1}{2}\gamma^2 \cos 2\eta - \frac{3}{8} m e' \gamma^2 \cos(\varphi' - 2\eta) + \frac{3}{8} m e' \gamma^2 \cos(\varphi' + 2\eta).$$

On a d'ailleurs, n° 18,

$$\int \left(\frac{d\mathrm{R}}{dv}\right) dt = \frac{3}{4} m^2 \cos 2\xi + \left(\frac{21}{8} m^2 + \frac{99}{16} m^3\right) e' \cos(2\xi - \varphi') - \left(\frac{3}{8} m + \frac{39}{16} m^2\right) e' \cos(2\xi + \varphi');$$

d'où l'on conclut

$$\frac{d.\delta v}{dt}\int \left(\frac{d\mathrm{R}}{dv}\right) dt = -\left(\frac{21}{32} m^2 + \frac{45}{32} m^3\right) e' \gamma^2 \cos(2\xi - \varphi' - 2\eta) + \left(\frac{3}{32} m^2 + \frac{15}{32} m^3\right) e' \gamma^2 \cos(2\xi + \varphi' - 2\eta).$$

Nous avons trouvé plus haut

$$s^2 = -\frac{1}{2}\gamma^2 \cos 2\eta - \frac{3}{8} m e' \gamma^2 \cos(\varphi' - 2\eta) + \frac{3}{8} m e' \gamma^2 \cos(\varphi' + 2\eta).$$

On a d'ailleurs, n° 28,

$$\frac{1}{r^3}\int \left(\frac{d\mathrm{R}}{dv}\right) dt = \frac{3}{4} m^2 \cos 2\xi + \left(\frac{21}{8} m^2 + \frac{99}{16} m^3\right) e' \cos(2\xi - \varphi') - \left(\frac{3}{8} m^2 + \frac{39}{16} m^3\right) e' \cos(2\xi + \varphi');$$

d'où l'on conclut

$$\frac{s^2}{r^3}\int \left(\frac{d\mathrm{R}}{dv}\right) dt = \left(-\frac{21}{32} m^2 - \frac{45}{32} m^3\right) e' \gamma^2 \cos(2\xi - \varphi' - 2\eta) + \left(\frac{3}{32} m^2 + \frac{15}{32} m^3\right) e' \gamma^2 \cos(2\xi + \varphi' - 2\eta),$$

et par suite

$$\frac{d.\delta v}{dt}\int \left(\frac{d\mathrm{R}}{dv}\right) dt - \frac{s^2}{r^3}\int \left(\frac{d\mathrm{R}}{dv}\right) dt$$
$$= \left[\left(-\frac{21}{32} + \frac{21}{32} = 0\right) m^2 + \left(-\frac{45}{32} + \frac{45}{32} = 0\right) m^3\right] e' \gamma^2 \cos(2\xi - \varphi' - 2\eta)$$
$$+ \left[\left(\frac{3}{32} - \frac{3}{32} = 0\right) m^2 + \left(\frac{15}{32} - \frac{15}{32} = 0\right) m^3\right] e' \gamma^2 \cos(2\xi + \varphi' - 2\eta).$$

80. Les inégalités qui acquièrent, par l'intégration, de très-petits diviseurs de l'ordre m^2 dans l'expression du rayon vecteur, deviennent, par cette circonstance, beaucoup plus difficiles à calculer que les inégalités ordinaires, lorsqu'on veut porter également loin la précision; en effet, il faut alors, n° 9, pour obtenir les termes de l'ordre m^p dans l'expression du rayon vecteur, pousser le calcul de toutes les quantités qui entrent dans l'équation différentielle qui le déterminent, jusqu'aux termes de l'ordre $p+2$. Nous avons vu, numéro cité, que l'inégalité dépendante de l'angle $\varphi - 2\eta$ se trouvait comprise dans la catégorie précédente; pour donner un exemple de la marche qu'il convient de suivre dans ce cas, nous allons reprendre ici le calcul de cette inégalité, en poussant jusqu'aux quantités de l'ordre m^3 l'approximation que nous n'avons portée, dans le n° 72, que jusqu'aux quantités de l'ordre m.

Les quantités déterminées par les approximations précédentes suffisent pour calculer les termes de l'ordre m^2, qui entrent dans l'expression du coefficient indéterminé a_{10}; mais, pour obtenir les termes de l'ordre m^3, on est obligé de calculer les termes du même ordre dans les deux inégalités dépendantes des angles $2\xi - \varphi + 2\eta$, $2\xi + \varphi - 2\eta$ et les termes de l'ordre m^5, dans l'inégalité dépendante de l'angle 2η, quantités que nous avions négligées n° 71. Pour ne point répéter deux fois les mêmes opérations, nous commencerons par calculer ces termes auxiliaires, qui nous sont indispensables pour porter le calcul de l'inégalité dépendante de l'angle $\varphi - 2\eta$ au degré de précision que nous voulons obtenir.

Occupons-nous d'abord de l'inégalité dépendante de l'angle 2η. Le développement de la fonction perturbatrice, en n'ayant égard qu'aux termes relatifs à cet argument, a donné

$$\delta R = \left(\frac{3}{8}m^2 - \frac{9}{16}m^3 + \frac{141}{256}m^4 - \frac{1769}{2048}m^5\right)\gamma^2 \cos 2\eta. \quad {}_{(18)}$$

Nous avons trouvé, n° 66,

$$\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt = \left(-\frac{9}{16}m^3 + \frac{201}{256}m^4\right)\gamma^2 \cos 2\eta; \quad {}_{(18)}$$

d'où, en vertu de la formule

$$2\int d'R + r\frac{dR}{dr} = 4R + 2m\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt,$$

on conclut

$$2\int d'R + r\frac{dR}{dr} = \left(\frac{3}{2}m^2 - \frac{9}{4}m^3 + \frac{69}{64}m^4 - \frac{965}{512}m^5\right)\gamma^2 \cos 2\eta. \quad {}_{(18)}$$

Au moyen des valeurs déterminées n° 72, on trouve

$$\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2 = \left(-\frac{7}{12}m^4 - \frac{33}{16}m^5\right)\gamma^2 \cos 2\eta;$$

d'où l'on conclut

$$P_{11} = \frac{3}{2}\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2 = -\left(\frac{7}{8}m^4 + \frac{99}{32}m^5\right)\gamma^2 \cos 2\eta.$$

Si, dans l'équation de condition, n° 64,

$$a_{11}(4g^2 - 1) = 4g^2 P_{11} + 2\int d'R_{11} + r\frac{dR_{11}}{dr},$$

on substitue les valeurs précédentes et qu'on remplace g^2 par sa valeur, n° 41, on trouvera

$$\left(3 + 6m^2 - \frac{9}{4}m^3\right)a_{11} = 4\left(-\frac{7}{8}m^4 - \frac{99}{32}m^5\right) + \frac{3}{2}m^2 - \frac{9}{4}m^3 + \frac{69}{64}m^4 - \frac{965}{512}m^5\Big);$$

d'où l'on conclura

$$a_{11} = \frac{m^2}{2} - \frac{3}{4}m^3 - \frac{347}{192}m^4 - \frac{4421}{1536}m^5.$$

Considérons maintenant les deux inégalités dépendantes des angles $2\xi - \varphi + 2\eta$, $2\xi + \varphi - 2\eta$, et déterminons les termes multipliés par m^3 dans l'expression du rayon vecteur et dans celle de la latitude. Cette détermination exige que l'on ait calculé les termes de l'ordre m^2 dans l'inégalité dépendante de l'angle $\varphi - 2\eta$: ce calcul se trouvera développé plus bas; nous l'avons réuni à celui des termes multipliés par m^3, pour éviter les répétitions.

Le développement de la fonction perturbatrice R, en n'ayant égard qu'aux termes que nous considérons ici, a donné d'abord

$$\delta R = -\left(\frac{15}{32}m^2 - \frac{585}{256}m^3\right) e\,\gamma^2 \cos(2\xi - \underset{(60)}{\varphi} + 2\eta)$$

$$+\left(\frac{33}{32}m^2 - \frac{1077}{256}m^3 + \frac{1021}{2048}m^4\right) e\gamma^2 \cos(2\xi + \underset{(61)}{\varphi} - 2\eta).$$

On a trouvé ensuite

$$\frac{dR}{dv} = \left(\frac{15}{16}m^2 - \frac{405}{128}m^3\right) e\gamma^2 \sin(2\xi - \underset{(60)}{\varphi} + 2\eta)$$

$$-\left(\frac{33}{16}m^2 - \frac{1215}{128}m^3\right) e\gamma^2 \sin(2\xi + \underset{(61)}{\varphi} - 2\eta);$$

en multipliant respectivement les deux termes de cette valeur par les facteurs

$$\frac{1}{2 - 2m - c + 2g} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{3}m\right), \qquad \frac{1}{2 - 2m + c - 2g} = 1 + 2m,$$

on en conclura

$$\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt = \left(-\frac{5}{16}m^2 + \frac{325}{384}m^3\right) e\gamma^2 \cos(2\xi - \underset{(60)}{\varphi} + 2\eta)$$

$$+\left(\frac{33}{16}m^2 - \frac{687}{128}m^3\right) e\gamma^2 \cos(2\xi + \underset{(61)}{\varphi} - 2\eta).$$

En substituant ces valeurs dans la formule

$$2\int d'\mathrm{R} + r\frac{d\mathrm{R}}{dr} = 4\mathrm{R} + 2m\int\left(\frac{d\mathrm{R}}{dv}\right)dt,$$

on trouvera

$$2\int d'\mathrm{R} + r\frac{d\mathrm{R}}{dr} = \left(-\frac{15}{8}m^2 + \frac{545}{64}m^3\right)e\gamma^2\cos(2\xi - \underset{(60)}{\varphi} + 2\eta)$$
$$+\left(\frac{33}{8}m^2 - \frac{813}{64}m^3 - \frac{4475}{512}m^4\right)e\gamma^2\cos(2\xi + \underset{(61)}{\varphi} - 2\eta).$$

Au moyen des valeurs déterminées par les approximations précédentes et de la valeur de a_{19} exacte jusqu'aux quantités de l'ordre m^2 qu'on trouvera plus loin, on a formé les valeurs suivantes

$$\delta\left(\frac{1}{r}\right)^2 = \frac{m^4}{4}\gamma^2\cos(2\xi - 2\eta) + \left(-\frac{5}{8}m^2 + \frac{205}{192}m^3\right)e\gamma^2\cos(2\xi - \varphi + 2\eta)$$
$$+\left(-\frac{5}{8}m^2 - \frac{m^3}{24} + \frac{8651}{2304}m^4\right)e\gamma^2\cos(2\xi + \varphi - 2\eta),$$

$$\left(\delta\frac{1}{r}\right)^3 = -\frac{5}{16}m^4\, e\gamma^2\cos(2\xi + \varphi - 2\eta).$$

On a d'ailleurs, n° 72,

$$\delta\frac{1}{r} = \left(-\frac{3}{4}m^2 + \frac{9}{16}m^3 + \frac{401}{256}m^4\right)\gamma^2\cos(2\xi - 2\eta).$$

En substituant ces diverses quantités dans la formule

$$\mathrm{P} = -r_1^3\,\delta\frac{1}{r} + \frac{3}{2}r_1^4\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2 - 2r_1^5\left(\delta\frac{1}{r}\right)^3,$$

et en remplaçant r_1^3, r_1^4, r_1^5 par leurs valeurs elliptiques, la seule valeur $r_1^3 = 1$ exceptée, on formera l'expression suivante

$$\mathrm{P} = \left(-\frac{15}{16}m^2 + \frac{205}{128}m^3\right)e\gamma^2\cos(2\xi - \underset{(60)}{\varphi} + 2\eta)$$
$$+\left(-\frac{33}{16}m^2 + \frac{25}{32}m^3 + \frac{3017}{384}m^4\right)e\gamma^2\cos(2\xi + \underset{(61)}{\varphi} - 2\eta).$$

Si, dans les équations de condition, n° 63,

$$a_{60}[(2-2m-c+2g)^2-1]=(2-2m-c+2g)^2P_{60}+2\int d'R_{60}+r\frac{dR_{60}}{dr},$$

$$a_{61}[(2-2m+c-2g)^2-1]=(2-2m+c-2g)^2P_{61}+2\int d'R_{61}+r\frac{dR_{61}}{dr},$$

on substitue pour P et $2\int d'R + r\frac{dR}{dr}$ leurs valeurs précédentes, et pour c et g leurs valeurs, n°s 24 et 41, on aura

$$a_{60}(8-12m)=(9-12m)\left(-\frac{15}{16}m^2+\frac{205}{128}m^3\right)-\frac{15}{8}m^2+\frac{545}{64}m^3,$$

$$a_{61}\left(-4m-\frac{m^2}{2}-\frac{63}{16}m^3\right)=\left(1-4m-\frac{m^2}{2}\right)\left(-\frac{33}{16}m^2+\frac{25}{32}m^3+\frac{3017}{384}m^4\right)$$
$$+\frac{33}{8}m^2-\frac{813}{64}m^3-\frac{4475}{512}m^4;$$

ces équations, en les résolvant, donnent

$$a_{60}=-\frac{165}{128}m^2+\frac{2395}{1024}m^3,$$

$$a_{61}=-\frac{33}{64}m+\frac{503}{512}m^2+\frac{6937}{6144}m^3.$$

En substituant ces valeurs dans les équations qui déterminent b_{60} et b_{61}, n° 76, on trouve

$$b_{60}=-\frac{15}{16}m-\frac{19}{4}m^2-\frac{35735}{3072}m^3,$$

$$b_{61}=-\frac{33}{32}m+\frac{231}{256}m^2+\frac{717}{1024}m^3.$$

A l'aide des valeurs précédentes, nous pouvons poursuivre le calcul de l'inégalité dépendante de l'angle $\varphi-2\eta$.

Le développement de la fonction R, en portant la précision jusqu'aux termes de l'ordre m^5, a donné

d'abord

$$\delta R = -\left(\frac{m^2}{2}a_{19} + \frac{9}{8}m^2 - \frac{549}{256}m^3 + \frac{34953}{6144}m^4 + \frac{2611}{8192}m^5\right) e\gamma^2 \cos\underset{(19)}{(\varphi - 2\eta)}.$$

Par le développement de la fonction $\frac{dR}{dv}$, on a trouvé ensuite

$$\frac{dR}{dv} = \left(\frac{909}{128}m^3 - \frac{8451}{1024}m^4\right) e\gamma^2 \sin(\varphi - 2\eta);$$

d'où, en observant que l'on a $\frac{1}{c-2g} = -1$, on a conclu

$$\int\left(\frac{dR}{dv}\right) dt = \left(\frac{909}{128}m^3 - \frac{8451}{1024}m^4\right) e\gamma^2 \cos\underset{(19)}{(\varphi - 2\eta)}.$$

En substituant ces valeurs dans la formule

$$2\int d'R + r\frac{dR}{dr} = 4R + 2m\int\left(\frac{dR}{dv}\right) dt,$$

on trouve

$$2\int d'R_{19} + r\frac{dR_{19}}{dr} = \left(\begin{matrix} -2m^2a_{19} - \frac{9}{2}m^2 + \frac{549}{64}m^3 \\ -\frac{13137}{1536}m^4 - \frac{36415}{2048}m^5 \end{matrix}\right) e\gamma^2 \cos\underset{(19)}{(\varphi - 2\eta)}.$$

Au moyen des valeurs déterminées par les approximations précédentes, on trouve ensuite

$$\delta\frac{1}{r} = \left(\frac{m^2}{2} - \frac{3}{4}m^3 - \frac{347}{192}m^4 - \frac{4421}{1536}m^5\right)\gamma^2 \cos 2\eta,$$

$$\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2 = \left(-\frac{7}{12}m^4 - \frac{33}{16}m^5\right)\gamma^2 \cos 2\eta$$

$$+\left(\frac{m^2}{3}a_{19} - \frac{123}{64}m^3 - \frac{20309}{4608}m^4 - \frac{81331}{6144}m^5\right) e\gamma^2 \cos(\varphi - 2\eta),$$

$$\left(\delta\frac{1}{r}\right)^3 = \left(-\frac{95}{96}m^4 - \frac{551}{256}m^5\right) e\gamma^2 \cos(\varphi - 2\eta).$$

Si l'on substitue ces valeurs dans la formule

$$P_{19} = -r_1^3\,\delta\frac{1}{r} + \frac{3}{2}r_1^4\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2 - 2r_1^5\left(\delta\frac{1}{r}\right)^3,$$

et qu'on fasse respectivement $r_1^3 = -3e\cos\varphi$, $r_1^4 = 1 - 4e\cos\varphi$, $r_1^5 = 1$, on trouvera

$$P_{19} = \left(\frac{m^2}{2}a_{19} + \frac{3}{4}m^2 - \frac{513}{128}m^3 - \frac{17181}{3072}m^4 - \frac{56039}{4096}m^5\right) e\gamma^2 \cos(\varphi - 2\eta). \quad (19)$$

Cela posé, si, dans l'équation de condition, n° 64,

$$a_{19}\left[(c-2g)^2 - 1\right] = (c-2g)^2 P_{19} + 2\int d'R_{19} + r\frac{dR_{19}}{dr},$$

on substitue pour P_{19} et $2\int d'R_{19} + r\frac{dR_{19}}{dr}$ leurs expressions précédentes, et qu'on remplace c et g par leurs valeurs, n°s 24 et 41, on aura

$$\begin{aligned} a_{19}\left(\frac{9}{2}m^2 + \frac{207}{16}m^3 + \frac{3849}{64}m^4 + \frac{275707}{1024}m^5\right) &= \left(1 + \frac{9}{2}m^2 + \frac{207}{16}m^3\right) \\ &\times\left(\frac{m^2}{2}a_{19} + \frac{3}{4}m^2 - \frac{513}{128}m^3 - \frac{17181}{3072}m^4 - \frac{56039}{4096}m^5\right) \\ &-\left(2m^2a_{19} + \frac{9}{2}m^2 - \frac{549}{64}m^3 + \frac{13137}{1536}m^4 + \frac{36415}{2048}m^5\right). \end{aligned}$$

Pour résoudre cette équation, on emploiera le procédé ordinaire des coefficients indéterminés : on supposera donc $a_{19} = -\frac{5}{8} + \frac{135}{64}m + \alpha m^2 + \beta m^3$; en substituant ensuite cette valeur dans les deux membres et comparant les termes affectés des mêmes puissances de m, on aura les valeurs de α et de β. On a trouvé ainsi

$$a_{19} = -\frac{5}{8} + \frac{135}{64}m - \frac{481}{1536}m^2 + \frac{4355}{4096}m^3.$$

Déterminons l'inégalité de la longitude dépendante du même angle $\varphi - 2\eta$; pour cela, reprenons la formule (a), n° 73,

$$\left.\begin{aligned} \frac{d.\delta v}{dt} &= \left[\frac{dv}{dt}\right]s^2 + \frac{1}{r^2}\delta\left[h + \int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt\right] \\ &+ \frac{2}{r}\delta\frac{1}{r}\left[h + \int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt\right]. \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

On a, par le même numéro,

$$s^2 = -\tfrac{1}{2}\gamma^2 \cos 2\eta + \left(1 - \tfrac{3}{2}m^2 - \tfrac{177}{128}m^3\right) e\gamma^2 \cos(\varphi - 2\eta)$$
$$+ \left(\tfrac{3}{8}m + \tfrac{25}{32}m^2\right)\gamma^2 \cos(2\xi - 2\eta) - \tfrac{15}{8}\, m e \gamma^2 \cos(2\xi - \varphi + 2\eta).$$

La valeur de v, n° 30, donne d'ailleurs

$$\frac{dv}{dt} = 1 + \left(2 - \tfrac{975}{64}m^2\right) e \cos\varphi + \left(\tfrac{3}{8}m + \tfrac{25}{32}m^2\right)\gamma^2 \cos(2\xi - 2\eta)$$
$$- \tfrac{15}{8}\, m e \gamma^2 \cos(2\xi - \varphi + 2\eta);$$

d'où il est facile de conclure

$$\left[\frac{dv}{dt}\right] s^2 = \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{51}{64}m^2 + \tfrac{765}{256}m^3\right) e\gamma^2 \cos(\varphi \underset{(19)}{-} 2\eta).$$

On a, nos 74, 80 et 27,

$$h + \int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt = -\tfrac{9}{16}m^2\gamma^2 \cos 2\eta + \tfrac{909}{128}m^2 e\gamma^2 \cos(\varphi - 2\eta)$$
$$+ \left(-\tfrac{3}{8}m + \tfrac{9}{32}m^2\right)\gamma^2 \cos(2\xi - 2\eta),$$

$$\frac{1}{r^2} = 1 + 2e\cos\varphi + \left(\tfrac{15}{4}m + \tfrac{203}{16}m^2\right) e \cos(2\xi - \varphi);$$

d'où l'on conclut

$$\frac{1}{r^2}\,\delta\left[h + \int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt\right] = \left(-\tfrac{45}{64}m^2 + \tfrac{75}{16}m^3\right) e\gamma^2 \cos(\varphi \underset{(19)}{-} 2\eta);$$

enfin, au moyen des valeurs de $\frac{1}{r}$, h et $\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt$, nos 15, 18 et 23, il est facile de former la suivante

$$\frac{h}{r} + \frac{1}{r}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt$$
$$= 1 - \frac{m^2}{6} + e\cos\varphi + \tfrac{7}{4}m^2 \cos 2\xi + \tfrac{15}{8}\, m e \cos(2\xi - \varphi).$$

On a d'ailleurs, nos 72 et 80,

$$\delta\frac{1}{r}=\left(\frac{m^2}{2}-\frac{3}{4}m^3\right)\gamma^2\cos 2\eta$$
$$+\left(-\frac{5}{8}+\frac{135}{64}m-\frac{481}{1536}m^2+\frac{4355}{4096}m^3\right)e\,\gamma^2\cos(\varphi-2\eta)$$
$$-\frac{3}{4}m^2\gamma^2\cos(2\xi-2\eta)-\frac{33}{64}m\,e\,\gamma^2\cos(2\xi+\varphi-2\eta);$$

d'où l'on conclut

$$\frac{2}{r}\delta\frac{1}{r}\left[h+\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt\right]$$
$$=\left(-\frac{5}{4}+\frac{135}{32}m+\frac{21}{256}m^2-\frac{3349}{2048}m^3\right)e\,\gamma^2\cos\underset{(19)}{(\varphi-2\eta)}.$$

En substituant ces diverses valeurs dans l'équation (a), on trouve, toute réduction faite,

$$\frac{d.\delta v}{dt}=\left(-\frac{3}{4}+\frac{135}{32}m-\frac{363}{256}m^2+\frac{12371}{2048}m^3\right)e\,\gamma^2\cos\underset{(19)}{(\varphi-2\eta)}.$$

Nous avons supposé, n° 76, $\delta v=b_{19}\,e\gamma^2\sin(\varphi-2\eta)$, d'où l'on tire, en différentiant,

$$\frac{d.\delta v}{dt}=(c-2g)\,b_{19}\,e\gamma^2\sin(\varphi-2\eta).$$

En comparant ces deux expressions et en observant que, d'après les valeurs de c et g, nos 24 et 41, on a

$$c-2g=-\left(1+\frac{9}{4}m^2+\frac{207}{32}m^3\right),$$

on trouvera

$$-b_{19}\left(1+\frac{9}{4}m^2+\frac{207}{32}m^3\right)=-\frac{3}{4}+\frac{135}{32}m-\frac{363}{256}m^2+\frac{12371}{2048}m^3.$$

Cette équation, en la résolvant, donne enfin

$$b_{19}=\frac{3}{4}-\frac{135}{32}m-\frac{69}{256}m^2-\frac{2867}{2048}m^3.$$

Termes de la latitude dépendans des puissances, des excentricités et de l'inclinaison de l'orbite lunaire à l'écliptique, supérieures à la seconde.

81. Ces termes sont faciles à former, au moyen de ceux que nous avons déterminés n° 72, dans l'expression du rayon vecteur; en effet, on a généralement

$$\frac{1}{r^3}=\frac{1}{r_1^3}+\frac{3}{r_1^2}\,\delta\frac{1}{r}+\frac{3}{r_1}\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2+\left(\delta\frac{1}{r}\right)^3.$$

En substituant dans cette expression, pour $\frac{1}{r_1}$, $\frac{1}{r_1^2}$, $\frac{1}{r_1^3}$, leurs valeurs elliptiques, et pour $\delta\frac{1}{r}$, $\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2$, etc., leurs valeurs résultantes des calculs précédens, on a formé l'expression suivante

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r^3}=\;&\frac{15}{8}e^4+\left(3+\frac{27}{8}e^2-\frac{249}{128}m\gamma^2\right)e\cos\varphi\\
&+\left(-\frac{3}{2}m^2+\frac{27}{4}m^2\gamma^2\right)e'\cos\varphi'\\
&+\left(\frac{3}{2}m^2-\frac{9}{4}m^3-\frac{459}{64}m^4-\frac{7589}{512}m^5-\frac{45}{8}e^2\right)\gamma^2\cos 2\eta\\
&+\left(-\frac{15}{8}+\frac{405}{64}m-\frac{415}{512}m^2\right)e\gamma^2\cos(\varphi-2\eta)+\frac{147}{32}me\gamma^2\cos(\varphi+2\eta)\\
&+\frac{9}{4}m^2e'\gamma^2\cos(\varphi'-2\eta)+\frac{9}{4}m^2e'\gamma^2\cos(\varphi'+2\eta)\\
&+\left[\frac{765}{32}me^4+\frac{6183}{128}m^2e^4-\left(\frac{3}{2}m^2+\frac{29}{8}m^3+\frac{2053}{384}m^4-\frac{15}{8}m^2e'^2\right)\gamma^2\right]\cos 2\xi\\
&-\left(\frac{45}{16}m+\frac{531}{32}m^2\right)\gamma^2e\cos(2\xi-\varphi)\\
&-\frac{147}{32}m^2\gamma^2e\cos(2\xi+\varphi\\
&-\left(\frac{21}{4}m^2+\frac{141}{4}m^3\right)\gamma^2e'\cos(2\xi-\varphi')\\
&+\left(\frac{3}{4}m^2+\frac{131}{8}m^3\right)\gamma^2e'\cos(2\xi+\varphi')\\
&-\frac{105}{16}m\gamma^2ee'\cos(2\xi-\varphi-\varphi')
\end{aligned}$$

$$+\left(-\frac{9}{4}m^2+\frac{27}{16}m^3+\frac{1587}{256}m^4\right)\gamma^2\cos(2\xi-2\eta)$$
$$-\left(\frac{63}{32}m+\frac{621}{128}m^2\right)e\gamma^2\cos(2\xi-\varphi-2\eta)$$
$$-\left(\frac{99}{64}m-\frac{357}{512}m^2\right)e\gamma^2\cos(2\xi+\varphi-2\eta)$$
$$-\frac{495}{128}m^2e\gamma^2\cos(2\xi-\varphi+2\eta)$$
$$-\left(\frac{63}{8}m^2-\frac{45}{32}m^3\right)e'\gamma^2\cos(2\xi-\varphi'-2\eta)$$
$$+\left(\frac{9}{8}m^2+\frac{189}{32}m^3\right)e'\gamma^2\cos(2\xi+\varphi'-2\eta)$$
$$-\frac{99}{32}me^2\gamma^2\cos(2\xi+2\varphi-2\eta)$$
$$-\frac{147}{32}mee'\gamma^2\cos(2\xi-\varphi-\varphi'-2\eta)$$
$$+\left(-\frac{45}{16}m+\frac{495}{64}m\gamma^2\right)\frac{a}{a'}\cos\xi+\frac{135}{32}m\frac{a}{a'}\gamma^2\cos(\xi-2\eta)$$
$$+\frac{9}{8}m^2\gamma^2\cos(4\xi-2\eta).$$

Les premières approximations ont donné d'ailleurs

$$s=\left(1-\frac{m^2}{6}\right)\gamma\sin\eta+\left(\frac{3}{2}+\frac{15}{16}\gamma^2\right)e\gamma\sin(\varphi-\eta)+\frac{1}{2}e\gamma\sin(\varphi+\eta)$$
$$-\left(\frac{3}{8}m-\frac{9}{8}m\gamma^2\right)e'\gamma\sin(\varphi'-\eta)-\left(\frac{3}{8}m-\frac{9}{8}m\gamma^2\right)e'\gamma\sin(\varphi'+\eta)$$
$$+\left[\frac{3}{8}m+\frac{41}{32}m^2+\left(\frac{3}{32}m-\frac{73}{128}m^2\right)\gamma^2\right]\gamma\sin(2\xi-\eta)$$
$$+\left(\frac{3}{16}m^2-\frac{3}{32}m^2\gamma^2\right)\gamma\sin(2\xi+\eta)$$
$$-\frac{27}{128}me\gamma^2\sin(2\xi+\varphi-\eta)$$
$$+\frac{7}{32}me'\gamma^2\sin(2\xi-\varphi'-\eta).$$

En combinant entre elles ces valeurs et en ayant égard à celles de z et de $\frac{1}{r^3}$ données nos 40 et 43, qui servent à les compléter, en observant d'ailleurs qu'on a $\frac{a'^3}{r'^3}=3e'\cos\varphi'$, on en a conclu

$$\frac{s}{r^2}+\frac{m^2 a'^2 s}{r'^3}=\left(-\frac{3}{4}m^2+\frac{27}{32}m^3+\frac{1115}{256}m^4+\frac{26959}{2048}m^5\right)\gamma^3 \sin \underset{(105)}{\eta}$$

$$+\left(-\frac{15}{16}+\frac{405}{128}m+\frac{927}{512}m^2\right) e\,\gamma^3 \cos \underset{(108)}{(\varphi-\eta)}$$

$$-\frac{1287}{512}m^3\, e\,\gamma^3 \sin \underset{(109)}{(\varphi+\eta)}$$

$$-\frac{9}{4}m^2 e'\gamma^3 \sin \underset{(110)}{(\varphi'-\eta)}+\frac{9}{4}m^2 e'\gamma^3 \sin \underset{(111)}{(\varphi'+\eta)}$$

$$+\left\{\begin{matrix}\left(\begin{matrix}-\frac{3}{8}m^2+\frac{85}{32}m^3+\frac{8855}{1536}m^4\\ -\frac{15}{8}m^2 e'^2\end{matrix}\right)\gamma^2\\ -\frac{21}{16}m^2 e^4+\frac{15}{16}m^2 e^2 e'^2-\frac{39}{32}m^2 e'^4\\ -\frac{15}{16}m^2\frac{a^2}{a'^2}\end{matrix}\right\}\gamma \sin \underset{(130)}{(2\xi-\eta)}$$

$$+\left[\begin{matrix}\left(-\frac{3}{4}m^2-\frac{49}{32}m^3-\frac{225}{16}m e^2\right)\gamma^2\\ -\frac{4005}{512}m e^4-\frac{225}{8}m e^2 e'^2\end{matrix}\right]\gamma \sin \underset{(131)}{(2\xi+\eta)}$$

$$+\left(\frac{9}{16}m+\frac{453}{64}m^2\right) e\,\gamma^3 \sin \underset{(132)}{(2\xi-\varphi-\eta)}$$

$$-\left(\frac{225}{128}m+\frac{6963}{1024}m^2\right) e\,\gamma^3 \sin \underset{(133)}{(2\xi-\varphi+\eta)}$$

$$-\left(\frac{81}{128}m-\frac{1365}{1024}m^2\right) e\,\gamma^3 \sin \underset{(134)}{(2\xi+\varphi-\eta)}$$

$$-\frac{45}{16}m^2 e\,\gamma^3 \sin \underset{(135)}{(2\xi+\varphi+\eta)}$$

$$+\left(-\frac{21}{16}m^2+\frac{2193}{128}m^3\right) e'\gamma^3 \sin \underset{(136)}{(2\xi-\varphi'-\eta)}$$

$$-\frac{21}{8}m^2 e'\gamma^3 \sin \underset{(137)}{(2\xi-\varphi'+\eta)}$$

$$+\left(\frac{3}{16}m^2+\frac{211}{128}m^3\right) e'\gamma^3 \sin \underset{(138)}{(2\xi+\varphi'-\eta)}$$

$$+\frac{3}{8}\, m^2\, e'\, \gamma^3 \sin\underset{(189)}{(2\xi + \varphi' + \eta)}$$

$$-\frac{261}{128}\, m\, e^2\, \gamma^3 \sin\underset{(142)}{(2\xi + 2\varphi - \eta)}$$

$$+\frac{21}{16}\, m\, ee'\, \gamma^3 \sin\underset{(144)}{(2\xi - \varphi - \varphi' - \eta)}$$

$$-\frac{105}{32}\, m\, ee'\, \gamma^3 \sin\underset{(145)}{(2\xi - \varphi - \varphi' + \eta)}$$

$$-\frac{225}{128}\, m \frac{a}{a'}\, \gamma^3 \sin\underset{(169)}{(\xi - \eta)}$$

$$+\frac{495}{128}\, m \frac{a}{a'}\, \gamma^3 \sin\underset{(170)}{(\xi - \eta)}$$

$$+\frac{27}{64}\, m^2\, \gamma^3 \sin\underset{(183)}{(4\xi - \eta)}$$

$$+\frac{3}{4}\, m^2\, \gamma^3 \sin\underset{(194)}{3\eta}$$

$$+\left(\frac{15}{16} - \frac{405}{128}m + \frac{1407}{1024}m^2\right) e\, \gamma^3 \sin\underset{(195)}{(\varphi - 3\eta)} + \frac{171}{64}\, m^2\, e\, \gamma^3 \sin\underset{(196)}{(\varphi + 3\eta)}$$

$$+\frac{63}{64}\, m\, e\, \gamma^3 \sin\underset{(197)}{(2\xi - \varphi - 3\eta)} + \frac{27}{64}\, m\, e\, \gamma^3 \sin\underset{(198)}{(2\xi + \varphi - 3\eta)}.$$

82. La fonction précédente est l'expression de la quantité que nous avons représentée par Q, n° 37, et chacun des termes qui la composent introduit, comme nous l'avons vu, un terme dépendant du même argument dans la fonction z; en ajoutant donc à la valeur de s, n° 38, les termes

$$\begin{aligned} s = {} & c_{194}\, \gamma^3 \sin 3\eta \\ & + c_{195}\, \gamma^3 \sin(\xi - 3\eta) \\ & + c_{196}\, \gamma^3 \sin(\varphi + 3\eta) \\ & + c_{197}\, e\, \gamma^3 \sin(2\xi - \varphi - 3\eta) \\ & + c_{198}\, e\, \gamma^3 \sin(2\xi + \varphi - 3\eta), \end{aligned}$$

et en exprimant z par une série semblable, dans la-

quelle on changera les coefficiens indéterminés c_{251}, c_{252}, etc., en q_{251}, q_{252}, etc., la substitution des valeurs de z, $\frac{d^2z}{dt^2}$, et de Q dans l'équation (25), n° 37, donnera les équations suivantes :

$$q_{194}\left(1+\frac{3}{2}m^2-9g^2\right)+Q_{194}=0,$$

$$q_{195}\left[1+\frac{3}{2}m^2-(c-3g)^2\right]+Q_{195}=0,$$

$$q_{196}\left[1+\frac{3}{2}m^2-(c+3g)^2\right]+Q_{196}=0,$$

$$q_{197}\left[1+\frac{3}{2}m^2-(2-2m-c-3g)^2\right]+Q_{197}=0,$$

$$q_{198}\left[1+\frac{3}{2}m^2-(2-2m+c-3g)^2\right]+Q_{198}=0.$$

Cela posé, en comparant la valeur de la fonction $z\left(\frac{1}{r^3}+\frac{m^2a'^3}{r'^3}\right)$ à l'expression supposée à Q, n° 38, on aura les termes de l'ordre des quantités que nous considérons en ce moment, qui entrent dans les expressions des coefficiens Q_{108}, Q_{109}, etc. Ces valeurs, substituées ensuite dans les équations de condition données plus haut et dans celles du n° 39, serviront à déterminer les termes correspondans qui entrent dans l'expression de la fonction z.

83. L'équation (25), n° 39, donnera d'abord

$$q_{105}\left(1+\frac{3}{2}m^2-\frac{9}{16}m^3-g^2\right)-\left(\frac{3}{4}m^2-\frac{27}{32}m^3-\frac{1115}{256}m^4-\frac{26959}{2048}m^5\right)\gamma^2=0.$$

La valeur du coefficient q_{105} étant arbitraire, pour simplifier, nous supposerons que son expression ne renferme aucun terme dépendant de γ^2. Il suffira par conséquent, en bornant l'approximation aux termes

de l'ordre $m^5\gamma^2$, de supposer dans l'équation précédente, comme dans le n° 41,

$$\frac{1}{q_{106}}=1+\frac{m^2}{6}-\frac{57}{128}m^3.$$

Cette équation donnera alors, en la résolvant,

$$g^2=1+\frac{3}{2}m^2-\frac{9}{16}m^3-\left(\frac{3}{4}m^2-\frac{27}{32}m^3-\frac{1083}{256}m^4-\frac{27931}{2048}m^5\right)\gamma^2;$$

en supposant $g^2=1+\mathrm{P}$, on a d'ailleurs

$$g=1+\frac{1}{2}\mathrm{P}-\frac{1}{8}\mathrm{P}^2+\frac{1}{16}\mathrm{P}^3-\text{etc.}$$

Au moyen de cette formule et de la valeur précédente, on trouve

$$g=1+\frac{3}{4}m^2-\frac{9}{32}m^3-\left(\frac{3}{8}m^2-\frac{27}{64}m^3-\frac{1227}{512}m^4-\frac{26203}{4096}m^5\right)\gamma^2.$$

84. En substituant ensuite pour g, Q_{108}, Q_{109}, etc., leurs valeurs ainsi déterminées, et pour c sa valeur, n° 70, dans les équations de condition du n° 39 et dans celles qui ont été données plus haut, on formera les équations suivantes :

$$q_{108}\left(1+\frac{3}{2}m^2\right)-\left(\frac{15}{16}-\frac{405}{128}m-\frac{927}{512}m^2\right)\gamma^2=0,$$

$$-3q_{109}-\frac{1287}{512}m^2\gamma^2=0,$$

$$2mq_{110}-\frac{9}{4}m^2\gamma^2=0,$$

$$-2mq_{111}+\frac{9}{4}m^2\gamma^2=0,$$

$$q_{112}\left(4m-m^2-\frac{57}{16}m^3-\frac{3}{4}m^2\gamma^2+\frac{75}{32}m^3\gamma^2\right)$$
$$+\left(-\frac{3}{8}m^2+\frac{85}{32}m^3+\frac{8855}{1536}m^4-\frac{15}{8}m^2e'^2\right)\gamma^2$$
$$-\frac{21}{16}m^2e^4+\frac{15}{16}m^2e^2e'^2-\frac{39}{32}m^2e'^4-\frac{15}{16}m^2\frac{a^2}{a'^2}=0,$$

$$q_{131}(-8+12m)-\left(\frac{3}{4}m^2+\frac{49}{32}m^2+\frac{225}{16}m\,e^2\right)\gamma^2$$

$$-\frac{4005}{512}m\,e^4-\frac{225}{8}m\,e^2\,e'^2=0,$$

$$q_{132}+\left(\frac{9}{16}m+\frac{453}{64}m^2\right)\gamma^2=0,$$

$$-q_{133}(3-8m)-\left(\frac{225}{128}m+\frac{6963}{1024}m^2\right)\gamma^2=0,$$

$$-q_{134}(3-8m)-\left(\frac{81}{128}m-\frac{1365}{1024}m^2\right)\gamma^2=0,$$

$$-15q_{135}-\frac{45}{16}m^2\,\gamma^2=0,$$

$$q_{136}\left(6m-6m^2-\frac{3}{4}m^2\,\gamma^2\right)-\left(\frac{21}{16}m^2-\frac{2193}{128}m^2\right)\gamma^2=0,$$

$$-8q_{137}-\frac{21}{8}m^2\,\gamma^2=0,$$

$$q_{138}\left(2m+2m^2-\frac{3}{4}m^2\,\gamma^2\right)+\left(\frac{3}{16}m^2+\frac{211}{128}m^2\right)\gamma^2=0,$$

$$-8q_{139}+\frac{3}{8}m^2\,\gamma^2=0,$$

$$-8q_{142}-\frac{261}{128}m\,\gamma^2=0,$$

$$q_{144}+\frac{21}{16}m\,\gamma^2=0,$$

$$-3q_{145}-\frac{105}{32}m\,\gamma^2=0,$$

$$q_{169}-\frac{225}{128}m\,\gamma^2=0,$$

$$-3q_{170}+\frac{495}{128}m\,\gamma^2=0,$$

$$-8q_{183}+\frac{27}{64}m^3\gamma^2=0,$$

$$-8q_{184}+\frac{3}{4}m^2=0,$$

$$q_{185}\left(3+\frac{21}{2}m^2\right)+\frac{15}{16}-\frac{405}{128}m+\frac{1407}{1024}m^2=0,$$

$$-15q_{196}+\frac{171}{64}m^2=0,$$

$$-\ 3q_{197}+\frac{63}{64}\ m=0,$$

$$q_{198}+\frac{27}{64}\ m=0.$$

85. En résolvant ces équations par la méthode des coefficiens indéterminés, et en ayant égard aux valeurs de q_{130}, q_{136}, etc., trouvées n° 43, on aura

$$q_{108}=\left(\frac{15}{16}-\frac{405}{128}m-\frac{1647}{512}m^2\right)\gamma^2,$$

$$q_{109}=-\frac{429}{512}m^2\ \gamma^2,$$

$$q_{110}=\frac{9}{8}m\ \gamma^2,$$

$$q_{111}=\frac{9}{8}m\ \gamma^2,$$

$$q_{130}=\left(\frac{3}{32}m-\frac{73}{128}m^2-\frac{2273}{1536}m^3+\frac{15}{32}m\ e'^2\right)\gamma^2$$
$$+\frac{21}{64}m\ e^4-\frac{15}{64}m\ e^2\,e'^2+\frac{39}{128}m\ e'^4+\frac{15}{64}m\,\frac{a^2}{a'^2},$$

$$q_{131}=-\left(\frac{3}{32}m^2+\frac{85}{256}m^3+\frac{27}{32}m\ e^2\right)\gamma^2-\frac{4005}{4096}m\,e^4-\frac{225}{64}m\ e^2\ e'^2,$$

$$q_{132}=-\left(\frac{9}{16}\ m+\frac{453}{64}\ m^2\right)\gamma^2,$$

$$q_{133}=-\left(\frac{75}{128}m+\frac{3921}{1024}m^2\right)\gamma^2,$$

$$q_{134}=-\left(\frac{27}{128}m+\frac{121}{1024}m^2\right)\gamma^2,$$

$$q_{135}=-\frac{3}{16}m^2\ \gamma^2,$$

$$q_{136}=\left(\frac{7}{32}m-\frac{647}{256}m^2\right)\gamma^2,$$

$$q_{137}=-\frac{21}{64}m^2\ \gamma^2,$$

$$q_{138} = -\left(\frac{3}{32}m + \frac{223}{256}m^2\right)\gamma^2,$$

$$q_{139} = \frac{3}{64}m^2\,\gamma^2,$$

$$q_{142} = -\frac{261}{1024}m\,\gamma^2,$$

$$q_{144} = -\frac{21}{16}m\,\gamma^2,$$

$$q_{145} = -\frac{35}{32}m\,\gamma^2,$$

$$q_{160} = -\frac{225}{128}m\,\gamma^2,$$

$$q_{170} = \frac{165}{128}m\,\gamma^2,$$

$$q_{182} = \frac{27}{512}m^2,$$

$$q_{194} = \frac{3}{32}m^2,$$

$$q_{195} = \frac{5}{16} - \frac{135}{128}m - \frac{651}{1024}m^2,$$

$$q_{196} = \frac{57}{320}m^2,$$

$$q_{197} = \frac{21}{64}m,$$

$$q_{198} = -\frac{27}{64}m.$$

86. Reprenons l'équation, n° 1,

$$\frac{s}{\sqrt{1+s^2}} = \frac{z}{r}. \qquad (g)$$

Supposons généralement la fonction $\frac{s}{\sqrt{1+s^2}}$, qui représente le *sinus* de la latitude, développée dans une

suite de termes périodiques, et soit

$$\frac{s}{\sqrt{1+s^2}} = c_{105}\gamma \sin \eta + c_{108} e\gamma \sin(\varphi - \eta) + c_{109} e\gamma \sin(\varphi + \eta) + \text{etc.};$$

ce qui donne $s = c_{105}\gamma \sin\eta + c_{108} e\gamma \sin(\varphi - \eta) + \text{etc.}$, lorsqu'on néglige les quantités de l'ordre du cube de l'inclinaison de l'orbe lunaire à l'écliptique, comme nous l'avons supposé, n° 38. En substituant dans l'équation (g), à la place de la fonction $\frac{s}{\sqrt{1+s^2}}$, la série qui la représente, à la place de z sa valeur résultante des calculs effectués n°s 43, 61, 85, et pour $\frac{1}{r}$ sa valeur, n°s 26 et 72, la comparaison des termes semblables dans les deux membres, en n'ayant égard qu'aux quantités que nous considérons en ce moment, donnera (*)

$$c_{105} = \left(-\frac{m^2}{4} + \frac{9}{32} m^3\right)\gamma^2,$$

$$c_{108} = \left(\frac{5}{8} - \frac{135}{64} m - \frac{733}{256} m^2\right)\gamma^2,$$

$$c_{109} = -\frac{219}{256} m^2 \gamma^2,$$

$$c_{110} = \frac{9}{8} m \gamma^2,$$

$$c_{111} = \frac{9}{8} m \gamma^2,$$

$$c_{112} = -\frac{5}{16}\gamma^2,$$

$$c_{180} = \left(\frac{3}{32} m - \frac{89}{128} m^2 - \frac{913}{1536} m^3 + \frac{21}{32}^{*} m e^2 + \frac{15}{32} m e'^2\right)\gamma^2 + \frac{315}{256} m e^4 - \frac{135}{64} m e^2 e'^2 + \frac{39}{128} m e'^4 + \frac{15}{64} m \frac{a^2}{a'^2},$$

$$c_{181} = \left(-\frac{11}{32} m^2 - \frac{647}{768} m^3 - \frac{225}{256} m e^2\right)\gamma^2 - \frac{27045}{4096} m e^4 - \frac{675}{64} m e^2 e'^2,$$

(*) Les termes surmontés d'une astérisque sont incomplets; il faudrait, pour avoir leurs valeurs rigoureuses, leur ajouter les termes correspondans de la valeur des z qui n'ont point encore été calculés.

$$c_{132} = \left(-\frac{3}{8}m - \frac{147}{32}m^2\right)\gamma^2,$$

$$c_{133} = \left(-\frac{75}{64}m - \frac{2993}{512}m^2\right)\gamma^2,$$

$$c_{134} = \left(-\frac{27}{64}m + \frac{231}{512}m^2\right)\gamma^2,$$

$$c_{135} = -\frac{7}{8}m^2\,\gamma^2,$$

$$c_{136} = \left(\frac{7}{32}m - \frac{759}{256}m^2\right)\gamma^2,$$

$$c_{137} = -\frac{77}{64}m^2\,\gamma^2,$$

$$c_{138} = \left(-\frac{3}{32}m - \frac{207}{256}m^2\right)\gamma^2,$$

$$c_{139} = \frac{11}{64}m^2\,\gamma^2,$$

$$c_{140} = \frac{315}{512}{}^{*}\,m\,\gamma^2,$$

$$c_{141} = \frac{75}{256}{}^{*}\,m\,\gamma^2,$$

$$c_{142} = -\frac{3}{8}{}^{*}\,m\,\gamma^2,$$

$$c_{144} = -\frac{7}{64}\,m\,\gamma^2,$$

$$c_{145} = -\frac{35}{16}\,m\,\gamma^2,$$

$$c_{160} = \frac{75}{64}\,m\,\gamma^2,$$

$$c_{178} = \frac{165}{64}\,m\,\gamma^2,$$

$$c_{183} = \frac{129}{512}m^2\,\gamma^2,$$

$$c_{184} = \frac{11}{32}m^2,$$

$$c_{185} = \frac{5}{8} - \frac{135}{64}m - \frac{925}{3072}m^2,$$

$$c_{186} = \frac{131}{160}m^2,$$

$$c_{187} = \frac{21}{32}m,$$

$$c_{192} = -\frac{9}{32}m.$$

CHAPITRE IV.

Inégalités séculaires et inégalités à longues périodes du mouvement lunaire.

87. Nous ne nous sommes occupé, jusqu'ici, que des inégalités simplement périodiques résultant de l'action du Soleil dans le mouvement de la Lune autour de la Terre. Les inégalités *à longues périodes*, dont il sera question dans ce chapitre, sont des inégalités périodiques comme celles que nous avons calculées dans les chapitres précédens, elles s'en distinguent seulement en ce qu'elles croissent avec beaucoup plus de lenteur, n° 9; on pourrait donc faire servir à leur détermination les formules générales que nous avons établies dans les n°s 1 et 2; mais il est quelquefois plus simple de faire usage, dans ce cas, des formules de la variation des constantes arbitraires, et ces formules sont d'ailleurs, dans la théorie de la Lune comme dans celle des planètes, les plus commodes que l'on puisse employer pour le calcul des *inégalités séculaires*.

En conservant aux cinq élémens a, e, ε, ω, θ de l'orbite elliptique de la Lune, la signification qu'on leur donne ordinairement dans la théorie des planètes, n° 24, livre II, et en désignant par i l'inclinaison de cette orbite sur l'écliptique fixe, c'est-à-dire en nom-

mant i l'angle dont la tangente est γ, les accroissemens que prendront ces élémens dans l'orbite troublée en vertu de la force perturbatrice R, seront déterminés par les formules suivantes, n° 42, livre II :

$$\left.\begin{aligned}
da &= 2a^2 ndt\left(\frac{dR}{d\varepsilon}\right) && (1),\\
d\varepsilon &= -2a^2 ndt\left(\frac{dR}{da}\right) + \frac{andt\sqrt{1-e^2}}{e}\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)\left(\frac{dR}{de}\right) && (2),\\
de &= -\frac{andt\sqrt{1-e^2}}{e}\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)\left(\frac{dR}{d\varepsilon}\right) - \frac{andt\sqrt{1-e^2}}{e}\left(\frac{dR}{d\varpi}\right) && (3),\\
d\varpi &= \frac{andt\sqrt{1-e^2}}{e}\left(\frac{dR}{de}\right) && (4),\\
di &= -\frac{andt}{\sin i\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{dR}{d\theta}\right) && (5),\\
d\theta &= \frac{andt}{\sin i\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{dR}{di}\right) && (6),
\end{aligned}\right\}\ (A)$$

formules dans lesquelles on doit observer que $\left(\frac{dR}{d\varepsilon}\right) = d'R$, la caractéristique d' désignant une différentielle prise uniquement par rapport aux coordonnées de la Lune, n° 1, et que la différence partielle $\left(\frac{dR}{da}\right)$ doit être prise sans faire varier n, qui est fonction de a, n° 43, livre II.

Si l'on désigne de plus par $\zeta = \int ndt$ le moyen mouvement de la Lune, on aura, formule (8), numéro cité,

$$d\zeta = -3andt\int d'R. \qquad (7)$$

88. Les formules précédentes sont indépendantes de la forme de la fonction perturbatrice R; on pourra

donc déterminer, par leur moyen, toutes les inégalités du mouvement lunaire, soit qu'elles proviennent de la *différence d'action du Soleil* sur la Terre et sur son satellite, soit qu'elles résultent de la *non-sphéricité de notre globe,* soit enfin qu'elles soient produites par l'*action des planètes* ou par toute autre cause. Il suffira, dans chaque cas particulier, de substituer à la place de la fonction R l'expression qui lui convient; puis, en développant et intégrant les équations résultantes, on déterminera les variations finies des élémens. On pourrait substituer ensuite dans les formules du mouvement elliptique, à la place des élémens a, ζ, ε, etc., qu'elles renferment, ces mêmes quantités augmentées de leurs variations, et l'on arriverait ainsi à déterminer les expressions du *rayon vecteur,* de la *longitude* et de la *latitude* qui conviennent au mouvement troublé. C'est la méthode que M. Poisson a proposé d'employer à la détermination de toutes les inégalités lunaires, dans son *Mémoire sur la Théorie de la Lune* (*Mémoires de l'Institut,* tome X); mais on conçoit aisément que cette méthode, qui paraît très-simple en théorie, entraînerait dans l'application des difficultés presque insurmontables, tant à cause du grand nombre d'inégalités que présente le mouvement de la Lune, que par l'étendue qu'on est obligé de donner aux approximations. Ce que nous avons dit dans le préambule de ce livre (page 16), dans le n° 88 du livre II, et l'exemple que nous avons donné n° 80 du même livre, de l'application de cette méthode à la théorie des planètes, suffira, sans que nous insistions davantage,

pour mettre cette assertion hors de doute. Cependant les formules de la *variation des constantes arbitraires* ont l'avantage d'isoler pour ainsi dire chaque inégalité, et de montrer clairement comment elle se forme indépendamment des autres; elles peuvent, par cette raison, être utilement employées, dans la théorie de la Lune comme dans celle des planètes, à calculer quelques inégalités particulières qui deviennent sensibles par des causes faciles à prévoir; et c'est à cet usage que nous les ferons servir.

89. Comme les formules (1), (2), etc., sont parfaitement semblables à celles qui déterminent les variations des élémens elliptiques des orbes planétaires, on en conclura, comme dans le n° 46, livre II, que les inégalités qui en résulteront se partageront en *inégalités séculaires* et en *inégalités périodiques;* mais il y a, relativement à ces dernières inégalités, une distinction importante à établir entre les deux théories. Les périhélies et les nœuds des orbes planétaires variant avec une grande lenteur, on peut, pendant un temps considérable, à partir de l'instant que l'on a choisi pour époque, regarder comme constans les angles ω et θ qui déterminent leur position, et l'on range parmi les *inégalités séculaires* toutes les inégalités qui ne renferment pas explicitement le temps t dans leurs argumens. Il n'en est pas de même relativement à la Lune: la position du périgée et des nœuds de son orbite changeant avec beaucoup de rapidité, n° 5, on est obligé de comprendre, parmi les *inégalités périodiques,* non-seulement celles dont les argumens varient à raison du temps introduit par les moyens

mouvemens du Soleil et de la Lune, mais encore celles qui, dépendant simplement des angles ω et θ, renferment implicitement le temps t, en vertu de la variation de ces deux élémens. Ces dernières inégalités forment donc une classe d'inégalités particulières au mouvement lunaire, et on les a nommées *inégalités à longue période*, pour les distinguer des autres *inégalités périodiques*, dont les argumens croissent généralement avec beaucoup plus de rapidité. Leur détermination constitue l'un des points les plus difficiles et en même temps les plus curieux de la *théorie de la Lune*; nous nous en occuperons dans ce chapitre, lorsque nous aurons traité des *inégalités séculaires*; mais nous devons auparavant faire encore quelques observations générales sur les formules (A).

Nous remarquerons d'abord que si dans ces formules on substitue, à la place de la fonction R, sa valeur en série, la partie rigoureusement constante de cette expression disparaîtra par la différentiation de chacune des trois quantités $\left(\frac{dR}{d\varepsilon}\right)$, $\left(\frac{dR}{d\omega}\right)$, $\left(\frac{dR}{d\theta}\right)$, en sorte que les formules (1), (3), (5), (7), ne renfermeront que des termes dépendans de l'un des angles $\int ndt + \varepsilon$, ω et θ, c'est-à-dire des termes périodiques; d'où il suit que dans cette première approximation, les valeurs des trois élémens a, e, i, ainsi que celle de ζ, ne contiendront aucune inégalité du genre de celles qu'on a nommées *séculaires* dans la théorie des planètes. Les variations des trois élémens ε, ω, θ, qui déterminent la *longitude de l'époque* et les *mouvemens du périgée* et des *nœuds*, sont seules assujetties

à des inégalités susceptibles de croître indéfiniment avec le temps. Les termes simplement *proportionnels au temps* que renfermera l'expression de ε, s'ajouteront au moyen mouvement $\int ndt$ dans l'expression $\int ndt + \varepsilon$ de la longitude moyenne, n° 74, livre II; les termes *proportionnels au carré du temps* qui peuvent résulter de la variation des élémens elliptiques de la Lune ou du Soleil, produiront l'*inégalité séculaire* dont le moyen mouvement lunaire est affecté. Les termes non périodiques que renferment les formules (4) et (6) produiront, dans les valeurs de ω et de θ, des termes *proportionnels au temps t*, qu'on introduira sous les signes *sinus* et *cosinus* où ces angles sont renfermés, et qui feront connaître les mouvemens progressifs du périgée et des nœuds de l'orbe de la Lune. Les termes *proportionnels au carré du temps*, et résultant de la même cause qui produit l'équation séculaire dont le moyen mouvement est affecté, donneront les *variations séculaires* auxquelles les mouvemens du périgée et des nœuds sont assujettis.

90. La constante ε étant toujours jointe à l'angle $\int ndt$, qui est partout compris sous le signe *sinus* ou *cosinus* dans l'expression de R, il en résulte que la différence partielle $\left(\frac{dR}{d\varepsilon}\right)$ ne peut renfermer non-seulement aucun terme indépendant du temps t, mais encore aucun terme dont les argumens dépendent seulement des angles ω et θ. La variation du grand axe dans la théorie de la Lune jouit donc de la propriété remarquable de ne renfermer aucune *inégalité séculaire*, ni aucune inégalité du genre de celles que nous

avons nommées *inégalités à longues périodes*, du moins lorsqu'on n'a égard qu'à la première puissance des forces perturbatrices. Nous avons vu, n° 60, livre II, que cette propriété subsiste encore, relativement aux *inégalités séculaires*, dans la théorie des planètes, lorsqu'on porte l'approximation jusqu'aux termes de l'ordre du carré de ces forces; une analyse semblable pourrait servir à démontrer que le grand axe de l'orbe lunaire ne renferme, dans son expression, aucune *inégalité séculaire*, ni aucune *inégalité à longue période*, du moins tant qu'on n'aura égard qu'aux quantités introduites par la *première* et la *seconde* puissance de la force perturbatrice. Mais cette approximation ne suffit pas, à l'égard de la Lune, pour établir rigoureusement l'*invariabilité* de son grand axe relativement aux *inégalités à longues périodes*, parce que ces inégalités, en s'abaissant par l'intégration, peuvent devenir très-sensibles, même parmi les quantités dépendantes du *cube* de la force perturbatrice; de là résulte la nécessité de porter plus loin sur ce point la précision dans la théorie lunaire, qu'on ne le fait ordinairement dans la théorie des perturbations planétaires.

En effet, les inégalités à *longue période* que renferme la fonction $d'R$, acquerront pour diviseur, par la double intégration que cette fonction subit dans l'expression du moyen mouvement, le carré du coefficient qui multiplie le temps t sous le signe *sinus* ou *cosinus*. Or ce coefficient est du même ordre que les variations des deux élémens ω et θ, ou que la force perturbatrice R, c'est-à-dire de l'ordre m^2, en dé-

signant par m le rapport du moyen mouvement du Soleil à celui de la Lune; les *inégalités à longues périodes*, dans l'expression du moyen mouvement, auront par conséquent un diviseur de l'ordre m^4; il faudra donc, pour que leur coefficient soit exact jusqu'aux quantités de l'ordre m, ce qui est indispensable pour la précision des résultats (*), porter l'approximation dans le calcul de la fonction $\left(\frac{dR}{d\epsilon}\right)$ jusqu'aux quantités de l'ordre m^5 inclusivement; quantités qui dépendent de la troisième approximation ou du cube de la force perturbatrice.

Mais nous avons dit, n° 9, que la fonction $\int d'R$ jouit d'une propriété qui dispense de cette pénible recherche, et qui constitue un théorème très-remarquable, que l'on peut énoncer ainsi : « Les inégalités lunaires qui dépendent seulement du moyen mouvement du Soleil, et les inégalités à *longues périodes* dont les argumens sont supposés ne varier qu'en vertu des mouvemens progressifs du périgée et du nœud de l'orbite de la Lune, disparaissent de l'expression de $\int .\left(\frac{dR}{d\epsilon}\right) ndt$ ou de $\int d'R$, en portant même les approximations jusqu'aux quantités de l'ordre m^8, en sorte que cette fonction ne renferme dans cet ordre de quantités que des inégalités périodiques dépendantes du moyen mouvement nt de la Lune. »

Pour le démontrer, nous remarquerons que les inégalités périodiques dépendantes du moyen mou-

(*) *Voir* page 424.

vement nt de la Lune, que renferment les expressions différentielles des élémens de son orbite elliptique, n'augmentent pas par l'intégration, en sorte qu'elles demeurent dans les valeurs finies des élémens du même ordre que dans les formules différentielles (A). Les inégalités, au contraire, qui dépendent seulement du moyen mouvement du Soleil ou des variations des élémens de l'orbe lunaire, sont susceptibles de s'abaisser à l'ordre m ou à l'ordre m^o, en vertu des petits diviseurs m et m^2 que l'intégration leur fait acquérir. Cela admis, supposons que l'on partage en deux parties distinctes les variations de chacun des élémens elliptiques résultant de l'intégration des formules (A); désignons par δa, δe, $\delta \varepsilon$, etc., les parties qui comprennent toutes les inégalités qui renferment dans leur argument le moyen mouvement de la Lune, et qui demeurent, après l'intégration, du même ordre qu'elles étaient auparavant, et représentons par $\delta' a$, $\delta' e$, $\delta' \varepsilon'$, etc., les parties composées des inégalités qui ne dépendent que du moyen mouvement mnt du Soleil, ou des élémens de l'orbite lunaire, ces inégalités étant les seules susceptibles de s'abaisser par l'intégration. La fonction $\left(\frac{dR}{d\varepsilon}\right)$, dans la première approximation, ne renfermant que des termes périodiques dépendans du moyen mouvement nt de la Lune, si l'on fait croître les élémens elliptiques a, ε, e, etc., qu'elle contient, de leurs variations $\delta' a$, $\delta' \varepsilon$, $\delta' e$, etc., comme ces variations ne renferment dans leurs argumens que le moyen mouvement mnt du Soleil et les mouvemens progressifs du périgée et du nœud de

l'orbe lunaire, il est clair qu'il ne résultera de leur introduction dans $\left(\frac{dR}{d\varepsilon}\right)$ aucun terme où le moyen mouvement nt ait pu disparaître; en sorte que cette fonction, après la substitution de leurs valeurs, conservera la même forme qu'elle avait d'abord, c'est-à-dire qu'elle sera encore composée de termes périodiques qui renfermeront tous, dans leurs argumens, le moyen mouvement nt de la Lune, et qu'elle ne pourra contenir aucun terme qui en soit indépendant.

Supposons maintenant que, dans la fonction $\left(\frac{dR}{d\varepsilon}\right)$ ainsi préparée, on fasse croître de nouveau les élémens a, ε, e, etc., de leurs variations δa, $\delta\varepsilon$, δe, etc., qu'on désigne par $\delta.\left(\frac{dR}{d\varepsilon}\right)$ la fonction résultante, cette fonction sera identiquement la même que celle qu'on aurait obtenue en substituant dans la fonction primitive $\left(\frac{dR}{d\varepsilon}\right)$, à la place des élémens elliptiques a, ε, e, etc., leurs valeurs augmentées de leurs variations totales $\delta a + \delta a'$, $\delta\varepsilon + \delta\varepsilon'$, $\delta e + \delta e'$, etc., comme il est nécessaire de le faire pour avoir égard au carré et aux puissances supérieures de la force perturbatrice. Or, les variations δa, $\delta\varepsilon$, δe, etc., étant toutes, comme nous l'avons dit, des quantités de l'ordre m^2, leur substitution dans la fonction $\left(\frac{dR}{d\varepsilon}\right)$, qui est du même ordre, ne produira que des termes de l'ordre m^4 ou d'un ordre supérieur à m^4; on pourra donc, dans le développement de la fonction $\delta.\left(\frac{dR}{d\varepsilon}\right)$,

négliger les carrés et les produits de δa, $\delta\varepsilon$, δe, etc., qui n'engendreraient que des termes de l'ordre m^6, quantités que nous négligerons ; on aura ainsi

$$\delta.\left(\frac{dR}{d\varepsilon}\right)=\frac{d^2R}{d\varepsilon\, d\zeta}\delta\zeta+\frac{d^2R}{d\varepsilon\, da}\delta a+\frac{d^2R}{d\varepsilon^2}\delta\varepsilon+\frac{d^2R}{d\varepsilon\, de}\delta e+\frac{d^2R}{d\varepsilon\, d\omega}\delta\omega+\frac{d^2R}{d\varepsilon\, d\theta}\delta\theta$$
$$+\frac{d^2R}{d\varepsilon\, di}\delta i.$$

Il s'agit de démontrer maintenant que si l'on multiplie par ndt la fonction précédente, et qu'on l'intègre, la fonction résultante $\int\left(\frac{dR}{d\varepsilon}\right)nt$ ne renfermera aucun terme indépendant du moyen mouvement nt de la Lune, alors même qu'on porterait l'approximation jusqu'aux quantités de l'ordre m^3.

Or, si l'on substitue pour δa, $\delta\varepsilon$, δe, etc., leurs valeurs données par l'intégration des formules (A), il est aisé de voir que la fonction $\delta.\left(\frac{dR}{d\varepsilon}\right)-\frac{d^2R}{d\varepsilon d\zeta}\delta\zeta$ qui en résultera, se décomposera en groupes de termes de cette forme

$$\frac{d^2R}{d\varepsilon df}\int F\left(\frac{dR}{dg}\right)dt-\frac{d^2R}{d\varepsilon dg}\int F\left(\frac{dR}{df}\right)dt, \qquad (m)$$

en représentant par f et g deux quelconques des élémens elliptiques a, ε, e, etc., et par F une fonction connue de ces élémens.

Dans la seconde approximation, c'est-à-dire lorsqu'on néglige les quantités de l'ordre du cube et des puissances supérieures de la force perturbatrice, on peut regarder F comme une quantité constante ; la fonction précédente peut prendre alors cette forme

$$F\left[\frac{d^2R}{d\varepsilon df}\int\left(\frac{dR}{dg}\right)dt-\frac{d^2R}{d\varepsilon dg}\int\left(\frac{dR}{df}\right)dt\right],$$

et l'on démontrera aisément, en suivant les raisonnemens du n° 60, liv. II, qu'elle ne saurait renfermer dans l'ordre m^4 que des termes périodiques dépendans du moyen mouvement nt de la Lune.

En effet, m désignant, comme précédemment, le rapport $\frac{n'}{n}$ des moyens mouvemens du Soleil et de la Lune, soit

$$M\cos(int + jmnt + lt + \varepsilon)$$

un terme quelconque de la valeur de $\frac{dR}{df}$, et

$$N\cos(int + j'mnt + l't + \varepsilon')$$

un terme de la valeur de $\frac{dR}{dg}$, qui dépend du même angle int; M et N étant des coefficiens constans; i, j et j' des nombres entiers quelconques; lt et $l't$ des quantités variables dépendant des mouvemens progressifs du périgée et des nœuds de l'orbe lunaire; ε et ε' des fonctions des élémens elliptiques des orbites du Soleil et de la Lune, et que nous regarderons ici comme des quantités constantes.

Il faudra combiner entre eux les deux termes précédens, pour avoir dans la fonction $\frac{d^2R}{d\epsilon df}\int\left(\frac{dR}{dg}\right)dt - \frac{d^2R}{d\epsilon dg}\int\left(\frac{dR}{df}\right)dt$ un terme indépendant du moyen mouvement nt de la Lune; en observant que l'angle nt est toujours accompagné de la constante ϵ, ce qui donne $\frac{d^2R}{d\epsilon df} = \frac{d^2R}{ndtdf}$, $\frac{d^2R}{d\epsilon dg} = \frac{d^2R}{ndtdg}$, on trouvera ainsi

$$-iM\sin(int + jmnt + lt + \varepsilon)\int N\cos(int + j'mnt + l't + \varepsilon')$$
$$+iN\sin(int + j'mnt + l't + \varepsilon')\int M\cos(int + jmnt + lt + \varepsilon),$$

ce qui, en effectuant les intégrations et rejetant le terme dépendant de l'angle $2int$, donne

$$\frac{1}{2}\left[\frac{i}{in+jmn+l}-\frac{i}{in+j'mn+l'}\right]\text{MN}\cos[(j'-j)mnt+(l'-l)t+6'-6],$$

ou bien, en réduisant,

$$\frac{i}{2}\left[\frac{(j'-j)mn+l'-l}{(in+jmn+l)(in+j'mn+l')}\right]\text{MN}\cos[(j'-j)mnt+(l'-l)t+6'-6].$$

Si l'on suppose j' différent de j, on voit que cette quantité introduira dans l'expression de $\delta.\left(\frac{d\text{R}}{d\epsilon}\right)$ $-\frac{d^2\text{R}}{d\epsilon d\zeta}\delta\zeta$ une inégalité dépendante seulement du moyen mouvement mnt du Soleil; mais comme elle se trouve multipliée par le facteur m, et qu'elle n'acquiert par l'intégration qu'un diviseur du même ordre, elle sera encore dans l'expression finie $\int\left[\left(\frac{d\text{R}}{d\epsilon}\right)-\frac{d^2\text{R}}{d\epsilon d\zeta}d\zeta\right]dt$ de l'ordre du produit MN ou de l'ordre m^4, chacune des quantités M et N étant supposée de l'ordre m^2; cette inégalité se trouvera donc comprise parmi celles que nous négligeons.

Si l'on suppose $j'=j$, la fonction précédente se réduit à

$$\frac{i(l'-l)\text{MN}}{2(in+jmn+l)(in+jmn+l')}\cos[(l'-l)t+6'-6].$$

Cette quantité introduira donc dans la fonction $\delta.\left(\frac{d\text{R}}{d\epsilon}\right)-\frac{d^2\text{R}}{d\epsilon d\zeta}\delta\zeta$ une inégalité du genre de celles que nous avons nommées *inégalités à longues périodes;* mais comme elle a pour coefficient la très-petite quantité $l'-l$, qui est de l'ordre m^2, cette

inégalité sera de l'ordre m^6, et elle ne s'abaissera dans l'expression finie $\int\left[\delta.\left(\frac{dR}{d\epsilon}\right)-\frac{d^2R}{d\epsilon d\zeta}\delta\zeta\right]dt$ qu'à l'ordre m^4, en vertu du très-petit diviseur $l'-l$ ou m^2 que l'intégration lui fait acquérir : cette inégalité sera donc encore de l'ordre des quantités que nous négligeons.

Si l'on suppose à la fois $j'=j$ et $l'=l$, le coefficient de l'inégalité précédente se réduit à *zéro*, c'est-à-dire que la fonction $\int\left[\delta.\left(\frac{dR}{d\epsilon}\right)-\frac{d^2R}{d\epsilon d\zeta}\delta\zeta\right]dt$ ne renferme aucun terme proportionnel au temps t, alors même qu'on porte l'approximation jusqu'aux quantités de l'ordre du carré de la force perturbatrice du Soleil ou de l'ordre m^4, ce qui est conforme au théorème général relatif à l'*invariabilité des grands axes planétaires*, n° 60, livre II. On peut donc conclure de là que la fonction $\int\left[\delta.\left(\frac{dR}{d\epsilon}\right)-\frac{d^2R}{d\epsilon d\zeta}\delta\zeta\right]dt$ ne renferme aucune inégalité *indépendante du moyen mouvement nt de la Lune*, lorsque l'on néglige les quantités de l'ordre m^4, et qu'on n'a égard qu'à la seconde puissance des forces perturbatrices.

91. Mais il reste à démontrer que ce résultat subsiste encore lorsqu'on porte l'approximation jusqu'au cube et aux produits de trois dimensions des mêmes forces; en effet, les variations des élémens elliptiques renfermant, dans la première approximation, comme nous l'avons vu, des termes qui s'abaissent par l'intégration à l'ordre m ou m^0; il en résultera, parmi les termes dépendans de la seconde approximation, des inégalités périodiques de

l'ordre m^3 ou m^2 : ces termes, substitués dans la fonction $\delta.\left(\frac{dR}{d\epsilon}\right)$, pourront donc, par leur combinaison avec ceux que renferment les différences partielles qui les multiplient, produire des inégalités à longues périodes ou des inégalités dépendantes seulement du moyen mouvement du Soleil, qui seraient de l'ordre m^5 ou simplement de l'ordre m^4; ces inégalités, en s'abaissant par l'intégration dans l'expression de la fonction $\int\delta.\left(\frac{dR}{d\epsilon}\right)dt$, produiraient donc des inégalités indépendantes du moyen mouvement lunaire, d'un ordre inférieur à m^4, ce qui serait contraire au théorème que nous nous proposons de démontrer.

Lorsqu'on veut avoir égard aux termes du troisième ordre par rapport à la force perturbatrice, on ne peut plus, dans la fonction (m), considérer comme constante la quantité F; cette quantité devient variable, à raison de la variation des élémens qu'elle renferme; il faut d'ailleurs, dans les différences partielles de la fonction R qui multiplient F, tenir compte des termes introduits par le carré de la force perturbatrice.

Cela posé, soit

$$M\cos(int + jmnt + lt)$$

l'un quelconque des termes de la fonction $\frac{dR}{df}$, soit

$$N\cos(i'nt + j'mnt + l't)$$

un terme de la fonction $\frac{dR}{dg}$, et soit

$$P\cos(i''nt + j''mnt + l''t)$$

l'un des termes du développement de la fonction F, lorsqu'à la place des élémens qu'elle renferme, on a substitué ces mêmes élémens augmentés de leurs variations; en n'ayant égard qu'à ces termes, on aura ainsi

$$\frac{dR}{df} = M\cos(int + jmnt + lt), \qquad \frac{dR}{dg} = N\cos(i'nt + j'mnt + l't),$$
$$F = P\cos(i''nt + j''mnt + l''t).$$

Voyons quelles sont les inégalités qui résulteront de la combinaison de ces trois termes dans la fonction (m).

En observant que $\frac{dR}{d\varepsilon} = \frac{dR}{ndt}$, on aura d'abord

$$\frac{d^2R}{d\varepsilon df} = -iM\sin(int + jmnt + lt), \quad \frac{d^2R}{d\varepsilon dg} = -i'N\sin(i'nt + j'mnt + l't).$$

En combinant les valeurs de $\frac{dR}{df}$ et de $\frac{dR}{dg}$ avec l'expression de F, on aura

$$F\left(\frac{dR}{dg}\right) = \frac{NP}{2}\left\{\begin{array}{l} \cos[(i''-i')nt + (j''-j')mnt + (l''-l')t] \\ +\cos[(i''+i')nt + (j''+j')mnt + (l''+l')t] \end{array}\right\},$$
$$F\left(\frac{dR}{df}\right) = \frac{MP}{2}\left\{\begin{array}{l} \cos[(i''-i)nt + (j''-j)mnt + (l''-l)t] \\ +\cos[(i''+i)nt + (j''+j)mnt + (l''+l)t] \end{array}\right\};$$

d'où l'on tire en intégrant

$$\int F\left(\frac{dR}{dg}\right)dt$$
$$= \frac{NP}{2}\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{(i''-i')n + (j''-j')mn + l''-l'}\sin[(i''-i')nt + (j''-j')mnt + (l''-l')t] \\ +\frac{1}{(i''+i')n + (j''+j')mn + l''+l'}\sin[(i''+i')nt + (j''+j')mnt + (l''+l')t] \end{array}\right\},$$

$$\int F\left(\frac{dR}{df}\right)dt$$
$$= \frac{MP}{2}\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{(i''-i)n + (j''-j)mn + l''-l}\sin[(i''-i)nt + (j''-j)mnt + (l''-l)t] \\ +\frac{1}{(i''+i)n + (j''+j)mn + l''+l}\sin[(i''+i)nt + (j''+j)mnt + (l''+l)t] \end{array}\right\}.$$

Si l'on substitue maintenant à la place des quatre quantités $\frac{d^2 R}{dt\, df}$, $\frac{d^2 R}{dt\, dg}$, $\int F\left(\frac{dR}{df}\right)dt$, $\int F\left(\frac{dR}{dg}\right)dt$, les valeurs précédentes dans la fonction (m), on trouvera, après les réductions, que cette quantité renferme les termes suivans :

$$\left\{\frac{i}{(i''+i')n+(j''+j')mn+l''+l'}-\frac{i'}{(i''+i)n+(j''+j)mn+l''+l}\right\}$$
$$\times\frac{MNP}{4}\cos[(i+i'+i'')nt+(j+j'+j'')mnt+(l+l'+l'')t],$$
$$+\left\{\frac{i'}{(i''+i)n+(j''+j)mn+l''+l}-\frac{i}{(i'-i'')n+(j'-j'')mn+l'-l''}\right\}$$
$$\times\frac{MNP}{4}\cos[(i''+i-i')nt+(j''+j-j')mnt+(l''+l-l')t],$$
$$+\left\{\frac{i'}{(i-i'')n+(j-j'')mn+(l-l'')}-\frac{i}{(i'+i'')n+(j'+j'')mn+l'+l''}\right\}$$
$$\times\frac{MNP}{4}\cos[(i-i'-i'')nt+(j-j'-j'')mnt+(l-l'-l'')t],$$
$$+\left\{\frac{i'}{(i''-i)n+(j''-j)mn+l''-l}-\frac{i}{(i''-i')n+(j''-j')mn+l''-l'}\right\}$$
$$\times\frac{MNP}{4}\cos[(i+i'-i'')nt+(j+j'-j'')mnt+(l+l'-l'')t].$$

Ces quatre termes étant de même forme et ne différant que par les signes dont sont affectées les lettres i, i', i'', j, j', j'', ce que nous dirons de l'un d'entre eux pourra s'appliquer identiquement aux trois autres. Considérons le premier de ces termes : pour qu'il en puisse résulter dans la fonction $\delta.\left(\frac{dR}{dt}\right)-\frac{d^2 R}{dt\, d\zeta}\delta\zeta$ une inégalité indépendante du moyen mouvement nt de la Lune, il faut que l'on ait : $i+i'+i''=0$, ce qui donne $i''+i'=-i$, $i''+i=-i'$; ce terme devient ainsi :

$$\left\{\frac{i'}{i'n-(j+j'')mn-l-l''}-\frac{i}{in-(j'+j'')mn-l'-l''}\right\}$$
$$\times\frac{MNP}{4}\cos[(j+j'+j'')mnt+(l+l'+l'')t],$$

ou bien, en réduisant,

$$\left.\begin{array}{l}\left\{\dfrac{[ij - i'j' + (i-i')j'']mn + il - i'l' + (i-i')l''}{[i'n - (j+j'')mn - l - l''][in - (j'+j'')mn - l' - l'']}\right\} \\ \times\dfrac{\text{MNP}}{4}\cos[(j+j'+j'')mnt + (l+l'+l'')t].\end{array}\right\} \quad (n)$$

Les trois coefficiens M, N, P étant de l'ordre m^2 lorsqu'on suppose à i, i' et i'' des valeurs entières différentes de zéro, cette inégalité sera, dans ce cas, de l'ordre m^7; elle ne s'abaissera donc par l'intégration qu'à l'ordre m^6 dans la fonction $\int\left[\delta.\left(\frac{d\text{R}}{d\epsilon}\right) - \frac{d^2\text{R}}{d\epsilon\, d\zeta}\right]dt$ et se trouvera comprise par conséquent parmi les quantités que nous négligeons.

Les deux coefficiens M et N sont nécessairement de l'ordre m^2, puisqu'ils sont introduits par la fonction perturbatrice R dont tous les termes sont de cet ordre; mais la quantité F étant une fonction des élémens de l'orbite elliptique de la Lune, elle peut contenir, à raison des variations de ces élémens déterminées par les formules (A), non-seulement des termes périodiques de l'ordre m^2, mais encore des termes dépendans simplement du moyen mouvement du Soleil ou des mouvemens progressifs du périgée et des nœuds de l'orbe lunaire; termes qui peuvent, comme nous l'avons vu, s'abaisser par l'intégration à l'ordre m ou à l'ordre m^0. Ce sont donc ces termes seuls qui pourront introduire dans la fonction (m) des inégalités de l'ordre de celles que nous considérons, et l'on peut, par conséquent, négliger dans la fonction F les termes périodiques dépendans du moyen mouvement nt de la Lune; or il est évident que cela revient à supposer $i'' = 0$, et par conséquent $i = -i'$; la fonction (n)

devient alors

$$\left\{\frac{i[(j+j'+2j'')mn+l+l'+2l'']}{[in-(j+j'')mn-l-l''][-in+(j'+j'')mn+l'+l'']}\right\}$$
$$\times\frac{\mathrm{MNP}}{4}.\cos[(j+j'+j'')mnt+(l+l'+l'')t].$$

Si j, j', j'' sont des nombres quelconques, le terme précédent introduira dans la fonction $\delta.\left(\frac{d\mathrm{R}}{dt}\right)-\frac{d^2\mathrm{R}}{dt\,d\zeta}\delta\zeta$ une inégalité dépendante seulement du moyen mouvement mnt du Soleil; mais cette inégalité étant multipliée par le facteur m, elle est au moins de l'ordre m^5, puisque les quantités M et N sont supposées de l'ordre m^2; elle ne s'abaissera donc qu'à l'ordre m^4 dans la fonction $\int\left[\delta.\left(\frac{d\mathrm{R}}{dt}\right)-\frac{d^2\mathrm{R}}{dt\,d\zeta}\delta\zeta\right]dt$, puisqu'elle n'acquiert par l'intégration qu'un diviseur de l'ordre m; elle pourra par conséquent être comprise parmi les quantités que nous négligeons.

Si l'on suppose à la fois $i+i'+i''=0$, et $j+j'+j''=0$, ce qui donne $j+j''=-j'$, $j'+j''=-j$, le terme précédent devient

$$\frac{i[j''mn+l+l'+2l'']}{[in+j'mn-l-l''][-in-jmn+l'+l'']}\,\frac{\mathrm{MNP}}{4}\cos(l+l'+l'')t.$$

La combinaison des termes que nous avons considérés, introduit donc alors dans $\delta.\left(\frac{d\mathrm{R}}{dt}\right)-\frac{d^2\mathrm{R}}{dt\,d\zeta}\delta\zeta$ une inégalité du genre de celles que nous avons nommées *inégalités à longues périodes*, c'est-à-dire une inégalité dont l'argument ne varie qu'à raison du mouvement progressif du périgée et des nœuds de l'orbe lunaire. Cette inégalité acquiert par l'intégration un diviseur de l'ordre m^2; mais comme elle est de l'ordre m^6 tant qu'on suppose j'' un nombre entier

différent de zéro, puisque M et N sont de l'ordre m^2, et que P, dans ce cas, est une quantité de l'ordre m, il s'ensuit que cette inégalité demeure encore de l'ordre m^4 après l'intégration et qu'elle rentre par conséquent parmi les quantités que nous négligeons. Enfin, si l'on suppose à la fois $i + i' + i'' = 0$, $j + j' + j'' = 0$, $i'' = 0$ et $j'' = 0$, ce qui donne $i + i' = 0$, $j + j' = 0$, le terme précédent se réduit à

$$\frac{i(l + l' + 2l'')}{(in - jmn - l - l'')(-in - jmn + l' + l'')} \cdot \frac{\text{MNP}}{4} \cos(l + l' + l'')t,$$

inégalité qui est encore de l'ordre m^6, puisque le produit MNP, qui est alors de l'ordre m^4, se trouve multiplié par le facteur $l + l' + 2l''$ qui est de l'ordre m^2; elle ne s'abaissera donc qu'à l'ordre m^4 dans l'expression de $\int \left[\delta.\left(\frac{dR}{ds}\right) - \frac{d^2R}{ds\,d\zeta}\,\delta\zeta\right] dt$, et pourra par conséquent être négligée.

En général, on voit par l'analyse précédente que la propriété qui caractérise les inégalités *indépendantes du moyen mouvement de la Lune* dans l'expression de la fonction $\delta.\left(\frac{dR}{ds}\right) - \frac{d^2R}{ds\,d\zeta}\,\delta\zeta$, consiste en ce que le coefficient de chacune de ces inégalités acquiert, par les réductions que subissent les différens termes qui concourent à sa formation, un facteur du même ordre que le coefficient du temps t sous le signe *sinus* ou *cosinus* qu'il multiplie, en sorte qu'il demeure après l'intégration du même ordre que le produit MN des coefficiens des deux termes que l'on a considérés primitivement dans la fonction R, c'est-à-dire de l'ordre m^4, M et N étant deux quantités de l'ordre m^2. Ce

résultat, qui se vérifie aisément lorsqu'on ne considère que le carré des forces perturbatrices, subsiste encore quand on a égard au cube de ces forces, et il est probable qu'il doit s'étendre de même à toutes les approximations suivantes.

Ce que nous venons de dire s'appliquant à tous les termes de même forme que celui que nous avons choisi pour exemple, on en peut conclure que la considération des termes dépendans du cube de la force perturbatrice, comme celle des termes dépendans du carré de cette force, n'introduit dans la fonction $\int \left[\delta.\left(\frac{d\mathrm{R}}{d\epsilon}\right)-\frac{d^2\mathrm{R}}{d\epsilon\, d\zeta}\delta\zeta\right]dt$ que des termes périodiques dépendans du moyen mouvement nt de la Lune, lorsqu'on néglige dans cette expression les quantités de l'ordre m^4.

Or il est aisé de s'assurer que la fonction $\frac{d^2\mathrm{R}}{d\epsilon\, d\zeta}\delta\zeta$ ne renferme aucune inégalité indépendante du moyen mouvement nt de la Lune d'un ordre inférieur à m^4, et l'on en conclura que par conséquent la fonction $\int \delta.\left(\frac{d\mathrm{R}}{d\epsilon}\right)dt$ n'en renferme non plus aucun du même genre dans cet ordre d'approximation. En effet, si l'on n'a égard d'abord qu'aux termes introduits par le carré de la force perturbatrice, il suffira de substituer pour $\delta\zeta$, dans $\frac{d^2\mathrm{R}}{d\epsilon\, d\zeta}\delta\zeta$, sa valeur donnée par l'intégration de la formule (7). Ce terme devient ainsi

$$-\frac{d^2\mathrm{R}}{d\epsilon\, d\zeta}\int 3\, a n dt \int d'\mathrm{R}\,;$$

pour que cette fonction puisse produire un terme indépendant du moyen mouvement nt, il faut combiner

entre eux dans $\frac{d^2R}{d\varepsilon\, d\zeta}$ et $d'R$ des termes dépendans du même multiple de cet angle: Soient donc

$$A\cos(int + jmnt + lt) \quad \text{et} \quad B\cos(int + j'mnt + l't)$$

deux termes de la fonction R remplissant cette condition, en observant que $d'R = \frac{dR}{n\,dt}ndt$, et en ne considérant que ces termes, on aura :

$$d'R = -\,indt\,A\,\sin(int + jmnt + lt) - indtB\,\sin(int + j'mnt + l't),$$

d'où l'on conclura

$$\int 3\,andt \int d'R = \frac{3\,ian^2A}{(in + jmn + l)^2}\sin(int + jmnt + lt) + \frac{3\,ian^2B}{(in + j'mn + l')^2}\sin(int + j'mnt + l't).$$

En observant que $\frac{dR}{d\varepsilon} = \frac{dR}{n\,dt} = \frac{dR}{d\zeta}$, on a d'ailleurs, en vertu des mêmes termes,

$$\frac{d^2R}{d\varepsilon\, d\zeta} = -\,i^2A\cos(int + jmnt + lt) - i^2B\cos(int + j'mnt + l't).$$

Si l'on combine cette valeur avec la précédente et qu'on rejette les termes dépendans du mouvement nt de la Lune, on trouve

$$\frac{d^2R}{d\varepsilon\, d\zeta}\int 3\,andt \int d'R = \frac{3}{2}\,i^3an^3\left\{\frac{1}{(in + jmn + l)^2} - \frac{1}{(in + j'mn + l')^2}\right\} \times AB\sin[(j' - j)mnt + (l' - l)t],$$

ou bien, en réduisant,

$$\frac{d^2R}{d\varepsilon\, d\zeta}\int 3\,andt \int d'R$$
$$= \frac{3}{2}\,i^3an^3\left\{\frac{2in[(j - j')mn + l - l'] + (j'mn + l')^2 - (jmn + l)^2}{(in + jmn + l)^2\,(in + j'mn + l')^2}\right\} \times AB\sin[(j' - j)mnt + (l' - l)t].$$

Les termes que nous venons de considérer intro-

duisent donc dans la fonction $\delta.\left(\frac{dR}{d\epsilon}\right)$ une inégalité dépendante seulement du moyen mouvement mnt du Soleil; mais cette inégalité, lorsqu'on suppose j et j' des nombres quelconques, est multipliée par le facteur m; et comme A et B sont des facteurs de l'ordre m^2, elle se trouve de l'ordre m^5 dans l'expression de $\delta.\left(\frac{dR}{d\epsilon}\right)$ et par conséquent ne s'abaisse qu'à l'ordre m^4 dans l'expression finie de $\int\delta.\left(\frac{dR}{d\epsilon}\right)dt$ par le diviseur m que l'intégration lui fait acquérir. Si l'on suppose $j=j'$, l'inégalité dont il s'agit devient une inégalité du genre de celles que nous avons nommées à *longues périodes*, mais alors elle se trouve multipliée par le facteur $l-l'$, et comme elle acquiert cette même quantité pour diviseur par l'intégration, elle n'introduit dans la fonction $\int\delta.\left(\frac{dR}{d\epsilon}\right)dt$ qu'une inégalité de l'ordre m^4 que nous sommes convenus de négliger.

Pour avoir égard aux termes dépendans du cube de la force perturbatrice que peut renfermer la fonction $\frac{d^2R}{d\epsilon\, d\zeta}\int 3andt\int d'R$, il faut comprendre dans la fonction R les termes dépendans du carré de la force perturbatrice et considérer comme variables les élémens a et n qui entrent sous le signe intégral; mais les variations de ces deux élémens ne renfermant que des termes périodiques dépendans du moyen mouvement de la Lune, qui, par conséquent, n'ont pu s'abaisser par l'intégration, et tous les termes qui composent les fonctions $\frac{d^2R}{d\epsilon\, d\zeta}$ et $d'R$ étant également des quantités de

l'ordre m^2, il s'ensuit que toutes les inégalités qui peuvent résulter de la combinaison de ces diverses fonctions seront au moins de l'ordre m^6; elles pourront donc tout au plus s'abaisser à l'ordre m^4 dans l'expression de la fonction $\int\left[\frac{d^2R}{d\epsilon\, d\zeta}\iint 3andt\, d'R\right]dt$ et seront toujours comprises par conséquent parmi les quantités que nous négligeons.

Il serait facile de démontrer, par des considérations semblables, que si, dans la fonction $\int\left(\frac{dR}{d\epsilon}\right)ndt$, on substitue pour n sa valeur $n + \delta n$, n étant une constante invariable, et δn étant déterminé par l'équation $\delta n = -\frac{3}{2}\int\frac{ndu}{a}$, n° 43, livre II, la fonction $\int\left(\frac{dR}{d\epsilon}\right)\delta n\, dt$ ne renfermera dans l'ordre m^2 et dans l'ordre m^3 que des inégalités périodiques dépendantes du moyen mouvement nt de la Lune.

Concluons donc enfin que la fonction $\int\left(\frac{dR}{d\epsilon}\right)ndt$ ou $\int d'R$ ne renferme aucune inégalité *indépendante du moyen mouvement de la Lune,* c'est-à-dire aucune inégalité dont l'*argument ne varie qu'à raison du mouvement du Soleil* ou *des mouvemens progressifs du périgée, et des nœuds de l'orbe lunaire,* du moins tant qu'on néglige dans le développement de cette fonction les termes d'un ordre supérieur à m^3.

C'est le théorème que nous avions énoncé sans le démontrer n° 9, et que nous avons ensuite vérifié par un calcul direct relativement à plusieurs inégalités telles que l'*équation annuelle*, n° 58, c'est-à-dire ne

renfermant dans leur argument que le moyen mouvement du Soleil. Son utilité est surtout très-grande pour le calcul des inégalités à *longues périodes*, parce que la nécessité où l'on serait de pousser jusqu'aux quantités de l'ordre m^5 le calcul des différens termes des fonctions qui subissent une double intégration dans l'expression de la longitude, et le grand nombre de combinaisons qu'il faudrait considérer pour cet objet, rendraient leur détermination très-pénible, et, par suite, les erreurs de calcul presque inévitables, comme l'ont éprouvé la plupart des géomètres qui ont essayé de déterminer ces inégalités par des formules indépendantes de la fonction $\int d'R$ (*).

92. Reprenons maintenant la formule (1), n° 87, qui détermine la variation du grand axe de l'orbe lunaire. Cette formule peut s'écrire ainsi

$$da = 2a^2 d'R.$$

Si l'on veut avoir égard au carré des forces perturbatrices, on fera croître le facteur a^2 de sa variation $2a\delta a$ ou $4a^3 \int d'R$, en substituant pour δa sa valeur donnée par la première approximation, et l'on aura ainsi, n° 61, liv. II,

$$\delta a = 2a^2 \int d'R + 8a^3 \int (d'R \int d'R).$$

Le premier terme ne contient aucune inégalité *indépendante du moyen mouvement de la Lune* d'un ordre inférieur à m^4, puisque la fonction $\int d'R$ n'en peut renfermer de semblables dans la seconde ni même dans la troisième approximation, comme nous venons de le voir; en appliquant au second terme

(*) *Voyez* ce qui a été dit sur ce sujet, page 27.

l'analyse dont nous avons fait usage relativement au terme $\frac{d^2 R}{de\, d\zeta}\int\int 3andt\, d'R$, on s'assurera que $\int(d'R\int d'R)$ ne peut renfermer non plus dans cet ordre aucune inégalité du même genre; d'où l'on peut conclure que l'expression du grand axe en est également indépendante, et il sera facile d'étendre ce résultat au cas où l'on porte l'approximation jusqu'au cube de la force perturbatrice, du moment qu'il est démontré qu'il subsiste encore alors à l'égard de la fonction $\int d'R$.

La variation du moyen mouvement est déterminée par la formule

$$\delta\zeta = -3\int\int andt\, d'R,$$

ou bien, en faisant varier les élémens a et n pour avoir égard aux termes dépendans du carré de la force perturbatrice, n° 61, livre II,

$$\delta\zeta = -3a\int\int(ndt\, d'R) + 3a^2\int\int ndt\,[d'R\int d'R].$$

En comparant cette formule à celle qui détermine la valeur de δa, on doit en conclure que, malgré la double intégration que les fonctions $\int d'R$, $\int(d'R\int d'R)$ subissent dans l'expression du moyen mouvement, la valeur de $\delta\zeta$ ne renfermera aucune inégalité indépendante de l'angle nt, d'un ordre inférieur à m^2, du moment qu'il est démontré que l'expression de δa n'en renferme aucune d'un ordre inférieur à m^4. Enfin on étendra aisément la même conséquence au cas où l'on a égard aux quantités du troisième ordre par rapport aux forces perturbatrices.

Tout ce que nous avons démontré d'ailleurs, n° 61, liv. II, sur l'indépendance des valeurs de δa et $\delta\zeta$ relativement aux *inégalités séculaires*, peut s'appli-

quer identiquement au mouvement de la Lune et aux formules (1) et (7), n° 87.

Concluons donc que le grand axe et le moyen mouvement de la Lune ne renferment dans leur expression, 1° aucune inégalité *séculaire*, c'est-à-dire aucune inégalité susceptible de croître indéfiniment avec le temps, même lorsqu'on a égard au carré de la force perturbatrice du Soleil ou aux quantités de l'ordre m^4; 2° aucune inégalité dont l'argument soit *indépendant du moyen mouvement nt* de la Lune, en portant la précision jusqu'aux quantités de l'ordre m^8 dans l'expression du grand axe et jusqu'aux quantités de l'ordre m dans l'expression du moyen mouvement.

Cette proposition n'est, comme on voit, qu'une extension du théorème remarquable qui existe relativement à l'invariabilité des grands axes et des moyens mouvemens planétaires par rapport aux *inégalités séculaires*; l'invariabilité du grand axe comprend, dans la théorie de la Lune, non-seulement les *inégalités séculaires*, mais aussi les inégalités dépendantes du *moyen mouvement du Soleil*, et celles dont les argumens ne varient qu'à raison des *mouvemens progressifs* du périgée et du nœud de l'orbite lunaire. Laplace paraît avoir fait le premier cette importante remarque; mais la démonstration sur laquelle il a cru pouvoir l'appuyer (*Connaissance des Temps*, 1824) est non-seulement incomplète, elle est même tout à fait fautive; et, par suite, les résultats qu'il a obtenus relativement aux inégalités à *longues périodes* dont il a entrepris le calcul, soit dans la *Connaissance des Temps* pour 1824, soit dans le V[e] volume de la *Mécanique*

céleste, sont également incorrects, du moins dans les parties qui dépendent de la troisième approximation.

M. Poisson a donné depuis une démonstration directe du théorème dont il s'agit, dans son Mémoire sur la *Théorie de la Lune*; mais il avait omis de tenir compte des inégalités introduites par le cube de la force perturbatrice, dont la considération est indispensable, comme nous l'avons vu, et qui fait seule la difficulté de cette proposition lorsqu'on veut la traiter avec toute la généralité qu'elle exige. Il n'existait donc réellement aucune démonstration exacte et complète de l'indépendance dont jouit la fonction $\int d'R$ relativement aux inégalités à *longue période*, et quelques géomètres l'avaient même révoquée en doute, lorsque j'essayai de la vérifier, par un calcul direct, sur quelques exemples particuliers, choisis parmi les inégalités à *longue période* qui avaient fixé spécialement l'attention des géomètres (*); je mis ainsi hors de doute l'exactitude du théorème, et je m'occupai ensuite d'en chercher une démonstration simple et générale. Celle que j'ai donnée plus haut me paraît ne rien laisser à désirer à cet égard; son principal avantage tient à l'introduction préalable, dans l'expression de la fonction perturbatrice R, de toutes les inégalités susceptibles de s'abaisser par l'intégration, ce qui permet, lorsqu'on fait varier dans cette fonction ainsi préparée ou dans ses différences partielles les élémens elliptiques qu'elles renferment, de négliger les termes

(*) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. IV, p. 280. — Additions à la *Connaissance des Temps* pour 1840.

dépendans des carrés et des produits des variations de ces élémens, termes qui seraient de l'ordre m^6, et de décomposer par suite chacune des parties de la fonction résultante en groupes de la forme $P\int Q dt - Q\int P dt$; décomposition déjà si utile lorsqu'il s'agit des termes dépendans du carré de la force perturbatrice, et qu'on étend ainsi aux termes introduits par le cube de cette force. Cette heureuse idée aplanit la principale difficulté d'une démonstration qui, sans cela, serait d'une complication presque rebutante, elle est due à M. Lubbock, qui a mérité par ce service toute la reconnaissance des géomètres.

93. Après avoir examiné, avec toute l'étendue que l'importance de l'objet exigeait, les inégalités du *grand axe* et du *moyen mouvement*, occupons-nous des inégalités des autres élémens de l'orbite elliptique de la Lune. Reprenons d'abord les formules (2) et (4), qui déterminent les variations différentielles de la *longitude de l'époque* et de celle du *périgée* : on a

$$d\varepsilon = -2a^2 n dt\left(\frac{dR}{da}\right) + \frac{andt\sqrt{1-e^2}}{e}(1-\sqrt{1-e^2})\left(\frac{dR}{de}\right),$$
$$d\omega = \frac{andt\sqrt{1-e^2}}{e}\left(\frac{dR}{de}\right).$$

Dans ces formules, les angles ε et ω sont supposés comptés sur le plan de l'orbite troublée, à partir d'une origine fixe; pour les rapporter à l'écliptique, observons que, $d\theta$ exprimant le mouvement différentiel du nœud ascendant de la Lune sur ce plan, $\cos i d\theta$ sera le mouvement du même nœud pendant l'instant dt projeté sur le plan de l'orbite lunaire; $d\varepsilon - \cos i d\theta$ et $d\omega - \cos i d\theta$ seront par conséquent les variations des

angles ε et ω pendant l'instant *dt*, relativement à la ligne des nœuds; on aura donc à très-peu près, pour déterminer les variations des angles ε et ω comptés sur le plan de l'écliptique, à partir de la droite, origine commune de toutes les longitudes,

$$d\varepsilon = (d\varepsilon) + (1 - \cos i)\, d\theta,$$
$$d\omega = (d\omega) + (1 - \cos i)\, d\theta,$$

les différentielles $(d\varepsilon)$ et $(d\omega)$, entourées de parenthèses, se rapportant aux angles ε et ω mesurés sur le plan même de l'orbe lunaire, à partir d'une origine fixe. En substituant donc dans ces équations, à la place de $(d\varepsilon)$, $(d\omega)$ et $d\theta$, leurs valeurs données par les formules (2), (4) et (6), on aura

$$\left.\begin{aligned} d\varepsilon = -2a^2 ndt \left(\frac{d\mathrm{R}}{da}\right) + \frac{andt\sqrt{1-e^2}}{e}\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)\left(\frac{d\mathrm{R}}{de}\right) \\ + \frac{andt}{\sqrt{1-e^2}}\tang\frac{1}{2}i\left(\frac{d\mathrm{R}}{di}\right), \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

$$d\omega = \frac{andt\sqrt{1-e^2}}{e}\left(\frac{d\mathrm{R}}{de}\right) + \frac{andt}{\sqrt{1-e^2}}\tang\frac{1}{2}i\left(\frac{d\mathrm{R}}{di}\right). \quad (9)$$

Les angles ε, ω, θ auront ainsi désormais la même signification que celle que nous leur avons attribuée dans les n°s 4 et suivans; l'angle ω, en particulier, désigne ce que les astronomes appellent la *longitude du périgée sur l'orbite*.

94. Occupons-nous d'abord de la première de ces formules. Si, après avoir développé la fonction R en série de cosinus d'angles proportionnels au temps *t*, on nomme R_0 la partie non périodique ou le premier terme de ce développement, en substituant cette valeur à la place de R dans la formule (8); et faisant, pour simpli-

fier, a et n égaux à l'unité, on aura

$$d\varepsilon = -2dt\left(\frac{dR_0}{da}\right) + \frac{dt\sqrt{1-e^2}}{e}\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)\left(\frac{dR_0}{de}\right) + \frac{dt}{\sqrt{1-e^2}}\operatorname{tang}\frac{1}{2}i\left(\frac{dR_0}{di}\right).$$

Supposons que, lorsqu'on aura remplacé R_0 par sa valeur, le second membre de cette équation prenne cette forme $(1+f+f'e'^2)\,dt$, e' désignant comme précédemment l'excentricité de l'orbe solaire. $\zeta = \int dt + \varepsilon$ représentant le moyen mouvement dans l'orbite elliptique, en différentiant, on aura $\frac{d\zeta}{dt} = 1 + \frac{d\varepsilon}{dt}$, ou bien, en substituant pour $\frac{d\varepsilon}{dt}$ sa valeur, $\frac{d\zeta}{dt} = (1+f+f'e'^2)$. Le second membre de cette équation n'est pas rigoureusement constant, l'excentricité e' de l'orbe solaire varie de siècle en siècle, et le terme $f'\int e'^2\,dt$, que renferme la valeur de ζ, introduit dans l'expression du moyen mouvement de la Lune, et par suite dans celle de sa longitude moyenne, une *inégalité séculaire* semblable à celle qui résulte d'une cause analogue dans l'expression des longitudes moyennes de Jupiter et de Saturne, n° 74, livre II; mais cette *inégalité séculaire* du moyen mouvement, qui est sans effet appréciable pour ces deux planètes, devient au contraire très-sensible dans le mouvement de la Lune, et elle avait été indiquée par l'observation longtemps avant que la théorie ne fût parvenue à en découvrir la véritable cause.

Pour avoir égard à la variation de e' dans l'expression de ζ, désignons par E' ce que devient l'excentricité e' de l'orbe solaire après un temps quelconque t, et supposons qu'on ait $E'^2 = e'^2 + Ht + H't^2 +$ etc.; en substituant cette valeur dans l'expression de $\frac{d\zeta}{dt}$, et

en intégrant la valeur résultante, on aura

$$\zeta = (1 + f + f'e'^2)\,t - f'\int(e'^2 - E'^2)\,dt,$$

le facteur e'^2, qui entre dans le premier terme de cette valeur, devant être maintenant regardé comme rigoureusement constant. Le facteur $(1 + f + f'e'^2)$, en le développant, ferait connaître le rapport qui doit exister entre le moyen mouvement dans l'orbite troublée et le moyen mouvement dans l'orbite elliptique, et l'on en déduirait, par la règle ordinaire, le rapport des grands axes qui conviennent à ces deux orbites; mais comme nous avons introduit dans les formules mêmes du mouvement elliptique le moyen mouvement qui se rapporte au mouvement troublé, n° 5, ce calcul nous serait inutile; nous pourrons donc faire abstraction du terme $(f + f'e'^2)\,t$ proportionnel au temps t, introduit par la variation de ε, et le regarder comme compris dans l'intégrale $\int dt$ ou dans l'expression du *moyen mouvement* qui se déduit directement de l'observation. Quant à la valeur du coefficient f', observons que, par le développement de la fonction R, n° 6, on a

$$R_0 = \frac{3m'}{8}\,e'',$$

d'où l'on conclura $a\frac{dR_0}{da}$, au moyen de l'équation

$$a\frac{dR_0}{da} = 2R_0.$$

On peut négliger, dans l'expression de $d\varepsilon$, les termes dépendans de $\frac{dR_0}{de}$ et de $\frac{dR_0}{di}$, parce qu'ils seraient de

l'ordre e^2 ou γ^2 par rapport au terme précédent; en vertu du terme que nous avons considéré dans R_0, on aura donc $\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{3}{2} m^2 e'^2$, et par conséquent $f' = -\frac{3}{2} m^2$. L'expression de la longitude moyenne dans le mouvement troublé sera donc ainsi :

$$\zeta = t + \varepsilon + \frac{3}{2} m^2 \int (e'^2 - E'^2)\, dt.$$

En nommant v, comme nous l'avons fait jusqu'ici, la longitude vraie relative à ce mouvement, on a généralement $v = \zeta + \Sigma K \sin(lt + l')$, en représentant par $\Sigma K \sin(lt + l')$ une suite de termes périodiques dont on voit le développement dans les nos 29 et 76; on aura donc

$$v = t + \varepsilon + \frac{3}{2} m^2 \int (e'^2 - E'^2)\, dt + \Sigma K \sin(lt + l').$$

Telle est la formule qui servira à déterminer pour un temps quelconque t la longitude vraie de la Lune. On pourrait, en suivant l'analyse précédente et en ayant égard au carré et aux puissances supérieures de la force perturbatrice, déterminer avec plus de précision le coefficient qui multiplie dans l'expression de l'équation séculaire l'*intégrale* du produit de la différentielle du temps par l'excès du carré de l'excentricité de l'orbe terrestre sur ce même carré à une époque arbitraire choisie pour origine du temps; mais en poussant cette approximation jusqu'aux quantités mêmes de l'ordre m^7, on s'est aperçu que les termes qui suivent le premier se compensent à très-peu près et n'ajoutent à sa valeur qu'une correction insignifiante. Nous ne nous arrêterons donc pas pour le moment à cette recherche, qui ne peut être désormais que de pure

curiosité et qui nous écarterait trop de l'objet principal que nous nous proposons dans ce chapitre.

95. Considérons maintenant les formules (9) et (6), qui déterminent la position du périgée et des nœuds de l'orbe lunaire. En faisant, comme précédemment, a et n égaux à l'unité, on aura

$$d\omega = \frac{dt\sqrt{1-e^2}}{e}\left(\frac{dR}{de}\right) + \frac{dt}{\sqrt{1-e^2}}\operatorname{tang}\frac{1}{2}i\left(\frac{dR}{di}\right),$$

$$d\theta = \frac{dt}{\sin i\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{dR}{di}\right).$$

Supposons que la fonction R, développée par rapport aux puissances ascendantes de e et de γ, renferme les termes suivans

$$R = m^2M + m^2He^2 + m^2H'\gamma^2 + m^2Ge^2\cos(2mt - 2\omega) + m^2F\gamma^2\cos(2mt - 2\theta),$$

d'où l'on tire

$$\frac{dR}{ede} = 2m^2H + 2m^2G\cos(2mt - 2\omega),$$

$$\frac{dR}{\gamma d\gamma} = 2m^2H' + 2m^2F\cos(2mt - 2\gamma);$$

en substituant ces valeurs dans les formules précédentes et en négligeant les quantités de l'ordre m^2e^2, $m^2\gamma^2$, on aura

$$d\omega = 2m^2H\,dt + 2m^2G\,dt\cos(2mt - 2\omega),$$

$$d\theta = 2m^2H'dt + 2m^2F\,dt\cos(2mt - 2\theta).$$

Nous avons supposé, nº 5, $\omega = (1-c)t$, $\theta = (1-g)t$; en vertu de ces valeurs, les expressions différentielles qui précèdent donnent, en les intégrant et en désignant par la caractéristique δ les variations finies,

$$\delta\omega = 2m^2Ht + \frac{m^2}{m+c-1}G\sin(2mt - 2\omega),$$

$$\delta\theta = 2m^2H't + \frac{m^2}{m+g-1}F\sin(2mt - 2\theta).$$

Les premiers termes de ces valeurs feront connaître les mouvemens progressifs du périgée et des nœuds lorsqu'on n'aura égard qu'à la première puissance de la force perturbatrice; mais nous avons vu, dans les nos 24 et 41, que cette approximation ne suffisait pas, et que pour obtenir des résultats comparables aux observations, il fallait avoir égard aux termes dépendans du carré et même des puissances supérieures de la force perturbatrice. Pour cela il suffit, dans les deux formules précédentes, de faire croître les élémens ω et θ de leurs variations $\delta\omega$ et $\delta\theta$ données par la première approximation; on aura ainsi

$$\delta\omega = 2m^2 H t + \frac{m^2}{m + c - 1} G \sin(2mt - 2\omega - 2\delta\omega),$$

$$\delta\theta = 2m^2 H' t + \frac{m^2}{m + g - 1} F \sin(2mt - 2\theta - 2\delta\theta).$$

En substituant dans les seconds membres, à la place de $\delta\omega$ et de $\delta\theta$, leurs valeurs, et en négligeant les termes simplement périodiques, on trouve

$$\delta\omega = 2m^2 \left(H + \frac{m^2 G}{m + c - 1}\right) t,$$

$$\delta\theta = 2m^2 \left(H' + \frac{m^2 F}{m + g - 1}\right) t.$$

Ces valeurs n'étant exactes qu'aux quantités près de l'ordre m^4 que nous négligerons, on pourra supposer $c = 1$, $g = 1$ dans les termes multipliés par le facteur m^3; on peut d'ailleurs remplacer $\delta\omega$ et $\delta\theta$ par les quantités $(1 - c)\, t$, $(1 - g)\, t$: on aura donc

$$1 - c = 2m^2 (H + mG),$$

$$g - 1 = -2m^2 (H' + mF).$$

Pour réduire ces formules en nombres, comparons la valeur précédente de R au développement général donné n° 6; si l'on observe qu'en substituant pour ω et θ leurs valeurs $\omega=(1-c)t$, $\theta=(1-g)t$, on a, d'après les notations établies nos 5 et 6, $2mt-2\omega=2\xi-2\varphi$, $2mt-2\theta=2\xi-2\eta$; on trouvera $H=\frac{3}{8}$, $H'=-\frac{3}{8}$, $G=\frac{15}{8}$, $F=\frac{3}{8}$: on aura donc

$$1-c=\frac{3}{4}m^2\left(1+\frac{75}{8}m\right),$$

$$g-1=\frac{3}{4}m^2\left(1-\frac{3}{8}m\right).$$

Ces valeurs coïncident dans l'ordre des quantités auxquelles nous nous arrêtons, avec celles que nous avons trouvées par une autre voie dans les nos 24 et 41; mais il était utile de montrer comment les formules de la variation des constantes arbitraires peuvent être employées à déterminer les mouvemens du périgée et des nœuds d'une manière directe et indépendante de la recherche des inégalités périodiques.

Les expressions précédentes donnent lieu à une observation importante : on voit que dans ces valeurs les termes de l'ordre m^2 ont le même coefficient, mais que les coefficiens des termes en m^3 sont fort différens. Dans la première, ce coefficient est $\frac{225}{32}$, tandis qu'il est simplement $\frac{9}{32}$ dans la seconde. Il résulte de là que la première approximation peut suffire pour donner une connaissance approchée du mouvement du nœud, tandis qu'elle est tout à fait insuffisante pour faire connaître le mouvement du périgée. En effet, la valeur numérique de m étant $\frac{1}{13}$ environ,

n° 8, la fraction $\frac{75}{8}m$ ou $\frac{75}{104}$ diffère très-peu de l'unité; le second terme de la valeur de $1 - c$ est donc presque égal au premier, en sorte qu'en ne tenant compte que de la première puissance de la force perturbatrice, on n'obtient, pour le déplacement du périgée lunaire, que *la moitié à peu près* de la valeur indiquée par les observations. Cette circonstance oblige à pousser la précision jusqu'aux quantités de l'ordre m^3, non-seulement dans l'expression du mouvement progressif du périgée, mais encore dans le calcul des *inégalités à longues périodes*, qui deviennent sensibles en acquérant de très-petits diviseurs dans lesquels entre la quantité $1 - c$ ou $g - c$; c'est ce que nous nous proposons de faire lorsque nous nous occuperons de la détermination de ces inégalités, ainsi que nous l'avons annoncé n° 90.

Comme il est très-important au progrès de la théorie de reconnaître avec soin les causes particulières qui peuvent rendre très-sensibles des inégalités qui, par leur nature, paraîtraient devoir être en général peu considérables, il ne sera pas superflu de faire remarquer ici que c'est principalement par la grandeur du coefficient qui affecte le terme dépendant de l'angle $2mt - 2\omega$ dans le développement de la fonction perturbatrice R, et non pas seulement par le diviseur que lui fait acquérir l'intégration, que le terme de l'ordre m^3 devient comparable au terme de l'ordre m^2 dans l'expression du mouvement moyen du périgée; ce terme, en effet, comme on l'a vu, est, à tout autre égard, dans les mêmes conditions que le terme correspondant du moyen mouvement des nœuds. Il en résulte que la diffi-

culté que les géomètres ont rencontrée dans la détermination du mouvement du *périgée lunaire*, et qui les avait d'abord si fort embarrassés (*), est une de celles que la théorie ne pouvait résoudre sans le secours du calcul, et qui montre mieux que tout ce que nous pourrions ajouter l'utilité des applications numériques.

96. En suivant l'analyse précédente, et en ayant égard au cube et aux puissances supérieures de la force perturbatrice dans le développement des formules (9) et (6), on déterminerait les expressions de plus en plus approchées des deux quantités c et g; mais il serait inutile de nous arrêter ici à calculer les parties de ces valeurs que nous avons déjà déterminées par une autre voie dans les nos 24 et 41. Ce qui précède suffira pour montrer comment on pourrait ainsi s'assurer de l'identité des deux méthodes; il vaudra mieux profiter des formules de la variation des constantes arbitraires, pour calculer quelques termes des valeurs de c et g du même ordre que ceux que nous avons conservés dans les expressions de ces deux quantités, nos 24 et 41, et qui peuvent s'obtenir de cette manière beaucoup plus aisément que par l'intégration directe des équations différentielles du mouvement troublé.

Les formules (9) et (6), en négligeant les quantités d'un ordre supérieur à e^4 et γ^4, donnent

$$\frac{d\omega}{dt} = \left(1 - \frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{8}\right)\left(\frac{dR}{e\,de}\right) + \left(1 + \frac{e^2}{2}\right)\left(\frac{\gamma^2}{2} - \frac{3\gamma^4}{8}\right)\left(\frac{dR}{\sin i\,di}\right), \quad (10)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \left(1 + \frac{e^2}{2} + \frac{3}{8}e^4\right)\left(\frac{dR}{\sin i\,di}\right). \quad (11)$$

(*) *Voyez* page 18.

En développant la fonction R par la méthode du n° 6, et en ne conservant que le premier terme de ce développement, on aura, avec tout le degré d'exactitude qu'on pourra désirer, la valeur qui doit être substituée à la place de R dans les équations précédentes, lorsqu'on fait abstraction des termes périodiques qu'elles peuvent renfermer, et qu'on n'a égard qu'à la première puissance des forces perturbatrices; mais on peut obtenir plus simplement, sous forme finie, cette même quantité par les quadratures. En employant la méthode exposée n° 26, liv. III, j'ai trouvé ainsi (*)

$$R_0 = \frac{m'^2\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)}{4(1-e'^2)^{\frac{3}{2}}}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right);$$

expression très-simple, qui permet de prolonger indéfiniment le développement de la fonction R_0 par rapport aux trois quantités e^2, e'^2, γ^2.

En différentiant la valeur précédente, en substituant ensuite pour $\sin i$ et $\cos i$ leurs valeurs $\sin i = \frac{\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}}$, $\cos i = \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}}$, et en développant les expressions résultantes, on trouve

$$\frac{dR}{edc} = \frac{3}{4}m'^2\left(1+\frac{3}{2}e'^2+\frac{15}{8}e'^4\right)\left(1-\frac{3}{2}\gamma^2+\frac{3}{2}\gamma^4\right),$$

$$\frac{dR}{\sin i\,di} = -\frac{3}{4}m'^2\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)\left(1+\frac{3}{2}e'^2+\frac{15}{8}e'^4\right)\left(1-\frac{1}{2}\gamma^2+\frac{3}{8}\gamma^4\right).$$

La seconde approximation peut introduire dans les fonctions précédentes des termes du même ordre que

(*) *Voyez* les Notes à la fin du volume.

ceux que nous venons de considérer, et auxquels, par conséquent, il est nécessaire d'avoir égard. En effet, la fonction R, n° 6, renferme un terme de cette forme

$$R = m'Pe^2\gamma^2 \cos(2\omega - 2\theta).$$

En différentiant, on en tire

$$\frac{dR}{ede} = 2m'P\gamma^2 \cos(2\omega - 2\theta),$$

$$\frac{dR}{\gamma d\gamma} = 2m'Pe^2 \cos(2\omega - 2\theta).$$

Ces valeurs, substituées dans les formules (10) et (11), en observant qu'aux quantités près de l'ordre γ^4 on peut supposer $\frac{dR}{\gamma d\gamma} = \frac{dR}{\sin i di}$, donnent

$$d\omega = 2m'P\gamma^2 dt \cos(2\omega - 2\theta),$$
$$d\theta = 2m'Pe^2 dt \cos(2\omega - 2\theta),$$

d'où, en intégrant, après avoir remplacé ω et θ par leurs valeurs $(1 - c)t$, et $(1 - g)t$, on tire

$$\delta\omega = \frac{m'P\gamma^2}{g - c} \sin(2\omega - 2\theta),$$

$$\delta\theta = \frac{m'Pe^2}{g - c} \sin(2\omega - 2\theta).$$

Cela posé, si l'on fait croître les angles ω et θ de leurs variations dans les fonctions $\frac{dR}{ede}$ et $\frac{dR}{\gamma d\gamma}$, qu'on substitue pour $\delta\omega$ et $\delta\theta$ leurs valeurs précédentes, et qu'on n'ait égard qu'aux termes non périodiques, on trouvera

$$\delta.\frac{dR}{ede} = -\frac{2m'^2P^2\gamma^4}{g - c} + \frac{2m'^2P^2e^2\gamma^2}{g - c},$$

$$\delta.\frac{dR}{\gamma d\gamma} = \frac{2m'^2P^2e^4}{g - c} - \frac{2m'^2P^2e^2\gamma^2}{g - c}.$$

D'après le développement de R, n°6, on a $P = \frac{15}{16}$; nous avons trouvé d'ailleurs, par la première approximation, n° 95, $g = 1 + \frac{3}{4}m^2$, $c = 1 - \frac{3}{4}m^2$; d'où, en supposant $\frac{dR}{\gamma d\gamma} = \frac{dR}{\sin i di}$, on conclut

$$\delta.\frac{dR}{ede} = \frac{75}{64}m^2e^2\gamma^2 - \frac{75}{64}m^2\gamma^4,$$

$$\delta.\frac{dR}{\sin idi} = -\frac{75}{64}m^2e^2\gamma^2 + \frac{75}{64}m^2e^4.$$

L'expression de la fonction R, n° 3, renferme le terme

$$R = \frac{9m'r^4}{64r'^5}(1 - 10s^2);$$

et, par suite, le développement de cette même fonction contiendra les termes

$$R_0 = \frac{45}{64}m^2\frac{a^2}{a'^2}e^2 - \frac{45}{64}m^2\frac{a^2}{a'^2}\gamma^2,$$

d'où, en différentiant, on tire

$$\frac{dR}{ede} = \frac{45}{32}m^2\frac{a^2}{a'^2}, \quad \frac{dR}{\gamma d\gamma} = -\frac{45}{32}m^2\frac{a^2}{a'^2}.$$

En réunissant ces valeurs à celles des fonctions $\frac{dR}{ede}$ et $\frac{dR}{\sin idi}$ trouvées plus haut, et en les substituant ensuite dans les formules (10) et (11), on trouve

$$\begin{aligned}\frac{d\omega}{dt} = {} & \frac{3}{4}m^2\left(1 - \frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{8}\right)\left(1 + \frac{3}{2}e'^2 + \frac{15}{8}e'^4\right)\left(1 - \frac{3}{2}\gamma^2 + \frac{3}{2}\gamma^4\right) \\ & - \frac{3}{4}m^2(1 + 2e^2)\left(1 + \frac{3}{2}e'^2\right)\left(\frac{\gamma^2}{2} - \frac{5}{8}\gamma^4\right) \\ & + \frac{75}{64}m^2\gamma^2(e^2 - \gamma^2) + \frac{45}{32}m^2\frac{a^2}{a'^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} = {} & -\frac{3}{4}m^2\left(1 + 2e^2 + \frac{9}{8}e^4\right)\left(1 + \frac{3}{2}e'^2 + \frac{15}{8}e'^4\right)\left(1 - \frac{\gamma^2}{2} + \frac{3}{8}\gamma^4\right) \\ & + \frac{75}{64}m^2e^2(e^2 - \gamma^2) - \frac{45}{32}m^2\frac{a^2}{a'^2}.\end{aligned}$$

Si l'on développe ces deux expressions, en omettant les termes qui ont déjà été déterminés précédemment dans les valeurs de c et g, nos 24, 41, 51, 60, 70 et 83, on trouvera

$$\frac{d\varpi}{dt} = -\frac{3}{32}m^2e^4 - \frac{9}{16}m^2e^2e'^2 - \frac{45}{32}m^2e'^4 + \frac{63}{64}m^2e^2\gamma^2 - \frac{9}{4}m^2e'^2\gamma^2 - \frac{27}{64}m^2\gamma^4 + \frac{45}{32}m^2\frac{a^2}{a'^2},$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{21}{64}m^2e^4 - \frac{9}{4}m^2e^2e'^2 - \frac{45}{32}m^2e'^4 + \frac{3}{4}m^2e^2\gamma^2 + \frac{9}{16}m^2e'^2\gamma^2 - \frac{9}{32}m^2\gamma^4 - \frac{45}{32}m^2\frac{a^2}{a'^2}.$$

97. Portons les approximations jusqu'aux termes multipliés par m^3; la formule (9), en la différentiant par rapport à la caractéristique δ, et en omettant les termes de l'ordre m^3e^4, et ceux qui dépendent de l'inclinaison de l'orbe lunaire à l'écliptique, donne

$$\frac{d.\delta\varpi}{dt} = \delta.\frac{dR}{cde} - \frac{1}{2}\delta.e\frac{dR}{de}. \tag{12}$$

Lorsqu'on néglige les quantités de l'ordre m^4, il suffit de considérer dans R les termes dépendans du moyen mouvement du Soleil, les seuls qui puissent s'abaisser à l'ordre m par les diviseurs que l'intégration leur fait acquérir dans les variations des élémens, et produire par conséquent dans la fonction R et ses différences partielles, des quantités de l'ordre m^3. Soit donc d'abord

$$R = Gm^2e^2\cos(2mt - 2\varpi) + m^2G'e^2e'\cos(3mt - 2\varpi) + m^2G''e^2e'\cos(mt - \varpi) + m^2G'''e^2e'^2\cos(4mt - 2\varpi);$$

en différentiant, on aura

$$\frac{dR}{ede} = 2m^2G\cos(2mt - 2\varpi) + 2m^2G'e'\cos(3mt - 2\varpi) + 2m^2G''e'\cos(mt - \varpi) + 2m^2G'''e'^2\cos(4mt - 2\varpi);$$

cette valeur, substituée dans la formule (10), donne

$$d\omega = 2m^2 dt\left(1-\frac{e^2}{2}\right)\left\{\begin{matrix} G\cos(2mt-2\omega)+G'e'\cos(3mt-2\omega) \\ +G''e'\cos(mt-\omega)+G'''e'^2\cos(4mt-2\omega)\end{matrix}\right\},$$

d'où, en intégrant, on tire

$$\delta\omega = m\left(1-\frac{e^2}{2}\right)\left\{\begin{matrix} G\sin(2mt-2\omega)+\frac{2}{3}G'e'\sin(3mt-2\omega) \\ +2G''e'\sin(mt-\omega)+\frac{1}{2}G'''e'^2\sin(4mt-2\omega)\end{matrix}\right\}.$$

Si l'on fait varier l'angle ω dans l'expression précédente de $\frac{dR}{ede}$, et qu'on substitue à la place de $\delta\omega$ sa valeur, en négligeant les termes simplement périodiques, on trouvera

$$\delta.\frac{dR}{ede} = 2m^3\left(1-\frac{e^2}{2}\right)\left(G^2+\frac{2}{3}G'^2e'^2+2G''^2e'^2+\frac{1}{2}G'''^2e'^4\right).$$

L'expression de R, en la différentiant par rapport à ω, donne

$$\frac{dR}{ed\omega} = 2m^2Ge\sin(2mt-2\omega)+2m^2G'ee'\sin(3mt-2\omega)$$
$$+2m^2G''ee'\sin(mt-2\omega)+2m^2G'''ee'^2\sin(4mt-2\omega);$$

en substituant cette valeur dans la formule (3), n° 87, on aura

$$de = -2m^2dt\left\{\begin{matrix} Ge\sin(2mt-2\omega)+G'ee'\sin(3mt-2\omega) \\ +G''ee'\sin(mt-2\omega)+G'''ee'^2\sin(4mt-2\omega)\end{matrix}\right\},$$

d'où, en intégrant, on tire

$$\delta e = m\left\{\begin{matrix} Ge\cos(2mt-2\omega)+\frac{2}{3}G'ee'\cos(3mt-2\omega) \\ +2G''ee'\cos(mt-2\omega)+\frac{1}{2}G'''ee'^2\cos(4mt-2\omega)\end{matrix}\right\}.$$

On a d'ailleurs

$$\frac{dR}{de} = 2m^2\left\{\begin{matrix} Ge\cos(2mt-2\omega)+G'ee'\cos(3mt-2\omega) \\ +G''ee'\cos(mt-2\omega)+G'''ee'^2\cos(4mt-2\omega)\end{matrix}\right\};$$

en combinant ces deux valeurs, et en n'ayant égard qu'aux termes non périodiques, on en conclut

$$\frac{dR}{de}\,\delta e = m'e^2\left(G^2 + \frac{2}{3}G'^2e'^2 + 2G''^2e'^2 + \frac{1}{2}G'''^2e'^4\right).$$

On a d'ailleurs

$$\delta.e\,\frac{dR}{de} = \delta.e^2\frac{dR}{ede} = e^2\,\delta.\frac{dR}{ede} + 2\,\frac{dR}{de}\,\delta e\,;$$

en substituant pour $\delta.\frac{dR}{ede}$ et $\frac{dR}{de}\,\delta e$ leurs valeurs précédentes dans cette expression, on trouve

$$\delta.e\,\frac{dR}{de} = 4m'e^2\left(G^2 + \frac{2}{3}G'^2e'^2 + 2G''^2e'^2 + \frac{1}{2}G'''^2e'^4\right).$$

Cela posé, si l'on substitue pour $\delta.\frac{dR}{ede}$ et $\delta.e\,\frac{dR}{de}$ leurs valeurs dans la formule (12), on aura

$$\frac{d.\delta\varpi}{dt} = 2m'\left(1 - \frac{3}{2}e^2\right)\left(G^2 + \frac{2}{3}G'^2e'^2 + 2G''^2e'^2 + \frac{1}{2}G'''^2e'^4\right).$$

Pour réduire cette formule en nombres, observons que, d'après le développement de R, n° 6, on a

$$G = \frac{15}{8}\left(1 - \frac{5}{2}e'^2 + \frac{13}{16}e'^4\right), \qquad G' = \frac{105}{16}\left(1 - \frac{123}{56}e'^2\right),$$

$$G'' = -\frac{15}{16}\left(1 - \frac{e'^2}{8}\right), \qquad G''' = \frac{255}{16};$$

d'où l'on conclut

$$G^2 = \frac{225}{64}\left(1 - 5e'^2 + \frac{63}{8}e'^4\right), \qquad G'^2 = \frac{11025}{256}\left(1 - \frac{123}{28}e'^2\right),$$

$$G''^2 = \frac{225}{256}\left(1 - \frac{e'^2}{4}\right), \qquad G'''^2 = \frac{65025}{256};$$

et, par suite,

$$G^2+\frac{2}{3}G''^2e''+2G''^2e'^2+\frac{1}{2}G'''^2e''^4=\left(-\frac{1125}{64}+\frac{3675}{128}+\frac{225}{128}=\frac{825}{64}\right)e'^2$$
$$+\left(\frac{14175}{512}-\frac{64575}{512}-\frac{225}{512}+\frac{65025}{512}=\frac{225}{8}\right)e'^4.$$

On aura donc, en négligeant les termes déjà calculés n° 51,

$$\frac{d.\delta\omega}{dt}=-\frac{2475}{64}m^2e^2e'^2+\frac{225}{4}m^2e'^4.$$

Le coefficient du terme en m^2e^4 se réduisant à zéro, nous nous sommes dispensé d'en faire le calcul. La fonction R renferme un terme de cette forme

$$R=m^2K\frac{a}{a'}e\cos(mt-\omega),$$

d'où l'on tire

$$\frac{dR}{de}=m^2K\frac{a}{a'}\cos(mt-\omega),$$

$$\frac{dR}{ed\omega}=m^2K\frac{a}{a'}\sin(mt-\omega).$$

Au moyen des formules (3) et (4), n° 87, on en conclut

$$\delta\omega=\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}mK\frac{a}{a'}\sin(mt-\omega),$$

$$\delta e=\sqrt{1-e^2}\,mK\frac{a}{a'}\cos(mt-\omega).$$

Si l'on fait croître l'angle ω de sa variation, et que pour $\delta\omega$ on substitue sa valeur dans $\frac{dR}{de}$, que l'on combine ensuite les expressions précédentes de $\frac{dR}{de}$ et de δe, en n'ayant égard qu'aux termes non périodiques, on aura

$$\delta.\frac{dR}{de}=\frac{\sqrt{1-e^2}}{2e}m^3K^2\frac{a^2}{a'^2},$$

$$\frac{dR}{de}\delta e=\frac{\sqrt{1-e^2}}{2}m^3K^2\frac{a^2}{a'^2}.$$

Au moyen de ces valeurs, en observant que l'on a

$$\delta.\frac{dR}{ede}=\frac{1}{e}\delta.\frac{dR}{de}-\frac{\delta e}{e^2}.\frac{dR}{de},$$

$$\delta.e\frac{dR}{de}=e\delta.\frac{dR}{de}+\delta e.\frac{dR}{de},$$

on conclura

$$\left.\begin{aligned}\delta.\frac{dR}{ede}&=\frac{\sqrt{1-e^2}}{2e^2}m^2K^2\frac{a^2}{a'^2}-\frac{\sqrt{1-e^2}}{2e^2}m^2K^2\frac{a^2}{a'^2}=0,\\ \delta.e\frac{dR}{de}&=\frac{\sqrt{1-e^2}}{2}m^2K^2\frac{a^2}{a'^2}+\frac{\sqrt{1-e^2}}{2}m^2K^2\frac{a^2}{a'^2}\\ &=\sqrt{1-e^2}\,m^2K^2\frac{a^2}{a'^2}.\end{aligned}\right\}\quad(a)$$

La fonction R, n° 3, renferme dans son développement les deux termes suivans :

$$R=m^2Ge^2\cos(2mt-2\omega)+m^2L\frac{a^2}{a'^2}e^2\cos(2mt-2\omega);$$

on aura par conséquent

$$\frac{dR}{ede}=2m^2G\cos(2mt-2\omega)+2m^2L\frac{a^2}{a'^2}\cos(2mt-2\omega).$$

En substituant cette valeur dans l'équation différentielle (10), n° 96, et intégrant ensuite, on en conclut

$$\delta\omega=mG\sin(2mt-2\omega)+mL\frac{a^2}{a'^2}\sin(2mt-2\omega).$$

La fonction $\delta.\frac{dR}{ede}$, en vertu de ces termes, contient le suivant :

$$\delta.\frac{dR}{ede}=4m^2GL\frac{a^2}{a'^2};\quad(b)$$

la fonction $\delta.e\frac{dR}{de}$, en vertu des mêmes termes, ne contiendrait que des termes de l'ordre e^2 par rapport aux précédens, on peut donc les négliger; et,

en substituant pour $\delta . \frac{d\text{R}}{ede}$ et $\delta . e \frac{d\text{R}}{de}$ leurs valeurs (*a*), (*b*) dans la formule (12), on aura

$$\frac{d.\delta\omega}{dt} = -m'^2 \frac{a^3}{a'^3}\left(\frac{1}{2}\text{K}^2 - 4\text{GL}\right).$$

Pour réduire cette formule en nombres, observons que la fonction R, n° 3, renferme le terme

$$\text{R} = \frac{5m'r^4}{16r'^5}\cos(2v - 2v');$$

ce terme, en le développant, produit le suivant:

$$\text{R} = \frac{105}{64}m'^2\frac{a^3}{a'^3}e^2\cos(2mt - 2\omega).$$

On aura donc ainsi $\text{L} = \frac{105}{64}$; on a, d'ailleurs, d'après le développement de R, n° 6, $\text{G} = \frac{15}{8}$, $\text{K} = -\frac{15}{16}$; d'où l'on conclura

$$\frac{1}{2}\text{K}^2 - 4\text{GL} = \frac{225}{512} - \frac{1575}{128} = -\frac{6075}{512},$$

et par conséquent,

$$\frac{d.\delta\omega}{dt} = \frac{6075}{512}m'^2\frac{a^3}{a'^3}.$$

Considérons maintenant l'équation différentielle qui détermine la variation de la longitude du nœud. La formule (11), n° 96, en la différentiant par rapport à la caractéristique δ, et en supposant $\frac{d\text{R}}{\gamma d\gamma} = \frac{d\text{R}}{\sin i di}$, donne

$$\frac{d.\delta\theta}{dt} = \left(1 + \frac{e^2}{2}\right)\delta.\frac{d\text{R}}{\gamma d\gamma} + c\delta e\left(\frac{d\text{R}}{\gamma d\gamma}\right). \qquad (13)$$

Le second terme de cette expression ne produisant que des quantités de l'ordre e^2 par rapport au pre-

mier, nous en ferons abstraction dans les calculs suivans.

Soit

$$R = m^2 F\gamma^2 \cos(2mt - 2\theta) + m^2 F' e' \gamma^2 \cos(3mt - 2\theta)$$
$$+ m^2 F'' e' \gamma^2 \cos(mt - 2\theta) + m^2 F''' e'^2 \gamma^2 \cos(4mt - 2\theta),$$

et par suite,

$$\frac{dR}{\gamma d\gamma} = 2m^2 F \cos(2mt - 2\theta) + 2m^2 F' e' \cos(3mt - 2\theta)$$
$$+ 2m^2 F'' e' \cos(mt - 2\theta) + 2m^2 F''' e'^2 \cos(4mt - 2\theta).$$

En faisant varier θ dans cette expression et substituant pour $\delta\theta$ sa valeur donnée par une première approximation, on s'assurera que la fonction $\delta . \frac{dR}{\gamma d\gamma}$ renferme le terme suivant :

$$\delta . \frac{dR}{\gamma d\gamma} = 2m^2 \left(1 + \frac{e^2}{2}\right) \left(F^2 + \frac{2}{2} F'^2 e'^2 + 2F''^2 e'^2 + \frac{1}{2} F'''^2 e'^4\right).$$

Cette valeur, substituée dans la formule (13), donne

$$\frac{d.\delta\theta}{dt} = 2m^2 (1 + e^2) \left(F^2 + \frac{2}{3} F'^2 e'^2 + 2F''^2 e'^2 + \frac{1}{2} F'''^2 e'^4\right).$$

Pour réduire cette formule en nombres, observons que par le développement de R, n° 6, on a

$$F = \frac{3}{8}\left(1 + \frac{3}{2}e^2 - \frac{5}{2}e'^2 - 10 e^2 e'^2 + \frac{13}{16}e'^4\right); \quad F' = \frac{21}{16}\left(1 + \frac{3}{2}e^2 - \frac{123}{56}e'^2\right),$$

$$F'' = -\frac{3}{16}\left(1 + \frac{3}{2}e^2 - \frac{e'^2}{8}\right), \quad F''' = \frac{51}{16};$$

d'où l'on conclut

$$F^2 = \frac{9}{64}\left(1 - 5e'^2 - \frac{55}{2}e^2 e'^2 + \frac{63}{8}e'^4\right), \quad F'^2 = \frac{441}{256}\left(1 + 3e^2 - \frac{123}{28}e'^2\right),$$

$$F''^2 = \frac{9}{256}\left(1 + 3e^2 - \frac{e'^2}{4}\right), \quad F'''^2 = \frac{2601}{256},$$

et par suite,

$$F^2 + \frac{2}{3}F'^2e'^2 + 2F''^2e'^2 + \frac{1}{2}F'''^2e'^4 = \left(-\frac{45}{64} + \frac{147}{128} + \frac{9}{128} = \frac{33}{64}\right)e'^2$$
$$+\left(-\frac{495}{128} + \frac{441}{128} + \frac{27}{128} = -\frac{27}{128}\right)e^2e'^2$$
$$+\left(\frac{567}{512} - \frac{2583}{512} - \frac{9}{512} + \frac{2601}{512} = \frac{9}{8}\right)e'^4;$$

on aura donc ainsi

$$\frac{d.\delta\theta}{dt} = \left(\frac{33}{32} - \frac{27}{64} = \frac{39}{64}\right)m^2e^2e'^2 + \frac{9}{4}e'^4.$$

L'expression de la fonction perturbatrice, n° 3, renferme les termes

$$R = \frac{3m'r^2}{4r'^3}(1 - s^2)\cos(2v - 2v') + \frac{5m'r^4}{16r'^5}(1 - 8s^2)\cos(2v - 2v'),$$

qui, en se développant, produisent les suivans:

$$R = \frac{3}{8}m^2\gamma^2\cos(2mt - 2\theta) + \frac{5}{8}m^2\frac{a^2}{a'^2}\gamma^2\cos(2mt - 2\theta);$$

d'où l'on tire

$$\frac{dR}{\gamma d\gamma} = \frac{3}{4}m^2\cos(2mt - 2\theta) + \frac{5}{4}m^2\frac{a^2}{a'^2}\cos(2mt - 2\theta).$$

En substituant cette valeur pour $\frac{dR}{\sin i\,di}$ dans la formule (11), n° 96, et en intégrant l'expression résultante, on en tire

$$\delta\theta = \frac{3}{8}m\sin(2mt - 2\theta) + \frac{5}{8}m\frac{a^2}{a'^2}\sin(2mt - 2\theta).$$

En vertu de cette valeur, la fonction $\frac{dR}{\gamma d\gamma}$, différentiée par rapport à la caractéristique δ, renfermera le terme suivant:

$$\delta.\frac{dR}{\gamma d\gamma} = \left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cdot\frac{5}{4} = \frac{15}{16}\right)m^3\frac{a^2}{a'^2};$$

cette valeur, substituée dans la formule (13), donne

$$\frac{d.\delta\theta}{dt} = \frac{15}{16}m^3\frac{a^2}{a'^2}.$$

En réunissant les valeurs précédentes aux termes correspondans de l'ordre m^2 qui ont été calculés n° 96, et en observant qu'on a $c = 1 - \frac{d\varpi}{dt}$, $g = 1 - \frac{d\theta}{dt}$, on trouvera

$$
\begin{aligned}
c = & \left(\frac{9}{16}m^2 + \frac{2475}{128}m^3\right)e^2e'^2 \\
& + \frac{3}{32}m^2e^4 \\
& - \left(\frac{45}{32}m^2 + \frac{225}{4}m^3\right)e'^4 \\
& - \frac{63}{64}m^2e^2\gamma^2 + \frac{9}{4}m^2e'^2\gamma^2 + \frac{27}{64}m^2\gamma^4 \\
& - \left(\frac{45}{32}m^2 + \frac{6075}{512}m^3\right)\frac{a^2}{a'^2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g = & \left(\frac{9}{4}m^2 - \frac{39}{64}m^3\right)e^2e'^2 \\
& - \frac{21}{64}m^2e^4 \\
& + \left(\frac{45}{32}m^2 - \frac{9}{4}m^3\right)e'^4 \\
& - \frac{3}{4}m^2e^2\gamma^2 - \frac{9}{16}m^2e'^2\gamma^2 + \frac{9}{32}m^2\gamma^4 \\
& + \left(\frac{45}{32}m^2 - \frac{15}{16}m^3\right)\frac{a^2}{a'^2}.
\end{aligned}
$$

Ces termes doivent être joints aux valeurs de c et g qui ont été trouvées par une autre voie, n°s 24, 41, 51, 60, 70 et 83, et serviront à les compléter.

98. Les valeurs de c et g ainsi déterminées contiennent dans leur expression l'excentricité e' de l'orbe solaire; cette excentricité n'est point constante, comme nous l'avons vu n° 94, et sa variation doit produire, dans l'expression des moyens mouvemens du périgée et du nœud de l'orbe lunaire, des *inégalités séculaires* analogues à celles qui résultent de la même cause dans l'expression de la longitude moyenne.

Pour les déterminer, supposons à la valeur de c trouvée précédemment cette forme $c=1+p+p'e'^2$; désignons, comme dans le n° 94, par e' l'excentricité de l'orbe solaire à une époque fixe, et par E' ce que devient e' au bout d'un temps quelconque t, en sorte qu'on ait $E'^2=e'^2+Ht+H't^2+\text{etc.}$; en observant qu'on a généralement $d\varpi=(1-c)dt$, et en substituant E'^2 à la place de e'^2 dans l'expression de c, on aura

$$d\varpi=(1-c)\,dt+p'(e'^2-E'^2)\,dt;$$

en intégrant cette expression, dans laquelle on doit regarder c comme une quantité rigoureusement constante, on trouve

$$\delta\varpi=(1-c)t+p'\int(e'^2-E'^2)\,dt.$$

Le terme $(1-c)t$ continuera à représenter le moyen mouvement du périgée, et le second terme

$$p'\int(e'^2-E'^2)\,dt$$

sera l'équation séculaire à laquelle il est assujetti, à raison de la variation de l'excentricité de l'orbe solaire. p' représentant le coefficient du terme affecté de e'^2 dans la valeur de c, on a d'ailleurs, n° 51,

$$p'=-\left(\frac{9}{8}m^2+\frac{825}{32}m^3+\frac{61179}{256}m^4+\frac{1767849}{1024}m^5\right).$$

Ce que nous venons de dire relativement à l'*inégalité séculaire* du mouvement du périgée s'applique également au mouvement du nœud. En effet, la valeur de g, n° 60, peut s'écrire ainsi : $g=1+q+q'e'^2$; la variation de l'excentricité e' de l'orbe solaire altérant cette quantité, il faudra dans l'expression de

$d\theta = (1-g)\,dt$ avoir égard à cette variation ; en conservant les notations précédentes, on trouve ainsi

$$d\theta = (1-g)\,dt + q'(e'^2 - E'^2)\,dt,$$

formule dans laquelle on doit regarder g comme une quantité rigoureusement constante. En intégrant, on aura donc

$$\delta\theta = (1-g)\,t + q'\int(e'^2 - E'^2)\,dt.$$

Cette valeur détermine le mouvement du nœud tel qu'il doit résulter des observations ; le premier terme donnera son *mouvement moyen*, et le second l'*équation séculaire* dont il est affecté. q' représentant le coefficient du terme multiplié par e'^2 dans l'expression de g, on aura d'ailleurs, n° 60,

$$q' = \left(\frac{9}{8}m^2 - \frac{33}{32}m^3 - \frac{3261}{256}m^4 - \frac{84517}{1024}m^5\right).$$

Si l'on fait, n° 94, $\delta\zeta = -f'\int(e'^2 - E'^2)\,dt$, cette valeur, jointe aux valeurs précédentes de $\delta\omega$ et $\delta\theta$, seront les quantités dont on doit faire croître les angles t, ω et θ, introduits par les formules du mouvement elliptique, dans les expressions du *rayon vecteur*, de la *longitude* et de la *latitude* qui conviennent au mouvement troublé. Ainsi, en conservant, pour plus de simplicité, aux argumens des diverses inégalités que ces expressions renferment, la forme que nous leur avons donnée, on se rappellera, lorsqu'on voudra former leurs valeurs effectives, que l'on doit attribuer aux quantités que nous avons désignées par ξ, φ et η, les valeurs suivantes :

$$\xi = (1-m)\left[t - f'\int(e'^2 - E'^2)\,dt\right] + \varepsilon - \varepsilon',$$

$$\varphi = t + \varepsilon - \omega - f'\int(e'^2 - E'^2)\,dt - (1-c)\,t - p'\int(e'^2 - E'^2)\,dt,$$

$$\varphi' = mt + \varepsilon' - \omega' - mf'\int(e'^2 - E'^2)\,dt,$$

$$\eta = t + \varepsilon - \theta - f'\int(e'^2 - E'^2)\,dt - (1-g)\,t - q'\int(e'^2 - E'^2)\,dt.$$

En ne tenant compte que des termes de l'ordre m^2, on a respectivement pour les variations séculaires du *moyen mouvement*, du *périgée* et des *nœuds* de la Lune,

$$\frac{3}{2}m^2\int(e'^2 - E'^2)\,dt;\quad -\frac{9}{8}m^2\int(e'^2 - E'^2)\,dt;\quad \frac{9}{8}m^2\int(e'^2 - E'^2)\,dt.$$

On voit donc que les variations séculaires du *périgée* et des *nœuds* sont égales, mais de signes contraires, et qu'elles sont à l'équation séculaire du *mouvement moyen* comme 3 : 4; ce rapport subsiste en effet, à très-peu près, relativement à l'inégalité séculaire des nœuds, quelque loin qu'on porte la précision dans l'évaluation de son coefficient; mais le coefficient de l'inégalité séculaire du périgée est considérablement altéré par les approximations successives, et la valeur définitive de cette inégalité est en réalité plus que quadruple de celle de l'inégalité séculaire des nœuds.

99. Il nous reste à développer les formules (3) et (5), n° 87, qui déterminent les variations de l'excentricité et de l'inclinaison de l'orbite; mais comme ces deux élémens, d'après ce qui a été dit n° 89, ne sont assujettis qu'à des *inégalités périodiques*, et que leurs variations ne renferment aucune *inégalité séculaire*, du moins parmi les termes dépendans de la première approximation, nous pouvons nous dispenser de nous y arrêter ici.

100. Nous allons appliquer maintenant les formules données dans ce chapitre ou dans les précédens, selon les cas que nous aurons à traiter, au calcul de quelques-unes des inégalités remarquables qui tiennent le milieu, dans la théorie de la Lune, entre les *inégalités simplement périodiques* et les *inégalités séculaires*, et que l'on a nommées, pour les distinguer, *inégalités à longues périodes*. Mais nous devons auparavant démontrer une propriété générale dont jouit à leur égard la fonction R, et qui consiste en ce que cette fonction ne renferme dans l'ordre m^2 aucune inégalité de cette espèce, c'est-à-dire aucune inégalité dont l'argument ne contienne que les élémens elliptiques de l'orbe lunaire et soit supposé ne varier par conséquent que par les variations très-lentes de ces élémens.

Pour le faire voir, observons d'abord que si l'on désigne par δR la variation de R, on aura généralement

$$\delta R = \frac{dR}{d\zeta}\delta\zeta + \frac{dR}{da}\delta a + \frac{dR}{d\varepsilon}\delta\varepsilon + \frac{dR}{de}\delta e + \frac{dR}{d\varpi}d\varpi + \frac{dR}{d\gamma}\delta\gamma + \frac{dR}{d\theta}\delta\theta.$$

Les termes dépendans du mouvement de la Lune et du Soleil que renferment les variations $\delta\zeta$, δa, $\delta\varepsilon$, etc., ne pourront produire, en se combinant avec les termes contenus dans les différences partielles $\frac{dR}{d\zeta}$, $\frac{dR}{da}$, etc., que des quantités de l'ordre m^4 ou m^3, puisque les premiers demeurent de l'ordre m^2 et que les seconds deviennent seulement de l'ordre m après l'intégration. On pourra donc faire abstraction de ces termes dans les valeurs de $\delta\zeta$, δa, etc., et par conséquent dans celles des différences $\frac{dR}{d\zeta}$, $\frac{dR}{da}$, etc. En réduisant donç

la fonction R à sa partie non périodique et en la supposant développée en une suite ordonnée par rapport aux puissances des excentricités et des inclinaisons, soit

$$R = m^2 M + m^2 H e^2 + m^2 H' \gamma^2 + m^2 P e^2 \gamma^2 \cos(2\omega - 2\theta) + \text{etc.}$$

Pour fixer les idées, bornons-nous à considérer l'inégalité à longue période qui dépend de l'angle $2\omega - 2\theta$. En négligeant les termes de l'expression de R qui en sont indépendans, on aura

$$\frac{dR}{ed\omega} = -2m^2 P e \gamma^2 \sin(2\omega - 2\theta),$$

$$\frac{dR}{\gamma d\theta} = 2m^2 P e^2 \gamma \sin(2\omega - 2\theta).$$

Si l'on substitue ces valeurs dans les formules (3) et (5), n° 87, après avoir remplacé ω et θ par leurs valeurs $(1-c)t$ et $(1-g)t$, et qu'on intègre les expressions résultantes, on aura

$$e\delta e = -\frac{m^2 e^2 \gamma^2 P}{g-c} \cos(2gt - 2ct),$$

$$\gamma\delta\gamma = \frac{m^2 e^2 \gamma^2 P}{g-c} \cos(2gt - 2ct).$$

On peut, dans la variation de la fonction R, négliger les termes qui ne dépendraient que de la variation du demi-grand axe a, puisque nous avons vu que cette variation ne contenait aucune inégalité à longue période d'un ordre inférieur à m^4, n° 92; on peut aussi se dispenser de faire varier ω et θ, parce qu'il n'en résulterait aucune inégalité semblable à celle que nous considérons : on aura donc ainsi

$$\delta R = 2m^2 H e\delta e + 2m^2 H' \gamma\delta\gamma.$$

En substituant dans cette expression pour $e\delta e$ et $\gamma\delta\gamma$ leurs valeurs, on trouve que la fonction $R + \delta R$ contient le terme suivant :

$$\left[1 - \frac{2m^2(H - H')}{g - c}\right] m^2 P e^2 \gamma^2 \cos(2gt - 2ct).$$

Or, on a, n° 95, $g - c = 2m^2(H - H')$; l'inégalité à *longue période* dépendante de l'angle $2\omega - 2\theta$ disparaît donc d'elle-même de l'expression de R. La même analyse peut s'étendre à toutes les inégalités du même genre, et par conséquent la fonction R ne renferme dans l'ordre m^2 aucune inégalité dont l'argument soit indépendant à la fois des moyens mouvemens de la Lune et du Soleil. On peut aisément en conclure, par la seule inspection de l'équation (4), n° 1, que l'expression du *rayon vecteur*, et par conséquent celle de la fonction $\frac{1}{r}$, ne peuvent contenir aucune inégalité de la même espèce, dans cet ordre de quantités, puisque les fonctions $\int d'R$ et $r\frac{dR}{dr}$ n'en renferment pas.

Il est essentiel de remarquer que cette indépendance de la fonction R, relativement aux inégalités à *longue période*, ne s'étend pas à l'approximation suivante, et cette différence la distingue essentiellement de la fonction $\int d'R$ qui jouit seule, comme nous l'avons démontré n° 91, de la propriété de ne renfermer aucune inégalité du même genre, ni dans l'ordre m^2, ni dans l'ordre m^3. En effet, nous avons vu, n° 14, qu'on avait généralement

$$\int d'R = R - \int\left(\frac{dR}{dr'}dr' + \frac{dR}{dv'}dv'\right);$$

il résulte donc de ce qui précède qu'on peut supposer $\int d'R = R$ relativement aux inégalités à longues périodes, tant qu'on se borne à considérer les termes de l'ordre m^2, et la fonction $\int\left(\frac{dR}{dr'}dr' + \frac{dR}{dv'}dv'\right)$ ne produit par conséquent dans cet ordre aucune inégalité de cette espèce. Mais les termes de l'ordre m^3 qu'elle peut contenir font qu'il n'est plus permis de supposer l'existence de l'équation $\int d'R = R$ lorsqu'on veut avoir égard aux quantités de l'ordre m^3 dans le calcul des inégalités à longues périodes; c'est cependant ce qu'a fait Laplace dans son Mémoire inséré à la *Connaissance des Temps* pour 1824, et dans le livre XVI de la *Mécanique céleste;* et c'est à cette fausse supposition, comme je l'ai fait voir ailleurs (*), que sont dues principalement les incorrections qui lui sont échappées dans le calcul des inégalités à *longues périodes* qu'il a déterminées.

De l'inégalité lunaire en longitude qui dépend du double de la distance angulaire du périgée de l'orbite à son nœud.

101. Cette inégalité a pour argument l'angle $2\varphi - 2\eta$, ou $2\omega - 2\theta$, qui ne varie que par les déplacemens du périgée et des nœuds de l'orbe lunaire; elle se trouve comprise par conséquent dans la classe des inégalités que nous avons nommées à *longues périodes*.

Nous emploierons, pour la déterminer, la formule (F) du n° 78, dont la disposition est très-avan-

(1) Voir *Connaissance des Temps,* 1840.

tageuse pour le calcul des inégalités de cette espèce. En observant qu'on peut, dans ce cas, omettre le terme $\frac{2d^2 . r\delta r}{dt^2}$, parce qu'étant une différentielle du second ordre, les inégalités à longues périodes qui en dépendent seraient au moins de l'ordre m^4, et ne s'abaisseraient par conséquent par l'intégration qu'à l'ordre m^2, quantités que nous négligeons; en se rappelant qu'on peut supposer de plus, dans cet ordre d'approximation, $\int d'\text{R} = 0$ (*), d'après le théorème général, n° 91, on aura

$$\left.\begin{aligned} \frac{d.\delta v}{dt} = & -\frac{d.(dr\,\delta r)}{hdt^2} - \frac{1}{h}\left[2\delta.\left(r\frac{d\text{R}}{dr}\right) - \frac{\delta r}{r}\left(r\frac{d\text{R}}{dr}\right) + \frac{d.\delta v}{dt}\int\left(\frac{d\text{R}}{dv}\right)dt\right] \\ & + \frac{hs^2}{2r^2} - \frac{r^2ds^2}{2hdt^2} + \frac{s^2}{r^2}\int\left(\frac{d\text{R}}{dv}\right)dt + \frac{s^2}{2hr^2}\left[\int\left(\frac{d\text{R}}{dv}\right)dt\right]^2, \end{aligned}\right\}(f)$$

la caractéristique δ se rapportant, dans cette formule, aux quantités dépendantes du carré γ^2 de la tangente de l'inclinaison de l'orbe lunaire à l'écliptique, inclinaison que nous supposerons assez petite pour qu'on puisse négliger les puissances de γ supérieures à la seconde.

Développons le second membre de l'équation (f), en n'ayant égard qu'aux inégalités dépendantes de l'angle $2\varphi - 2\eta$, et en portant la précision jusqu'aux quantités de l'ordre m^3.

En supposant $\delta r = -\delta\frac{1}{r}$, l'expression de δr con-

(*) Nous avons vérifié cette équation relativement à l'inégalité dépendante de l'argument $2\varphi - 2\eta$ par un calcul direct, et de deux manières différentes, dans un Mémoire inséré à la *Connaissance des Temps* pour 1840.

tiendra, n° 72, le terme $\left(\frac{5}{8}-\frac{135}{64}m\right)e\gamma^2\cos(\varphi-2\eta)$; on a d'ailleurs, par les formules du mouvement elliptique, $r=-e\cos\varphi$, et, par suite, $dr=dt\,e\sin\varphi$; par la combinaison de ces deux termes on trouve

$$\frac{dr\,\delta r}{dt}=\left(\frac{5}{16}-\frac{135}{128}m\right)e^2\gamma^2\sin(2\varphi-2\eta).$$

Si l'on différentie cette valeur, en observant que $d\varphi-d\eta=(c-g)dt$, et qu'en vertu des valeurs de c et g, nos 24 et 41, on a

$$c-g=-\frac{3}{2}m^2-\frac{27}{4}m^3,$$

on trouvera

$$-\frac{d.(dr\,\delta r)}{dt^2}=\left(\frac{15}{16}m^2-\frac{135}{128}m^3\right)e^2\gamma^2\cos(2\varphi\underset{(13)}{-}2\eta). \qquad (a)$$

La fonction R, développée de la manière indiquée n° 65, en n'ayant égard qu'à l'argument que nous considérons, a donné (*)

$$\delta R=\left[(0)m^2-\frac{405}{128}m^3\right]e^2\gamma^2\cos(2\varphi\underset{(13)}{-}2\eta).$$

De cette valeur on conclura celle de la fonction de $\delta.\left(r\frac{dR}{dr}\right)$ au moyen de l'équation $r\frac{dR}{dr}=2R$.

L'expression de R, n° 16, en vertu de la même équation, donne

$$-\left[r\frac{dR}{dr}\right]=-\frac{m^2}{2}+\left(m^2+\frac{135}{16}m^3\right)e\cos\varphi+\frac{9}{2}m^2e\cos(2\xi-\varphi)$$
$$-\frac{15}{4}m^2e^2\cos(2\xi-2\varphi).$$

(*) Voir la *Connaissance des Temps* pour 1840, et les *Comptes rendus de l'Académie*, 1837, 1er semestre (t. IV, n° 8, p. 280).

D'après la valeur de $\delta\frac{1}{r}$, nos 15 et 26, en supposant $r = 1 - e\cos\varphi$, on formera la suivante

$$r\delta\frac{1}{r} = \left(-\frac{5}{8}+\frac{135}{64}m\right)e\gamma^2\cos(\varphi-2\eta)+\left(\frac{5}{16}-\frac{135}{128}m\right)e^2\gamma^2\cos(2\varphi-2\eta)$$
$$-\frac{33}{64}me\gamma^2\cos(2\xi+\varphi-2\eta)-\frac{225}{128}me^2\gamma^2\cos(2\xi-2\varphi+2\eta)$$
$$-\frac{99}{128}me^2\gamma^2\cos(2\xi+2\varphi-2\eta).$$

Par la combinaison de ces deux expressions, en observant que $r\delta\frac{1}{r} = -\frac{\delta r}{r}$, on trouve

$$\frac{\delta r}{r}\left(r\frac{dR}{dr}\right) = \left\{\begin{array}{l} \left(-\frac{5}{32}-\frac{5}{16}=-\frac{15}{32}\right)m^2 \\ +\left(\begin{array}{l}\frac{135}{128}-\frac{675}{256}-\frac{297}{256}+\frac{135}{256} \\ +\frac{675}{512}+\frac{297}{512}=-\frac{81}{256}\end{array}\right)m^2\end{array}\right\}e^2\gamma^2\cos(2\varphi-2\eta). \quad (12)$$

L'expression de δv, nos 29 et 30, en la différentiant, donnera

$$\frac{d.\delta v}{dt} = -\frac{\gamma^2}{2}\cos 2\eta-\frac{3}{4}e\gamma^2\cos(\varphi-2\eta)-\frac{9}{8}me\gamma^2\cos(2\xi-2\eta)$$
$$-\frac{45}{16}me\gamma^2\cos(2\xi-\varphi+2\eta)-\frac{33}{32}me\gamma^2\cos(2\xi+\varphi-2\eta)$$
$$-\frac{15}{4}me^2\gamma^2\cos(2\xi-2\varphi+2\eta)-\frac{45}{16}me^2\gamma^2\cos(2\xi+2\varphi-2\eta).$$

On a d'ailleurs, no 18,

$$\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt = -\frac{135}{16}m^2e\cos\varphi-\frac{45}{8}m^2e^2\cos 2\varphi$$
$$+\frac{3}{4}m^2\cos 2\xi-\frac{9}{2}m^2e\cos(2\xi-\varphi)+\frac{m^2}{2}e\cos(2\xi+\varphi)$$
$$-\frac{15}{8}me^2\cos(2\xi-2\varphi).$$

En combinant ces deux expressions, on en conclut

$$\frac{d.\delta v}{dt}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt = \left(\begin{array}{l}\frac{405}{128}+\frac{45}{32}-\frac{45}{32}-\frac{135}{128}+\frac{297}{128} \\ -\frac{45}{64}+\frac{135}{128}=\frac{153}{32}\end{array}\right)m^2e^2\gamma^2\cos(2\varphi-2\eta). \quad (13)$$

En rassemblant les trois termes que nous venons de trouver, et en supposant $h = 1$, on aura

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{1}{h}\left[2\delta.r\frac{dR}{dr} - \frac{\delta r}{r}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \frac{d.\delta v}{dt}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt\right] \\ = \left[-\frac{15}{32}m^2 + \left(\frac{405}{32} - \frac{81}{256} - \frac{153}{32} = \frac{1935}{256}\right)m^3\right] e^2\gamma^2 \cos\underset{(21)}{(2\varphi - 2\eta)}. \end{array}\right\} (b)$$

D'après les valeurs de s et de $\delta\frac{1}{r}$, n°s 38, 44, 15 et 26, j'ai trouvé (*)

$$\frac{hs^2}{2r^2} - \frac{r^2 ds^2}{2h dt^2} = \left(\frac{33}{128}m^2 + \frac{333}{256}m^3\right) e^2\gamma^2 \cos(2\varphi - 2\eta). \qquad (c)$$

La valeur de s^2, n° 73, donne d'ailleurs

$$\begin{aligned} s^2 = &-\frac{\gamma^2}{2}\cos 2\eta + e\gamma^2\cos(\varphi - 2\eta) + \left(\frac{3}{8}m + \frac{25}{32}m^2\right)\gamma^2\cos(2\xi - 2\eta) \\ &- \frac{15}{8}me\gamma^2\cos(2\xi - \varphi + 2\eta) + \frac{135}{64}me^2\gamma^2\cos(2\xi - 2\varphi + 2\eta) \\ &- \frac{15}{64}me^2\gamma^2\cos(2\xi + 2\varphi - 2\eta), \end{aligned}$$

et l'on a, n° 28,

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt = &-\frac{225}{32}m^2 e\cos\varphi - \frac{915}{64}m^2e^2\cos 2\varphi \\ &+ \frac{3}{4}m^2\cos 2\xi + \frac{5}{4}m^2 e\cos(2\xi + \varphi) \\ &- \left(\frac{15}{8}m + \frac{159}{32}m^2\right)e^2\cos(2\xi - 2\varphi). \end{aligned}$$

En combinant ces deux expressions, on trouve

$$\frac{s^2}{r^2}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt = \left(-\frac{45}{128}m^2 - \frac{531}{256}m^3\right) e^2\gamma^2\cos\underset{(22)}{(2\varphi - 2\eta)}. \qquad (d)$$

La fonction $\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt$, n° 17, contient les termes suivans :

$$\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt = \frac{3}{4}m^2\cos 2\xi - \frac{15}{8}me^2\cos(2\xi - 2\varphi);$$

(*) *Connaissance des Temps* pour 1840. (*Additions*, p. 35.)

d'où l'on conclut

$$\left[\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt\right]^2 = -\frac{45}{32}m^2 e^2 \cos 2\varphi.$$

L'expression de s^2 contient le terme $-\frac{1}{2}\gamma^2 \cos 2\eta$; en combinant ces deux quantités, et en supposant $h = 1$, on aura donc

$$\frac{s^2}{2hr^2}\left[\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt\right]^2 = \frac{45}{256}m^2 e^2 \gamma^2 \cos(2\varphi - 2\eta). \qquad (e)$$

En substituant les valeurs (a), (b), (c), (d), (e) à la place des quantités qu'elles représentent dans la formule (f), on trouve enfin

$$d.\delta v = dt \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{15}{16} - \frac{15}{32} + \frac{33}{128} - \frac{45}{128} = \frac{3}{8}\right) \\ + \left(\begin{array}{l} \frac{135}{128} + \frac{1935}{256} + \frac{333}{256} - \frac{531}{256} \\ + \frac{45}{256} = \frac{513}{64} \end{array} \right) m \end{array} \right\} m^2 e^2 \gamma^2 \cos(2\varphi - 2\eta),$$
(23)

d'où, en observant que l'on a $2\varphi - 2\eta = (2c - 2g)t + 2\omega - 2\theta$, et que les valeurs de c et g, n°s 24 et 41, donnent

$$\frac{1}{2c - 2g} = -\frac{1}{3m^2}\left(1 - \frac{9}{2}m\right),$$

en intégrant, on conclut

$$\delta v = \left(\frac{1}{8} + \frac{135}{64}m\right) e^2 \gamma^2 \sin(2\eta - 2\varphi).$$
(23)

Cette inégalité est l'une de celles qui ont le plus occupé les géomètres, sans doute à cause des difficultés que présentait sa détermination. Masson l'introduisit le premier dans les *Tables de la Lune*, en dé-

terminant son coefficient par l'observation; mais Euler (*), d'Alembert et Mayer firent des tentatives infructueuses pour la calculer par la théorie, et les résultats qu'ils obtinrent différaient tellement des observations, que Mayer fut forcé de renoncer à la faire entrer dans ses Tables. La valeur que nous avons trouvée pour le coefficient de cette inégalité s'accorde avec celle à laquelle M. Plana est parvenu par une voie très-différente et beaucoup plus pénible dans sa *Théorie de la Lune*. L'exactitude de ce résultat est donc désormais hors de doute. La valeur que M. Damoiseau a obtenue pour le coefficient dont il s'agit (**) ne s'accordant pas avec la nôtre, il est évident que cet astronome aura omis quelques-unes des combinaisons qui devaient servir à sa formation. Quant au résultat obtenu par Laplace dans la *Connaissance des Temps* pour 1824, il est en désaccord avec celui que nous avons trouvé dès son premier terme; j'ai fait voir ailleurs (***) que cette différence tenait principalement à l'extension que Laplace a cru pouvoir donner, relativement à la fonction R, à la propriété dont jouit exclusivement la fonction $\int d'R$, d'être indépendante

(*) C'est à cette inégalité surtout qu'Euler paraît faire allusion lorsque, après avoir déclaré qu'il est obligé d'omettre dans sa théorie une certaine classe d'inégalités dont l'exacte détermination ne lui a pas été possible, il ajoute : *Interim tamen in gratiam theoriæ, maxime esset optandum ut exercitati calculatores hunc laborem in se susciperent, atque omnia momenta ad majorem adcurationis gradum determinarent.* (*Theoria Lunæ*, édit. 1772, Préf.)

(**) *Mémoires de l'Institut. — Savans étrangers*, tome Ier.

(***) *Connaissance des Temps* pour 1840.

de toute inégalité à longue période lorsqu'on néglige les quantités de l'ordre m^4 dans l'expression de ses coefficiens. M. Plana, en comparant son résultat à celui de ce grand géomètre, a bien reconnu l'erreur de ce dernier, mais il n'en a pas indiqué la véritable cause; il s'égare même dans cette controverse jusqu'à contester (*) l'exactitude de la propriété remarquable qui caractérise la fonction $\int d'R$, non-seulement par rapport aux *inégalités à longue période*, mais encore par rapport à toutes les inégalités qui ne renferment pas le moyen mouvement de la Lune dans leur argument; c'est une *erreur grave* qui aurait dû disparaître depuis longtemps d'un ouvrage qui mérite, sous d'autres rapports, toute l'estime des géomètres (**).

De l'inégalité à longue période dépendante de la distance angulaire du périgée du Soleil à celui de la Lune.

102. Cette inégalité a pour argument l'angle $\omega - \omega'$, ou $t - \varphi - \varphi'$; elle est comprise par conséquent parmi celles qui dépendent de la parallaxe solaire, et que nous avons développées n° 30. Nous emploierons à sa détermination les formules des variations des élémens elliptiques, pour donner un exemple de l'application de cette méthode à la recherche qui nous occupe.

On peut, dans ce cas, réduire la valeur de la

(*) Plana, *Théorie de la Lune*, vol. Ier, pag. 136, 137, etc.

(**) Voir ce que j'ai dit à ce sujet, *Conn. des Temps* pour 1840, et les Notes à la fin de ce volume.

fonction R, n° 3, aux termes suivans :

$$R = \frac{m'r^2}{4r'^3}[1 + 3\cos(2v - 2v')]$$
$$+ \frac{m'r^3}{8r'^4}[3\cos(v - v') + 5\cos(3v - 3v')].$$

Considérons d'abord la première partie de cette expression. Pour avoir les termes dépendans de la parallaxe du Soleil qui en peuvent résulter dans R, il faut, à la place de r et v, substituer les termes de leurs valeurs qui dépendent de cette même parallaxe, ou qui sont multipliés par le facteur $\frac{a}{a'}$. En désignant donc par la caractéristique δ ce facteur et les quantités qui en dépendent, et en faisant

$$R_1 = \frac{m'r^2}{4r'^3}[1 + 3\cos(2v - 2v')],$$

on aura

$$\delta R_1 = -\left[r\frac{dR_1}{dr}\right] r\,\delta\frac{1}{r} + \left[\frac{dR}{dv}\right]\delta v.$$

Les quantités entourées de parenthèses sont indépendantes de la parallaxe $\frac{a}{a'}$; la fonction R_1 étant multipliée par r^2, on a d'ailleurs $r\frac{dR_1}{dr} = 2R_1$. Cela posé, d'après le développement de R, n° 6, et les valeurs de $\delta\frac{1}{r}$ et de δv, n°s 26 et 30, on a

$$-\left[r\frac{dR_1}{dr}\right] = -\frac{m^2}{2} + \left(m^2 + \frac{135}{16}m^3\right) e\cos\varphi$$
$$-\frac{3}{2}m^2 e'\cos\varphi' + \frac{3}{2}m^2 ee'\cos(\varphi - \varphi')$$
$$-\frac{3}{2}m^2\cos 2\xi + \frac{9}{2}m^2 e\cos(2\xi - \varphi) + \frac{3}{4}m^2 e'\cos(2\xi + \varphi')$$
$$-\frac{9}{4}m^2 ee'\cos(2\xi - \varphi + \varphi');$$

$$r\delta\frac{1}{r}=-\frac{15}{16}m\frac{a}{a'}\cos\xi+\frac{15}{32}m\frac{a}{a'}e\cos(\xi-\varphi)-\frac{45}{32}m\frac{a}{a'}e\cos(\xi+\varphi)$$
$$+\frac{15}{16}m\frac{a}{a'}e'\cos(\xi-\varphi')+\left(\frac{5}{4}-\frac{45}{8}m\right)\frac{a}{a'}e'\cos(\xi+\varphi')$$
$$-\left(\frac{5}{8}-\frac{45}{16}m\right)\frac{a}{a'}ee'\cos(\xi-\varphi+\varphi')+\frac{45^{(*)}}{32}m\frac{a}{a'}ee'\cos(\xi+\varphi-\varphi')$$
$$+\frac{225^{(*)}}{64}m\frac{a}{a'}ee'\cos(3\xi-\varphi+\varphi');$$

$$\frac{d\mathrm{R}}{dv}=\frac{135}{16}m^2e\sin\varphi$$
$$-\frac{3}{2}m^2\sin 2\xi+\frac{9}{2}m^2e\sin(2\xi-\varphi)$$
$$+\frac{3}{4}m^2e'\sin(2\xi+\varphi')-\frac{9}{4}m\,ee'\sin(2\xi-\varphi+\varphi');$$

$$\delta v=-\frac{15}{8}m\frac{a}{a'}\sin\xi-\frac{75}{32}m\frac{a}{a'}e\sin(\xi+\varphi)+\frac{15}{8}m\frac{a}{a'}e'\sin(\xi-\varphi')$$
$$+\frac{5}{2}\frac{a}{a'}e'\sin(\xi+\varphi')+\frac{75^{(*)}}{32}m\frac{a}{a'}ee'\sin(\xi+\varphi-\varphi')$$
$$+\frac{375^{(*)}}{64}m\frac{a}{a'}ee'\sin(3\xi-\varphi+\varphi').$$

En combinant entre elles ces valeurs, et en n'ayant égard qu'aux termes qui dépendent de l'angle $\xi-\varphi+\varphi'$, on aura

$$-\left[r\frac{d\mathrm{R}_1}{dr}\right]r\delta\frac{1}{r}=\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{5}{16}+\frac{5}{8}=\frac{15}{16}\right)\\ +\left\{\begin{array}{l}-\frac{45}{32}-\frac{45}{16}+\frac{675}{128}-\frac{45}{128}\\ -\frac{45}{64}-\frac{135}{128}-\frac{675}{256}+\frac{135}{64}\\ -\frac{135}{256}+\frac{135}{128}=-\frac{135}{128}\end{array}\right\}m\end{array}\right\}m^2\frac{a}{a'}ee'\cos(\xi-\varphi+\varphi'),.$$

(*) Les termes dépendans des argumens $\xi+\varphi-\varphi'$ et $3\xi-\varphi+\varphi'$ n'ont point été compris dans les valeurs de $\delta\frac{1}{r}$ et de δv, n°s 15 et 29, à cause de leur petitesse; on en trouvera le calcul dans le chapitre V, qui servira de supplément aux chapitres III et IV.

$$\left[\frac{dR}{dv}\right]\delta v = \left(\begin{array}{l}\frac{675}{64}-\frac{225}{128}-\frac{1125}{256}+\frac{135}{32}-\frac{225}{256}\\ +\frac{135}{64}=\frac{315}{32}\end{array}\right) m^2 \frac{a}{a'} e e' \cos(\xi - \varphi + \varphi'),$$

et par suite

$$\delta R_1 = \left[\frac{15}{16} + \left(-\frac{135}{128}+\frac{315}{32}=\frac{1125}{128}\right) m\right] m^2 \frac{a}{a'} e e' \cos(\xi - \varphi + \varphi'). \quad (78)$$

Développons de même la seconde partie de la fonction R. On peut supprimer le terme dépendant de l'angle $3v - 3v'$, qui ne donnerait aucune inégalité du genre de celles que nous considérons; en désignant par R_2 cette partie de R, on aura ainsi

$$R_2 = \frac{3m' r^3}{8r'^4} \cos(v - v').$$

Cette fonction dépendant déjà de la parallaxe solaire, il suffira de remplacer r, v, r' et v' par les parties de leurs valeurs indépendantes de cette parallaxe. Si l'on substitue d'abord pour r, v, r' et v' leurs valeurs elliptiques, ce qui donne, nos 4 et 5, en négligeant le carré des excentricités,

$$r = 1 - e\cos\varphi, \quad v = t + \varepsilon + 2e\sin\varphi,$$
$$\frac{r'}{a'} = 1 - e'\cos\varphi', \quad v' = mt + \varepsilon' + 2e'\sin\varphi',$$

on aura, n° 6, dans R_2 le terme

$$-\frac{15}{16} m^2 \frac{a}{a'} e e' \cos(\xi - \varphi + \varphi').$$

Pour porter la précision jusqu'aux quantités de l'ordre m^3, observons qu'en faisant croître r et v de leurs variations $\delta' r$, $\delta' v$, la caractéristique δ' se rap-

portant uniquement à des termes indépendans de la parallaxe solaire, on aura

$$R_2 = -\left(r\frac{dR_2}{dr}\right) r\delta'\frac{1}{r} + \left(\frac{dR_2}{dv}\right)\delta' v.$$

La fonction R_2 étant d'ailleurs multipliée par le facteur r^3, on a $r\frac{dR_2}{dr} = 3R_2$. Cela posé, d'après le développement effectué n° 6, et les valeurs de $\delta\frac{1}{r}$ et δv, n°s 26 et 30, on trouve

$$r\frac{dR}{dr} = -\frac{9}{8}m^2\frac{a}{a'}\cos\xi - \frac{27}{8}m^2\frac{a}{a'}e'\cos(\xi - \varphi'),$$

$$r\delta'\frac{1}{r} = \frac{21}{8}mee'\cos(\varphi - \varphi') + \frac{15}{8}me\cos(2\xi - \varphi)$$
$$-\frac{15}{8}mee'\cos(2\xi - \varphi + \varphi'),$$

$$\frac{dR}{dv} = -\frac{3}{8}m^2\frac{a}{a'}\sin\xi + \frac{15}{16}m^2\frac{a}{a'}e\sin(\xi - \varphi) - \frac{9}{8}m^2\frac{a}{a'}e'\sin(\xi - \varphi'),$$

$$\delta' v = -3me'\sin\varphi' + \frac{21}{4}mee'\sin(\varphi - \varphi') + \frac{15}{4}me\sin(2\xi - \varphi)$$
$$-\frac{15}{4}mee'\sin(2\xi - \varphi + \varphi').$$

La combinaison de ces valeurs, en négligeant les termes indépendans de l'angle $\xi - \varphi + \varphi'$, donnera

$$R_2 = \left(\begin{array}{l} -\frac{189}{128} + \frac{135}{128} - \frac{405}{128} - \frac{63}{64} + \frac{45}{64} + \frac{45}{32} - \frac{135}{64} \\ = -\frac{585}{128} \end{array}\right) m^3\frac{a}{a'}ee'\cos(\xi - \underset{(78)}{\varphi} + \varphi').$$

En rassemblant les différens termes que nous venons de trouver, on aura donc

$$R_1 = \left(\frac{15}{16}m^2 + \frac{1125}{128}m^3\right)\frac{a}{a'}ee'\cos(\xi - \underset{(78)}{\varphi} + \varphi'),$$

$$R_2 = -\left(\frac{15}{16}m^2 + \frac{585}{128}m^3\right)\frac{a}{a'}ee'\cos(\xi - \underset{(78)}{\varphi} + \varphi');$$

d'où, en observant que l'on a, n° 16, $\delta R = R_1 + R_2$ et $\delta . r\frac{dR}{dr} = 2R_1 + 3R_2$, on conclut

$$\delta R = \begin{bmatrix} \left(\frac{15}{16} - \frac{15}{16} = 0\right) \\ + \left(\frac{1125}{128} - \frac{585}{128} = \frac{135}{32}\right) m \end{bmatrix} m^2 \frac{a}{a'} ee' \cos\left(\xi - \underset{(78)}{\varphi} + \varphi'\right),$$

$$\delta . r\frac{dR}{dr} = \begin{bmatrix} \left(\frac{15}{8} - \frac{45}{16} = -\frac{15}{16}\right) \\ + \left(\frac{1125}{64} - \frac{1755}{128} = \frac{495}{128}\right) m \end{bmatrix} m^2 \frac{a}{a'} ee' \cos\left(\xi - \underset{(78)}{\varphi} + \varphi'\right).$$

Reprenons maintenant la formule (2), n° 87, qui détermine la variation différentielle de la longitude de l'époque. En différentiant par rapport à la caractéristique δ, et en n'ayant égard qu'à la première puissance des excentricités, on aura

$$d . \delta \varepsilon = -2dt . \delta . a^2 n \frac{dR}{da} + \frac{dt}{2} \delta . an \left(e \frac{dR}{de}\right).$$

On a d'ailleurs

$$\delta . a^2 n \frac{dR}{da} = \delta an . \left(a \frac{dR}{da}\right) + an\delta . \left(a \frac{dR}{da}\right),$$

$$\delta . an \left(e \frac{dR}{de}\right) = \delta an . \left(e \frac{dR}{de}\right) + an\delta . \left(e \frac{dR}{de}\right).$$

Les variations δa, δn ne renfermant aucune inégalité qui puisse s'abaisser par l'intégration, n° 90, les termes $\delta an . \left(a \frac{dR}{da}\right)$, $\delta an . \left(e \frac{dR}{de}\right)$ ne produiront que des inégalités de l'ordre m^4 que nous négligeons; on peut donc faire abstraction de ces termes, et, en supposant comme précédemment, $a = 1$, $n = 1$, on aura

simplement

$$d.\delta\epsilon = -2dt\,\delta.\left(a\frac{dR}{da}\right) + \frac{dt}{2}\,\delta.\left(e\frac{dR}{de}\right). \qquad (p)$$

La valeur de $\delta.\left(a\frac{dR}{da}\right)$ est facile à déterminer par ce qui précède, puisqu'on a généralement, n° 6, $a\frac{dR}{da} = r\frac{dR}{dr}$. Quant à la valeur de $\delta.\left(e\frac{dR}{dc}\right)$, nous observerons que, la caractéristique δ se rapportant uniquement aux variations relatives à la parallaxe du Soleil dont nous négligeons le carré, on a

$$\delta.\left(e\frac{dR}{de}\right) = \delta.\left(e\frac{dR_1}{de}\right) + e\frac{dR_2}{de}.$$

On peut substituer R_2 à la place de $e\frac{dR_2}{de}$ dans cette équation. En effet, supposons la fonction que R_2 représente, développée en série ordonnée par rapport aux puissances de l'excentricité e, et en négligeant les puissances de e supérieures au carré, soit

$$R_2 = m^2K + m^2K_1e + m^2K_2e^2,$$

d'où l'on tire

$$e\frac{dR_2}{de} = m^2K_1e + 2m^2K_2e^2.$$

La quantité m^2K ne produit par sa variation que des termes dépendans de δa, c'est-à-dire de l'ordre m^4, puisque δa ne peut renfermer aucune inégalité susceptible de s'abaisser à l'ordre m par l'intégration. La quantité $m^2K_2e^2$ ne produit par sa variation aucun terme de l'ordre m^3 dépendant de l'argument $\xi-\varphi+\varphi'$; en effet, cette fonction renferme le terme

$$m^2e^2\cos(\xi-2\varphi) \text{ ou } m^2e^2\cos(\xi-2ct-2\varepsilon+2\omega)$$

qui, par la variation des élémens elliptiques, produit les suivans

$$2m^2 e\delta e\cos(\xi-2ct-2\varepsilon+2\omega)-2m^2e^2\delta\omega\sin(\xi-2ct-2\varepsilon+2\omega).$$

Il est inutile de faire varier a et ε, parce que les termes qui en résulteraient seraient de l'ordre e^2. Pour que la quantité $2m^2\,e\delta\,e\cos(\xi-2ct-2\varepsilon+2\omega)$ produise un terme de l'ordre m^2, il faudra considérer dans l'expression différentielle de δe des termes susceptibles de s'abaisser à l'ordre m par l'intégration; or, d'après le développement de R, ces termes doivent évidemment dépendre des argumens $2\xi-2\varphi$, $2\xi-2\varphi-\varphi'$, $2\xi-2\varphi+\varphi'$, qui, par leur combinaison avec l'angle $\xi-2\varphi$, ne produiront aucune inégalité du genre de celle que nous considérons; le même raisonnement s'applique à la quantité $-2m^2e^2\delta\omega\sin(\xi-2ct-2\varepsilon+2\omega)$ et s'étendra aisément aux différens termes que contient la fonction $m^2\,K_2e^2$; on peut donc, lorsqu'on néglige les quantités d'un ordre supérieur à m^2 et qu'on ne considère que l'inégalité dépendante de l'angle $\xi-\varphi+\varphi'$, supposer $R_2=m^2\,K_1e$; $e\dfrac{dR_2}{de}=m^2K_1e$, et par conséquent $e\dfrac{dR_2}{de}=R_2$. On aura donc ainsi

$$\delta.\left(e\frac{dR}{de}\right)=\delta.\left(e\frac{dR_1}{de}\right)+R_2.$$

Supposons qu'en négligeant les puissances de l'excentricité e supérieures à la seconde, l'expression de R_1 en série ordonnée par rapport aux puissances ascendantes de e, soit

$$R_1=m^2H+m^2H_1e+m^2H_2e''^2,$$

on aura

$$e\frac{dR_1}{de} = m^2H_1e + 2m^2H_2e^2;$$

d'où, en différentiant par rapport à la caractéristique δ relative à la parallaxe solaire, on conclut

$$\delta R_1 = m^2\delta H + m^2\delta.H_1e + 2m^2\delta.H_2e^2,$$

$$\delta.e\frac{dR_1}{de} = m^2\delta.H_1e + 2m^2\delta.H_2e^2.$$

On s'assurera, comme on l'a fait pour m^2K, que la quantité m^2H ne peut engendrer par sa variation que des inégalités de l'ordre m^4. La quantité m^2H_1e ne produit non plus, par sa variation, aucune inégalité semblable à celle que nous considérons. En effet, la fonction R, développée en série n° 6, contient un terme de la forme M cos 2ξ ou M cos $(2t - 2mt + 2\varepsilon - 2\varepsilon')$; ce terme, à raison de la variation de ε, produit dans δR le suivant $-2M\delta\varepsilon \sin(2t - 2mt + 2\varepsilon - 2\varepsilon')$: pour qu'il en résulte un terme dépendant de l'angle $\xi - \varphi + \varphi'$ dans R, il faut considérer dans $\delta\varepsilon$ le terme dépendant de l'angle $t - mt + \varphi - \varphi'$; or ce terme ne produit qu'une inégalité périodique dépendante du moyen mouvement de la Lune et par conséquent de l'ordre m^2; il n'en résulte donc dans $m^2\delta.H_1e$ qu'un terme de l'ordre m^4. De même, la quantité m^2H_1e contient encore un terme de la forme $m^2Ne\cos(2\xi - \varphi)$, ou bien $m^2Ne\cos(t - 2mt + \varepsilon - \omega)$; ce terme, par la variation des élémens elliptiques, produit dans $m^2\delta.H_1e$ les suivans

$$m^2N\delta e\cos(t - 2mt + \varepsilon - \omega) + m^2N(\delta\varepsilon - \delta\omega)\sin(t - mt + \varepsilon - \omega),$$

ou bien, d'après la notation que nous avons adoptée

n° 6,

$$m^2 N \delta e \cos(2\xi - \varphi) + m^2 N(\delta\varepsilon - \delta\omega) \sin(2\xi - \varphi).$$

Pour qu'il puisse résulter de ces termes dans δR_1 des termes dépendans de l'angle $\xi - \varphi + \varphi'$, il faut substituer à la place de δe, $\delta\varepsilon$, $\delta\omega$ les termes de ces valeurs qui dépendent de l'argument $\xi - \varphi'$; or ces termes, ne s'abaissant pas par l'intégration, sont nécessairement de l'ordre m^2, et il n'en peut résulter par conséquent dans δR que des inégalités de l'ordre m^4. On étendrait aisément le même raisonnement à tous les termes dont se compose la quantité $m^2 H_1 e$. En négligeant donc les termes de l'ordre m^4 et en n'ayant égard qu'à l'inégalité dépendante de l'angle $\xi - \varphi + \varphi'$, on peut supposer

$$\delta R_1 = m^2 \delta . H_2 e^2, \quad \delta . e \frac{dR_1}{de} = 2m^2 \delta . H_2 e^2,$$

et par conséquent

$$\delta . e \frac{dR_1}{de} = 2\delta R_1.$$

On aura ainsi

$$\delta . \left(e \frac{dR}{de}\right) = 2\delta R_1 + R_2.$$

Mais les valeurs précédentes, $\delta R = R_1 + R_2$ et $\delta . r \frac{dR}{dr} = 2R_1 + 3R_2$, donnent $4\delta R - \delta . r \frac{dR}{dr} = 2\delta R_1 + R_2$; on aura donc

$$\delta . \left(e \frac{dR}{de}\right) = 4\delta R - \delta . r \frac{dR}{dr}.$$

Si l'on substitue maintenant pour $\delta . \left(a \frac{dR}{da}\right)$ et $\delta . \left(e \frac{dR}{de}\right)$ leurs valeurs dans l'équation (p), on trou-

vera

$$\delta\epsilon = 2dt\left(\dot{\delta}\mathrm{R} - \frac{5}{4}\,\delta.r\,\frac{d\mathrm{R}}{dr}\right).$$

Cette équation, en remplaçant $\delta\mathrm{R}$ et $\delta.r\,\frac{d\mathrm{R}}{dr}$ par leurs valeurs numériques calculées plus haut, donnera

$$d\epsilon = m^2\,dt\left[\frac{75}{32} + \left(\frac{135}{16} - \frac{2475}{256} = -\frac{315}{256}\right)m\right]\frac{a}{a'}\,ee'\cos(\xi - \underset{(78)}{\varphi} + \varphi'),$$

d'où, en intégrant, et en observant que l'angle $\xi - \varphi + \varphi'$ est égal à $(1 - c)t + \omega - \omega'$, on tire

$$\delta\epsilon = \frac{m^2}{1-c}\left(\frac{75}{32} - \frac{315}{256}m\right)\frac{a}{a'}\,ee'\sin(\xi - \underset{(78)}{\varphi} + \varphi').$$

On a d'ailleurs, en négligeant les quantités de l'ordre m^4, d'après la valeur de c, n° 24,

$$\frac{1}{1-c} = \frac{4}{3m^2}\left(1 - \frac{75}{8}m\right).$$

On aura donc enfin

$$\delta\epsilon = \left(\frac{25}{8} - \frac{495}{16}m\right)\frac{a}{a'}\,ee'\sin(\xi - \underset{(78)}{\varphi} + \varphi').$$

On peut aisément s'assurer que cette inégalité est la seule dépendante de l'angle $\xi - \varphi + \varphi'$, qui entre dans l'expression de la longitude lorsqu'on néglige les quantités de l'ordre m^2 dans son coefficient. En effet, en nommant v la longitude de la Lune dans le plan de son orbite, on a, par les formules du mouvement elliptique, n° 4,

$$v = nt + \varepsilon + 2e\sin(nt + \varepsilon - \omega) + \text{etc.}$$

On aura la valeur de la longitude v dans l'orbite

troublée en substituant à la place de e, ε, et ω, dans l'équation précédente, leurs valeurs augmentées de leurs variations, et en mettant ζ à la place de nt. Nous avons vu que, relativement aux inégalités à longues périodes, la variation du moyen mouvement ζ était nulle; les variations de e, ζ, ε et ω produisent les termes

$$2\,\delta e \sin(nt+\varepsilon-\omega) + 2(\delta\zeta+\delta\varepsilon-\delta\omega)\,e\cos(nt+\varepsilon-\omega).$$

Pour qu'il en résulte un terme dépendant de l'angle $\omega-\omega'$ ou $\xi-\varphi+\varphi'$, il faut substituer pour δe, $\delta\zeta$, $\delta\varepsilon$, $\delta\omega$ les termes de leurs valeurs qui renferment le moyen mouvement nt de la Lune dans leur expression; or on a vu, n° 90, que ces termes sont nécessairement de l'ordre m^2; en négligeant donc les quantités de cet ordre, la valeur précédente de $\delta\varepsilon$ exprimera l'inégalité à *longue période* dépendante de l'angle $\xi-\varphi+\varphi'$ de la longitude vraie, en sorte qu'en la désignant par δv, on aura

$$\delta v = \left(\frac{25}{8}-\frac{495}{16}m\right)\frac{a}{a'}ee'\sin(\xi-\varphi+\varphi'). \quad (78)$$

Le premier terme de cette valeur s'accorde avec celui qu'ont trouvé par différentes méthodes les géomètres qui se sont occupés de l'inégalité précédente; mais le second terme diffère des résultats auxquels ils sont parvenus. Nous avons déjà vu que la valeur trouvée par Laplace (*Conn. des Temps*, 1824) était fautive, et nous en avons dit la raison (*Conn. des Temps*, 1840); M. Plana, dans sa *Théorie de la Lune*, a trouvé pour le coefficient de m, au lieu du facteur numérique $\frac{495}{16}$, le facteur $\frac{1095}{32}$; il est probable que cette différence

tient à quelque omission qu'il aura commise dans son calcul, et qu'il est très-difficile, en effet, d'éviter lorsqu'on veut appliquer, comme l'a fait ce géomètre, à la recherche des inégalités à longues périodes, les formules où la longitude vraie est prise pour variable indépendante, n° 91.

103. Au reste, pour mettre hors de doute l'exactitude de l'analyse précédente, nous avons calculé la même inégalité au moyen de la formule (16), n° 31, et nous sommes parvenu avec beaucoup de facilité au résultat que nous avions déduit des formules de la variation des élémens elliptiques. Nous allons présenter ici ce calcul, afin de mieux montrer l'accord des deux méthodes.

Reprenons la formule (16), n° 31. En négligeant les termes dépendans de l'inclinaison de l'orbite lunaire à l'écliptique, et en supposant $h = 1$, on a

$$\frac{d.\delta v}{dt} = -\frac{d.(dr\,\delta r)}{dt^2} - 2\delta.r\frac{dR}{dr} + \frac{\delta r}{r}\left(r\frac{dR}{dr}\right) - \frac{d.\delta v}{dt}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt, \quad (q)$$

la caractérisque δ se rapportant, comme dans ce qui précède, aux quantités dépendantes de la parallaxe du Soleil.

L'expression de $\delta\frac{1}{r}$, n° 26, contient le terme

$$\left(\frac{5}{4} - \frac{45}{8}m\right)\frac{a}{a'}e'\cos(\xi + \varphi').$$

On peut, d'ailleurs, supposer ici $\delta r = -\delta\frac{1}{r}$; l'expression elliptique de r, n° 5, contient le terme $-e\cos\varphi$; on aura donc, en n'ayant égard qu'à ces termes,

$$\delta r = -\left(\frac{5}{4} - \frac{45}{8}m\right)\frac{a}{a'}e'\cos(\xi + \varphi'), \quad dr = e\sin\varphi;$$

d'où l'on conclut

$$\frac{dr\,\delta r}{dt} = \left(\frac{5}{8} - \frac{45}{16}m\right)\frac{a}{a'}ee' \sin(\xi - \varphi + \varphi');$$

en différentiant cette valeur, et observant que

$$d.(\xi - \varphi + \varphi') = (1 - c)dt,$$

et qu'on a d'ailleurs, n° 24, $1 - c = \frac{3}{4}m^2\left(1 + \frac{75}{8}m\right)$, on trouve

$$\frac{d.(dr\,\delta r)}{dt} = \left(\frac{15}{32} + \frac{585}{256}m\right)m^2\frac{a}{a'}\cos(\xi - \varphi + \varphi').$$

Nous avons trouvé plus haut, n° 102,

$$\delta.\left(r\frac{dR}{dr}\right) = \left(-\frac{15}{16} + \frac{495}{128}m\right)m^2\frac{a}{a'}ee'\cos(\xi - \varphi + \varphi');$$

d'après les valeurs qui ont servi à déterminer δR, en observant que $-r\delta\frac{1}{r}\left(r\frac{dR}{dr}\right) = \frac{\delta r}{r}\left(r\frac{dR}{dr}\right)$, on aura

$$\frac{\delta r}{r}\left(r\frac{dR}{dr}\right) = \left(\frac{15}{16} - \frac{135}{128}m\right)m^2\frac{a}{a'}ee'\cos(\xi - \varphi + \varphi').$$

La valeur de δv, n° 102, en la différentiant, donne les termes suivans :

$$\begin{aligned}\frac{d.\delta v}{dt} = &-\frac{15}{8}m\frac{a}{a'}\cos\xi - \frac{75}{16}m\frac{a}{a'}e\cos(\xi + \varphi)\\ &+\frac{15}{8}m\frac{a}{a'}e'\cos(\xi - \varphi') + \frac{5}{2}\frac{a}{a'}e'\cos(\xi + \varphi')\\ &+\frac{75}{16}m\frac{a}{a'}ee'\cos(\xi + \varphi - \varphi') + \frac{375}{32}m\frac{a}{a'}ee'\cos(3\xi - \varphi + \varphi').\end{aligned}$$

On a d'ailleurs, n° 18,

$$\begin{aligned}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt = &-\frac{135}{16}m^2e\cos\varphi + \frac{3}{4}m^2\cos 2\xi - \frac{9}{2}m^2e\cos(2\xi - \varphi)\\ &-\frac{3}{8}m^2e'\cos(2\xi + \varphi') + \frac{9}{4}m^2ee'\cos(2\xi - \varphi + \varphi');\end{aligned}$$

La combinaison de ces deux expressions donne

$$\frac{d.\delta v'}{dt}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt$$
$$=\left(-\frac{675}{64}+\frac{225}{128}-\frac{135}{32}+\frac{225}{256}-\frac{135}{64}+\frac{1125}{256}=-\frac{315}{32}\right)m^{2}\frac{a}{a'}ee'\cos(\xi-\varphi+\varphi').$$

En substituant ces valeurs dans la formule (q), on trouvera

$$\frac{d.\delta v}{dt}=\left\{\left(-\frac{15}{32}+\frac{15}{8}+\frac{15}{16}=\frac{75}{32}\right)+\left(-\frac{585}{256}-\frac{495}{64}-\frac{135}{128}+\frac{315}{.32}=-\frac{315}{256}\right)m\right\}$$
$$\times m^{2}\frac{a}{a'}ee'\cos(\xi-\varphi+\varphi'),$$

d'où, en intégrant, on tire

$$\delta v=\left(\frac{25}{8}-\frac{495}{16}m\right)\frac{a}{a'}ee'\sin(\xi-\varphi+\varphi'),\qquad (78)$$

valeur qui coïncide avec celle que nous avons trouvée par les formules de la variation des élémens elliptiques.

Inégalités lunaires dépendantes de la figure de la Terre.

104. Ces inégalités dépendent de la configuration du sphéroïde terrestre, et peuvent servir à faire connaître son aplatissement avec plus d'exactitude qu'aucun des autres moyens employés pour le déterminer. Il faut donc calculer ces inégalités avec un soin particulier, et n'omettre dans cette recherche aucune des parties qui peuvent avoir sur leurs coefficiens une influence sensible.

Soit dm une molécule de la Terre placée à la distance r' du centre de gravité de cette planète, soit θ' l'angle que forme le rayon r' avec le demi-axe qui va du centre de la Terre au pôle boréal, et ω' l'angle que le plan mené par ce demi-axe et par r'

forme avec un méridien fixe; si l'on nomme semblablement θ et ω les mêmes quantités relatives au rayon r de l'orbite lunaire, qu'on désigne par V la fonction qui représente la somme des molécules terrestres divisées respectivement par leur distance au centre de la Lune, on aura, n° 4, livre V,

$$V = \int \frac{dm}{\sqrt{r^2 - 2rr'[\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\omega - \omega')] + r'^2}}.$$

Cette fonction peut se développer, quelle que soit la constitution intérieure du sphéroïde attirant, en une suite de termes ordonnés par rapport aux puissances descendantes de r et multipliées par des fonctions rationnelles et entières de $\cos\theta$ et $\cos\omega$, n° 16, livre V.

Si l'on suppose le sphéroïde recouvert, comme la Terre, d'un fluide en équilibre, ce développement prend une forme très-simple et l'on a, n° 36, livre V,

$$V = \frac{M}{r} + \frac{MD^2}{r^3}\left[\frac{1}{2}q\left(\cos^2\theta - \frac{1}{3}\right) + Y_2 + \frac{Y_3}{r} + \frac{Y_4}{r^2} + \frac{Y_5}{r^3} + \text{etc.}\right],$$

en représentant par M la masse du corps attirant, par q le rapport de la force centrifuge à la pesanteur sous l'équateur, et en supposant le rayon du sphéroïde exprimé par une suite de termes de la forme

$$D(1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + \text{etc.}),$$

D étant une constante qui représente la valeur du rayon moyen.

On peut, dans l'expression de V, négliger les termes divisés par les puissances de r supérieures à r^4. La rapidité du mouvement de rotation de la Terre fait qu'on peut négliger également les inégalités lunaires dont l'étendue serait d'un jour ou d'une fraction de jour;

dans cette supposition, les quantités Y_2, Y_3 ne doivent dépendre que de l'angle θ, et l'on peut supprimer les termes qui renferment l'angle ω; d'après les valeurs générales de ces quantités, n° 36, livre V, on aura donc dans ce cas

$$Y_2 = \alpha h \left(\frac{1}{3} - \cos^2\theta\right), \quad Y_3 = h'\left(\cos^3\theta - \frac{3}{5}\cos\theta\right);$$

αh et h' étant deux coefficiens constans dépendans de la figure du sphéroïde.

La fonction V devient ainsi

$$V = \frac{M}{r} + \frac{MD^2}{r^3}\left(\frac{1}{2}q - \alpha h\right)\left(\cos^2\theta - \frac{1}{3}\right) + \frac{MD^3}{r^4}h'\left(\cos^3\theta - \frac{3}{5}\cos\theta\right).$$

Cette fonction se réduit à ses deux premiers termes lorsque la Terre est supposée elliptique, et le facteur αh représente alors son aplatissement, h' désigne un coefficient constant qui dépend de la différence d'aplatissement des deux hémisphères.

Si l'on suppose que la valeur précédente se rapporte à l'action de la Terre sur la Lune regardée comme réunie à son centre de gravité, l'action de la Lune sur le système des molécules terrestres sera représentée par une fonction semblable prise avec un signe contraire et dans laquelle on changera seulement M en m, m étant la masse de la Lune; mais lorsqu'on considère le mouvement d'un astre autour d'un autre astre regardé comme fixe, il faut à la fonction V qui provient de l'action du second astre sur le premier, joindre avec un signe contraire celle qui résule de l'action que ce dernier astre exerce lui-même sur celui qu'on veut considérer comme un point fixe; d'après cela, pour avoir la fonction V qui convient

au mouvement de la Lune autour de la Terre immobile, on voit qu'il suffira de changer M en M + m dans la valeur précédente; on aura ainsi

$$V = \frac{M+m}{r} + \frac{(M+m)D^2}{r^3}\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{1}{2}q - \alpha h\right)\left(\cos^2\theta - \frac{1}{3}\right)\\ +\frac{D}{r}h'\left(\cos^3\theta - \frac{3}{5}\cos\theta\right)\end{array}\right\}.$$

Le premier terme de cette expression se rapporte au mouvement elliptique de la Lune autour de la Terre, et il a déjà été compris dans les équations différentielles du mouvement lunaire n° 1; le second terme est celui que produit l'écart de la figure de la Terre de la forme sphérique; il faudra donc, pour avoir égard aux inégalités qui en peuvent résulter dans le mouvement lunaire, ajouter cette valeur aux termes de la fonction perturbatrice R qui proviennent de l'action du Soleil; en désignant par R′ cette première partie de R, et en faisant, comme nous l'avons supposé précédemment, M + m = 1, on aura ainsi

$$R = R' + \frac{D^2}{r^3}\left\{\left(\frac{1}{2}q - \alpha h\right)\left(\cos^2\theta - \frac{1}{3}\right) + \frac{D}{r}h'\left(\cos^3\theta - \frac{3}{5}\cos\theta\right)\right\}.$$

Telle est l'expression de la fonction perturbatrice que nous emploierons dans les recherches suivantes; elle se simplifie lorsqu'on fait abstraction des termes divisés par r^4, ce qui revient à regarder la Terre comme un solide de révolution, supposition d'autant plus admissible, qu'en vertu de son mouvement rapide de rotation les irrégularités de sa figure doivent avoir une très-faible influence sur l'action qu'elle exerce sur la Lune. C'est ce que le calcul d'ailleurs vérifie complétement, comme on le verra dans la suite.

La fonction R ainsi réduite servira à déterminer les inégalités qui dépendent de l'aplatissement du sphéroïde terrestre.

Des inégalités lunaires dues à l'aplatissement de la Terre.

105. La différence de la figure de la Terre à celle de la sphère introduit dans R la fonction

$$-\left(\alpha h - \frac{1}{2}q\right)\frac{D^2}{r^3}\left(\cos^2\theta - \frac{1}{3}\right),$$

où q désigne le rapport de la force centrifuge à la pesanteur sous l'équateur, αh l'ellipticité de la Terre, D son rayon moyen, r le rayon vecteur de la Lune, et θ le complément de sa déclinaison.

Soit fv la longitude vraie de la Lune comptée sur l'écliptique, à partir de l'équinoxe mobile du printemps, soit l sa latitude, et nommons λ l'obliquité de l'écliptique; en considérant le triangle sphérique compris entre les pôles de l'écliptique et de l'équateur, et le centre de la Lune, il est aisé de voir que l'on aura

$$\cos\theta = \sin l \cos\lambda + \cos l \sin\lambda \sin fv;$$

ou bien, en observant que l'on a $\sin l = \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}$, $\cos l = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$, en désignant par s, comme précédemment, la tangente de la latitude,

$$\cos\theta = \frac{s\cos\lambda + \sin\lambda \sin fv}{\sqrt{1+s^2}}.$$

La fonction que nous considérons devient ainsi

$$-\left(\alpha h - \frac{1}{2}q\right)\frac{D^2}{r^3}\left\{\frac{s^2\cos^2\lambda + 2s\sin\lambda\cos\lambda\sin fv + \sin^2\lambda\sin^2 fv}{1+s^2} - \frac{1}{3}\right\};$$

Le terme

$$\frac{-2\left(\alpha h-\frac{1}{2}q\right)D^2}{r^4(1+s^2)}\,s\sin\lambda\cos\lambda\sin fv$$

est le seul de cette expression qui puisse donner des inégalités sensibles du genre de celles que nous considérons; les autres termes ne produisent que des inégalités périodiques dépendantes de la longitude de la Lune, ou des inégalités à longues périodes multipliées par des puissances des excentricités et des inclinaisons qui doivent les rendre tout à fait inappréciables.

En n'ayant donc égard qu'à ce terme, et en faisant, pour abréger,

$$6^{(\ )}=2\left(\alpha h-\frac{1}{2}q\right)D^2\sin\lambda\cos\lambda;$$

en négligeant de plus les termes qui dépendent de la parallaxe du Soleil dans R, et en supposant, n° 3,

$$m^2r^2P=\frac{m'r^2}{4r'^3}[1+3(1-s^2)\cos(2v-2v')-3s^2],$$

la fonction perturbatrice qui s'applique au cas que nous considérons deviendra

$$R=m^2r^2P-\frac{6^{(0)}s\sin fv}{r^3(1+s^2)}.$$

106. Nous commencerons par déterminer les principales inégalités dépendantes de l'aplatissement de la Terre qui résultent de cette fonction dans l'expression de la latitude, parce que ces inégalités sont nécessaires à connaître pour calculer les termes correspondans du rayon vecteur et de la longitude.

Reprenons l'équation (19), n° 37,

$$\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{z}{r^3}=\frac{dR}{dz}. \qquad (m)$$

On a d'ailleurs, n° 1,

$$\frac{dR}{dz}=\frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\,\frac{dR}{dr}+\frac{\sqrt{1+s^2}}{r}\,\frac{dR}{ds}.$$

En ne considérant que le second terme de la valeur de R, et substituant ft à la place de fv, on trouve

$$\frac{dR}{dr}=\frac{3\,6^{(0)}s\sin ft}{r^4(1+s^2)},\qquad \frac{dR}{ds}=-\frac{6^{(0)}\sin ft}{r^3(1+3s^2)};$$

en négligeant donc les puissances de s supérieures au carré, en vertu de ce terme seulement, on aura

$$\frac{dR}{dz}=-\frac{6^{(0)}\sin ft}{r^4}\left(1-\frac{11}{2}s^2\right).$$

Le premier terme de la fonction R produit d'ailleurs, n° 37, dans $\frac{dR}{dz}$, le terme $-\frac{m^2a'^3z}{r'^3}$; en vertu de ces deux parties réunies, on aura donc

$$\frac{dR}{dz}=-\frac{m^2a'^3z}{r'^3}-\frac{6^{(0)}\sin ft}{r^4}\left(1-\frac{11}{2}s^2\right),$$

et l'équation (m) deviendra

$$\frac{d^2.\delta z}{dt^2}+\delta z\left(\frac{1}{r^3}+\frac{m^2a'^3}{r'^3}\right)+\frac{6^{(0)}\sin ft}{r^4}\left(1-\frac{11}{2}s^2\right)=0.$$

Si, dans le développement de la fonction $\frac{1}{r^3}+\frac{m^2a'^3}{r'^3}$, on n'a égard qu'à la partie non périodique, on aura, n°s 37 et 59,

$$\frac{1}{r^3}+\frac{m^2a'^3}{r'^3}=1+\frac{3}{2}m^2-\frac{9}{32}m^4+\frac{9}{4}m^2e'^2.$$

L'équation précédente, en supprimant le terme $\frac{m^2 a'^3}{r'^3}$ qui nous serait désormais inutile, deviendra ainsi

$$\frac{d^2 . \delta z}{dt^2} + \delta z \left(1 + \frac{3}{2} m^2 - \frac{9}{32} m^4 + \frac{9}{4} m^2 e'^2\right) + \frac{\delta z}{r^3} + \frac{6^{(0)} \sin ft}{r^4} \left(1 - \frac{11}{2} s^2\right) = 0, \quad (m')$$

équation dans laquelle on ne devra substituer pour $\frac{1}{r^3}$ que les termes périodiques de son développement.

Cela posé, pour satisfaire à cette équation, soit

$$\delta z = k^{(0)} \sin ft + k^{(1)} \sin (2\xi - ft) + k^{(2)} \sin (2\xi + ft).$$

En substituant cette valeur dans (m'), et en observant qu'on a d'ailleurs, n° 40, $\frac{1}{r^3} = \left(3m^2 + \frac{19}{2} m^3\right) \cos 2\xi$, et qu'on peut supposer, aux quantités près que nous négligeons, $\frac{1}{r^4} = 1 + \frac{2}{3} m^2$, $s^2 = \frac{1}{2} \gamma^2$, la comparaison des *sinus* semblables donnera

$$k^{(0)} \left(1 + \frac{3}{2} m^2 - \frac{9}{32} m^4 + \frac{9}{4} m^2 e'^2 - f^2\right) + \left(\frac{3}{2} m^2 + \frac{19}{4} m^3\right)[k^{(1)} - k^{(2)}]$$
$$+ 6^{(0)} \left(1 + \frac{2}{3} m^2 - \frac{11}{4} \gamma^2\right) = 0,$$

$$k^{(1)} \left[1 + \frac{3}{2} m^2 - (2 - 2m - f)^2\right] - \left(\frac{3}{2} m^2 + \frac{19}{4} m^3\right) k^{(0)} = 0, \quad (n)$$

$$k^{(2)} \left[1 + \frac{3}{2} m^2 - (2 - 2m + f)^2\right] + \frac{3}{2} m^2 k^{(0)} = 0.$$

Ces équations feront connaître, par l'élimination, les valeurs des coefficiens indéterminés $k^{(0)}$, $k^{(1)}$ et $k^{(2)}$.

On peut, dans ces équations, supposer $f = 1$; en effet, ft représentant la longitude moyenne de la Lune comptée de l'équinoxe mobile du printemps,

soit ρt la rétrogradation moyenne de ce point pendant le temps t, on aura $ft = (1 + \rho) t$; les déplacemens des équinoxes s'effectuant très-lentement, ρt est une très-petite quantité par rapport à t; et les observations donnent $f = (1 + \rho) = 1{,}0000002886$, quantité qui diffère très-peu de l'unité. Les deux dernières équations (n) deviennent ainsi

$$4m\left(1 - \frac{5}{8}m\right)k^{(1)} = \left(\frac{3}{2}m^2 + \frac{19}{4}m^2\right)k^{(2)},$$

$$8k^{(2)} = \frac{3}{2}m^2 k^{(0)};$$

d'où, en négligeant les puissances de m supérieures au carré, on tire

$$k^{(1)} = \left(\frac{3}{8}m + \frac{91}{64}m^2\right)k^{(0)},$$

$$k^{(2)} = \frac{3}{16}m^2 k^{(0)}.$$

En substituant ces valeurs dans la première des équations (n), on trouve

$$k^{(0)}\frac{3}{2}m^2\left(1 - \frac{3}{8}m - \frac{167}{64}m^2 + \frac{3}{2}e'^2\right) + 6^{(0)}\left(1 + \frac{2}{3}m^2 - \frac{11}{4}\gamma^2\right) = 0,$$

d'où l'on tire

$$k^{(0)} = -\frac{6^{(0)}}{\frac{3}{2}m^2}\left(1 + \frac{3}{8}m + \frac{41}{12}m^2 - \frac{3}{2}e'^2 - \frac{11}{4}\gamma^2\right).$$

Si l'on substitue cette valeur dans les expressions de $k^{(1)}$ et $k^{(2)}$, on en conclura les valeurs de ces deux coefficiens en fonction de la quantité $6^{(0)}$; on trouvera ainsi

$$k^{(0)} = -\frac{6^{(0)}}{m^2}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4}m + \frac{41}{18}m^2 - e'^2 - \frac{11}{6}\gamma^2\right),$$

$$k^{(1)} = -\frac{6^{(0)}}{m}\left(\frac{1}{4}+\frac{25}{24}m\right),$$

$$k^{(2)} = -\frac{1}{8}6^{(0)}.$$

Soit

$$\delta s = h^{(0)}\sin ft + h^{(1)}\sin(2\xi - ft) + h^{(2)}\sin(2\xi + ft).$$

On a d'ailleurs, n° 1, $\frac{s}{\sqrt{1+s^2}} = \frac{z}{r}$; d'où, en différentiant par rapport à la caractéristique δ, on tire $\delta s = \frac{\delta z(1+\frac{3}{2}s^2)}{r}$; si l'on substitue donc pour δs et δz leurs valeurs précédentes dans cette équation, et qu'on suppose

$$\frac{1+\frac{3}{2}s^2}{r} = 1 + \frac{3}{4}\gamma^2 + \frac{m^2}{6} + \left(m^2 + \frac{19}{6}m^2\right)\cos 2\xi,$$

en comparant, après les réductions, les *sinus* semblables dans les deux membres, on aura, entre les coefficiens indéterminés $h^{(0)}$, $h^{(1)}$, $h^{(2)}$, et $k^{(0)}$, $k^{(1)}$, $k^{(2)}$, les relations suivantes :

$$h^{(0)} = k^{(0)}\left(1+\frac{m^2}{6}+\frac{3}{4}\gamma^2\right),\quad h^{(1)} = k^{(1)} - \frac{m^2}{2}k^{(0)},\quad h^{(2)} = k^{(2)} - \frac{m^2}{2}k^{(0)};$$

d'où l'on conclut

$$h^{(0)} = -\frac{6^{(0)}}{m^2}\left(\frac{2}{3}+\frac{m}{4}+\frac{43}{18}m^2 - c'^2 - \frac{4}{3}\gamma^2\right),$$

$$h^{(1)} = -\frac{6^{(0)}}{m}\left(\frac{1}{4}+\frac{17}{24}m\right),$$

$$h^{(2)} = -\frac{11}{24}6^{(0)}.$$

On aura donc ainsi

$$\delta s = -\frac{6^{(0)}}{m^2}\left(\frac{2}{3}+\frac{m}{4}+\frac{43}{18}m^2 - c'^2 - \frac{4}{3}\gamma^2\right)\sin ft$$

$$-\frac{6^{(0)}}{m}\left(\frac{1}{4}+\frac{17}{24}m\right)\sin(2\xi - ft),$$

$$-\frac{11}{24}6^{(0)}\sin(2\xi + ft).$$

107. Déterminons les inégalités correspondantes du rayon vecteur. En désignant par la caractéristique δ les quantités dépendantes du facteur $6^{(0)}$ et en différentiant, par rapport à δ, la première des équations (A), n° 1, on aura

$$\frac{d^2.r\delta r}{dt^2}+\frac{r\delta r}{r^3}-2\int d'.\delta\mathrm{R}-\delta.r\left(\frac{d\mathrm{R}}{dr}\right)=0. \qquad (l)$$

La fonction R contient le terme

$$m'r^2\mathrm{P}=\frac{m^2r^2}{4}[1-3s^2+3(1-s^2)\cos(2v-2v')];$$

en différentiant par rapport à la caractéristique δ, il en résultera dans δR les termes suivans :

$$m^2\delta.r^2\mathrm{P}=-\frac{3m^2r^2}{2}[1+\cos(2v-2v')]s\delta s$$
$$-\frac{3m^2r^2}{2}\sin(2v-2v')\delta v.$$

Nous omettons les termes dépendans de la variation δr, parce qu'ils ne produiraient que des inégalités de l'ordre $m^2 6^{(0)}$, que nous négligeons.

L'expression de s, n° 38, contient le terme $\gamma\sin\eta$ ou $\gamma\sin(gt-\theta)$; l'expression de δs, en vertu de la non-sphéricité de la Terre, contient, n° 106, le terme $-\frac{2}{3}\frac{6^0}{m^2}\sin ft$; d'où résulte dans $s\delta s$ le terme suivant :

$$s\delta s=-\frac{1}{3}\frac{6^{(0)}}{m^2}\gamma\cos(gt-ft-\theta).$$

Nous verrons plus loin que δv contient le terme suivant dépendant du même argument,

$$\delta v=-\frac{19}{3}\frac{6^{(0)}}{m^2}\gamma\cos(gt-ft-\theta).$$

En substituant ces valeurs dans l'expression $m^2\delta.r^2P$, et négligeant les excentricités des orbites du Soleil et de la Lune, ce qui permet de supposer $2v-2v'=2\xi$, on trouvera

$$m^2\delta.r^2P = \left(\frac{1}{4} - \frac{19}{4} = -\frac{9}{2}\right) 6^{(0)}\gamma \cos(2\xi + gt - ft - \theta)$$
$$+ \left(\frac{1}{4} + \frac{19}{4} = \quad 5\right) 6^{(0)}\gamma \cos(2\xi - gt + ft + \theta).$$

La fonction δR contient encore le terme $-\frac{6^{(0)}s \sin ft}{r^3}$, mais les inégalités dépendantes des argumens $2\xi+gt-ft$ et $2\xi-gt+ft$ que cette quantité peut produire seraient d'un ordre supérieur à celui auquel nous nous arrêtons. On aura donc, en ne considérant que les inégalités relatives à ces deux angles,

$$\delta R = -\frac{9}{2} 6^{(0)}\gamma \cos(2\xi + gt - ft - \theta)$$
$$+ 5\, 6^{(0)}\gamma \cos(2\xi - gt + ft + \theta);$$

on a d'ailleurs, aux quantités près que nous négligeons,

$$\int d'.\delta R = \delta R;$$

et comme la partie précédente de δR a pour facteur r^2, on a

$$\delta.r\left(\frac{dR}{dr}\right) = 2\delta R.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (l), elle devient

$$\frac{d^2.r\delta r}{dt^2} + \frac{r\delta r}{r^3} + 18\, 6^{(0)}\gamma \cos(2\xi + gt - ft - \theta)$$
$$- 20\, 6^{(0)}\gamma \cos(2\xi - gt + ft + \theta) = 0.$$

Soit

$$r\delta r = a^{(0)}\gamma \cos(2\xi + gt - ft - \theta) + a^{(1)}\gamma \cos(2\xi - gt + ft + \theta).$$

En substituant ces valeurs dans l'équation précédente et comparant les cosinus semblables, on aura

$$a^{(0)}\left\{1-(2-2m+g-f)^2\right\}+18\,6^{(0)}=0,$$

$$a^{(1)}\left\{1-(2-2m-g+f)^2\right\}-20\,6^{(0)}=0,$$

d'où, en supposant $g=1$ et $f=1$, on tire, aux quantités près que nous négligeons,

$$a^{(0)}=6\,6^{(0)},\qquad a^{(1)}=-\frac{20}{3}\,6^{(0)};$$

par conséquent

$$r\delta r=6\,6^{(0)}\gamma\cos(2\xi+gt-ft-\theta)-\frac{20}{3}\,6^{(0)}\gamma\cos(2\xi-gt+ft+\theta),$$

d'où l'on conclura

$$\delta\,\frac{1}{r}=-6\,6^{(0)}\gamma\cos(2\xi+gt-ft-\theta)+\frac{20}{3}\,6^{(0)}\gamma\cos(2\xi-gt+ft+\theta).$$

On voit que les inégalités du rayon vecteur n'acquièrent point par l'intégration de diviseurs qui augmentent leurs valeurs différentielles, et l'on pourrait les négliger sans erreur sensible; mais la considération de ces inégalités était nécessaire pour le calcul des inégalités de la longitude.

108. Occupons-nous donc enfin de ces inégalités. Commençons par déterminer les inégalités de δv correspondantes aux deux précédentes au moyen de la seconde des équations (A), n° 1,

$$dv=\frac{1+s^2}{r^2}\left[h+\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt\right]dt. \qquad \text{(B)}$$

Faisons, pour abréger, $u^2=\frac{1+s^2}{r^2}$; en différentiant,

on aura

$$\delta u = \frac{s\delta s}{r} + \delta\frac{1}{r}.$$

La valeur de s, en vertu de l'action du Soleil, contient, n° 38, les termes suivans :

$$s = \gamma\sin(gt - \theta) + c_{130}\sin(2\xi - gt + \theta) + c_{131}\,\gamma\sin(2\xi + gt - \theta).$$

On a, par ce qui précède,

$$\delta s = h^{(0)}\sin ft + h^{(1)}\sin(2\xi - ft) + h^{(2)}\sin(2\xi + ft);$$

de là on conclut

$$2s\delta s = -\left[h^{(1)} - c_{131}h^{(0)}\right]\gamma\cos(2\xi + gt - ft - \theta)$$
$$+\left(h^{(2)} - c_{130}\,h^{(0)}\right)\gamma\cos(2\xi - gt + ft + \theta).$$

On a d'ailleurs, n° 44,

$$c_{130} = \frac{3}{8}m + \frac{25}{32}m^2, \qquad c_{131} = \frac{11}{16}m^2.$$

En substituant ces valeurs et celles de $h^{(0)}$, $h^{(1)}$ et $h^{(2)}$ dans la fonction précédente, on aura

$$2s\delta s = -\frac{2}{3}\frac{6^{(0)}}{m^2}\gamma\cos(gt - ft - \theta)$$
$$+\frac{6^{(0)}}{m^2}\left[\frac{1}{4}m + \left(\frac{17}{24} - \frac{11}{24} = \frac{1}{4}\right)m^2\right]\gamma\cos(2\xi + gt - ft - \theta)$$
$$+\frac{6^{(0)}}{m^2}\left[\frac{1}{4}m + \left(\frac{3}{32} + \frac{25}{48} - \frac{11}{24} = \frac{5}{32}\right)m^2\right]\gamma\cos(2\xi - gt + ft + \theta).$$

On a d'ailleurs, n° 30, $\frac{1}{r} = 1 + m^2\cos 2\xi$; d'où l'on conclura

$$\frac{s\delta s}{r} = \frac{6^{(0)}}{m^2}\left[\frac{1}{8}m + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{6} = -\frac{1}{24}\right)m^2\right]\gamma\cos(2\xi + gt - ft - \theta)$$
$$+\frac{6^{(0)}}{m^2}\left[\frac{1}{8}m + \left(\frac{5}{64} - \frac{1}{6} = -\frac{17}{192}\right)m^2\right]\gamma\cos(2\xi - gt + ft + \theta);$$

en substituant cette valeur et celle de $\delta\frac{1}{r}$ dans δu, on aura

$$\delta u = \frac{6^{(0)}}{m^2}\left[\frac{1}{8}m - \left(\frac{1}{24} + 6 = \frac{145}{24}\right)m^2\right]\gamma\cos(2\xi + gt - ft - \theta)$$
$$+ \frac{6^{(0)}}{m^2}\left[\frac{1}{8}m + \left(-\frac{17}{192} + \frac{20}{3} = \frac{421}{64}\right)m^2\right]\gamma\cos(2\xi - gt + ft + \theta).$$

On a d'ailleurs, en négligeant le carré de l'inclinaison, $u = \frac{1}{r} = 1 + m^2\cos 2\xi$; par conséquent

$$u^2 = 2u\delta\mu = 2(1 + m^2\cos 2\xi)\delta u,$$

et par suite

$$2u\delta u = \frac{6^{(0)}}{m^2}\left[\frac{1}{4}m - \left(\frac{145}{12} + \frac{1}{3} = \frac{149}{12}\right)m^2\right]\gamma\cos(2\xi + gt - ft - \theta)$$
$$+ \frac{6^{(0)}}{m^2}\left[\frac{1}{4}m + \left(\frac{421}{32} - \frac{1}{3} = \frac{1231}{96}\right)m^2\right]\gamma\cos(2\xi - gt + ft + \theta).$$

En différentiant, par rapport à v, l'expression de la fonction R, n° 105, après avoir substitué pour $m^2r^2\mathrm{P}$ sa valeur, on trouve

$$\frac{d\mathrm{R}}{dv} = -\frac{3m^2r^2(1-s^2)}{2}\sin(2v - 2v') - \frac{6^{(0)}s\cos fv}{r^2}.$$

Le second terme ne produit aucune inégalité de l'ordre de ceux que nous considérons; en différentiant donc, par rapport à δ, la valeur précédente, on aura simplement

$$\delta.\left(\frac{d\mathrm{R}}{dv}\right) = 3m^2r^2[s\delta s\sin(2v - v') - \delta v\cos(2v - 2v')].$$

On a trouvé plus haut

$$s\delta s = -\frac{1}{3}\frac{6^{(0)}}{m^2}\gamma\cos(gt - ft - \theta),$$

$$\delta v = -\frac{19}{3}\frac{6^{(0)}}{m^2}\gamma\sin(gt - ft - \theta).$$

En substituant ces valeurs et mettant 2ξ à la place de $2v - 2v'$ dans la fonction $\delta.\left(\frac{dR}{dv}\right)$, il en résulte

$$\delta.\left(\frac{dR}{dv}\right) = \frac{3}{2}6^{(0)}\left(-\frac{1}{3}+\frac{19}{3}=6\right)\gamma \sin(2\xi + gt - ft - \theta)$$
$$- \frac{3}{2}6^{(0)}\left(\frac{1}{3}+\frac{19}{3}=\frac{20}{3}\right)\gamma \sin(2\xi - gt + ft + \theta),$$

ou bien, en intégrant,

$$\int\delta.\left(\frac{dR}{dv}\right)dt$$
$$= -6^{(0)}\left[\frac{9}{2}\gamma \cos(2\xi + gt - ft - \theta) - 5\gamma \cos(2\xi - gt + ft + \theta)\right].$$

La formule (B), en la différentiant par rapport à la caractéristique δ, et en négligeant les termes qui ne produiraient que des inégalités insensibles, donne

$$d.\delta v = 2u\delta u + \int\delta.\left(\frac{dR}{dv}\right)dt.$$

En substituant pour $2u\delta u$ et $\int\delta.\left(\frac{dR}{dv}\right)dt$ leurs valeurs, on trouve

$$\delta.\delta v = \frac{6^{(0)}}{m^2}dt\left[\frac{1}{4}m - \left(\frac{149}{12}+\frac{9}{2}=\frac{203}{12}\right)m^2\right]\gamma \cos(2\xi + gt - ft - \theta)$$
$$+ \frac{6^{(0)}}{m^2}dt\left[\frac{1}{4}m + \left(\frac{1231}{96}+5=\frac{1711}{96}\right)m^2\right]\gamma \cos(2\xi - gt + ft + \theta),$$

d'où, en intégrant et observant que $\xi = (1 - m)t$, on tire

$$\delta v = \frac{6^{(0)}}{m^2}\left(\frac{1}{8}m - \frac{25}{3}m^2\right)\gamma \sin(2\xi + gt - ft - \theta)$$
$$+ \frac{6^{(0)}}{m^2}\left(\frac{1}{8}m + \frac{1735}{192}m^2\right)\gamma \sin(2\xi - gt + ft + \theta).$$

109. A l'aide de ces valeurs, nous pouvons main-

tenant déterminer l'inégalité à longue période de la longitude qui dépend de l'argument $gt - ft$, en ayant égard aux quantités de l'ordre m dans son coefficient.

Reprenons la formule (F), n° 78. En supprimant les termes qui dépendent de la variation δr et les termes qui ne produiraient que des quantités d'un ordre supérieur à celles que nous considérons ; en observant, de plus, que par le théorème général, n° 91, relatif aux inégalités qui ne renferment pas le mouvement de la Lune dans leur argument, $\int d'.\delta R$ est nul dans l'ordre d'approximation auquel nous nous arrêtons, lorsqu'on n'a égard qu'à l'inégalité qui dépend de l'argument $gt - ft$, on aura

$$d.\delta v = -2dt\delta.\left(r\frac{dR}{dr}\right) + dt\left(s\delta s - \frac{dsd.\delta s}{dt^2}\right), \qquad \text{(A)}$$

la caractéristique δ se rapportant, comme précédemment, au facteur $6^{(0)}$, et δs désignant les termes de l'expression de s qui en sont affectés.

L'expression de R, n° 105, en faisant $s = \gamma \sin(gt - \theta)$ et en négligeant les quantités de l'ordre γ^2, devient

$$R = m^2 r^2 P - \frac{1}{2}\frac{6^{(0)}}{r^2}\gamma \cos(gt - ft - \theta),$$

d'où l'on conclut

$$2r\frac{dR}{dr} = 4m^2 r^2 P + 3\frac{6^{(0)}}{r^2}\gamma\cos(gt - ft - \theta)$$
$$= 4R + 5\,6^{(0)}\gamma\cos(gt - ft - \theta).$$

En négligeant donc les termes dépendans de l'excentricité e de l'orbe lunaire, on aura

$$\delta R = m^2\delta.r^2 P - \frac{1}{2}6^{(0)}\gamma\cos(gt - ft - \theta),$$

$$2\delta.r\frac{dR}{dr} = 4\delta R + 5\,6^{(0)}\gamma\cos(gt - ft - \theta).$$

Si l'on substitue pour $m^2\delta . r^2 P$ sa valeur, n° 107, dans δR, en supprimant les termes dépendant de la variation δr, qui ne produiraient que des quantités d'un ordre supérieur à celles que nous considérons, et en négligeant les excentricités des orbites du Soleil et de la Lune, ce qui permet de supposer $2\xi = 2v - 2v'$, on aura

$$\delta R = -\frac{3m^2}{2}\sin 2\xi\,\delta v - \frac{3m^2}{4}(1+\cos 2\xi)\,2s\delta s - \frac{1}{2}\,6^{(0)}\,\gamma\cos(gt - ft - \theta).$$

On a, par ce qui précède,

$$\delta v = \frac{1}{8}\,\frac{6^{(0)}}{m^2}\,\gamma\sin(2\xi + gt - ft - \theta) + \frac{1}{8}\,\frac{6^{(0)}}{m}\,\gamma\sin(2\xi - gt + ft + \theta),$$

$$\delta s = -\frac{6^{(0)}}{m^2}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4}m\right)\sin ft - \frac{1}{4}\,\frac{6^{(0)}}{m}\sin(2\xi - ft),$$

$$s = \gamma\sin(gt - \theta) + \frac{3}{8}m\gamma\sin(2\xi - gt + \theta);$$

et par suite,

$$\begin{aligned} 2s\delta s = &-\frac{6^{(0)}}{m^2}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4}m\right)\gamma\cos(gt - ft - \theta) \\ &+ \frac{1}{4}\,\frac{6^{(0)}}{m}\,\gamma\cos(2\xi - gt + ft + \theta) \\ &+ \frac{1}{4}\,\frac{6^{(0)}}{m}\,\gamma\cos(2\xi + gt - ft - \theta). \end{aligned}$$

En substituant ces valeurs dans l'expression de δR, on aura

$$\delta R = -\,6^{(0)}\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0\right) + \left(\frac{3}{16} - \frac{3}{16} + \frac{3}{16} = \frac{3}{16}\right)m\right]\gamma\cos(gt - ft - \theta),$$

et par suite,

$$2\delta . r\frac{dR}{dr} = 6^{(0)}\left(5 - \frac{3}{4}m\right)\gamma\cos(gt - ft).$$

Soient

$$s = \gamma \sin(gt - \theta) + c_{1,0}\gamma \sin(2\xi - gt + \theta),$$

$$\delta s = h^{(0)} \sin ft + h^{(1)} \sin(2\xi - ft);$$

en différentiant, on aura

$$ds = g\gamma \cos(gt - \theta) + (1 - 2m) c_{1,0} \gamma \cos(2\xi - gt + \theta),$$

$$d.\delta s = h^{(0)} \cos ft + (1 - 2m) h^{(1)} \cos(2\xi - ft),$$

et par suite,

$$sds = \frac{1}{2}\left[h^{(0)} + c_{1,0} h^{(1)}\right] \gamma \cos(gt - ft - \theta),$$

$$\frac{ds\,d.\delta s}{dt^2} = \frac{1}{2}\left[gh^{(0)} + (1 - 2m)^2 c_{1,0} h^{(1)}\right] \gamma \cos(gt - ft - \theta);$$

en retranchant ces deux valeurs l'une de l'autre, on trouve

$$s\delta s - \frac{dsd.\delta s}{dt^2} = \frac{1}{2}\left\{(1-g)h^{(0)} + c_{1,0} h^{(1)}\left[1 - (1-2m)^2\right]\right\} \gamma \cos(gt - ft - \theta).$$

On a, n°s 44 et 41, $c_{1,0} = \frac{3}{8}m$ et $g - 1 = \frac{3}{4}m^2\left(1 - \frac{3}{8}m\right)$;

d'ailleurs nous avons trouvé plus haut

$$h^{(0)} = -\frac{6^{(0)}}{m^2}\left(\frac{2}{3} + \frac{m}{4}\right), \qquad h^{(1)} = -\frac{1}{4}\,\frac{6^{(0)}}{m};$$

d'où l'on conclut

$$s\delta s - \frac{dsd.\delta s}{dt^2} = \frac{6^{(0)}}{m^2}\left[\frac{3}{8}m^2\left(1 - \frac{3}{8}m\right)\left(\frac{2}{3} + \frac{m}{4}\right) - \frac{3}{16}m^2\right] \gamma \cos(gt - ft - \theta),$$

et par conséquent

$$dt\left(s\delta s - \frac{dsd.\delta s}{dt^2}\right) = \frac{6^{(0)}\,dt}{4}\left(1 - \frac{3}{4}m\right) \gamma \cos(gt - ft - \theta).$$

Si l'on substitue cette valeur et celle de $2\delta.\left(r\frac{dR}{dr}\right)$ dans l'expression de $d.\delta v$, on aura

$$d.\delta v = -\,6^{(0)}\,dt\left[\left(5-\frac{1}{4}=\frac{19}{4}\right)+\left(\frac{3}{16}-\frac{3}{4}=-\frac{9}{16}\right)m\right]\gamma\cos(gt-ft-\theta),$$

d'où, en intégrant et observant que l'on a

$$\frac{1}{g-f}=\frac{1}{g-1}=\frac{4}{3}m^2\left(1+\frac{3}{8}m\right),$$

on conclut

$$\delta v = -\,\frac{6^{(0)}}{m^2}\left[\frac{19}{3}+\left(\frac{19}{8}-\frac{3}{4}=\frac{13}{8}\right)m\right]\gamma\sin(gt-ft-\theta).$$

Telle est l'expression de l'inégalité à longue période que l'aplatissement de la Terre introduit dans le mouvement en longitude de la Lune. Cette inégalité avait été reconnue par Mayer, longtemps avant que Laplace ne fût parvenu à en pénétrer la véritable cause. Cette découverte, en effet, exigeait, relativement aux attractions des sphéroïdes, des connaissances théoriques que la science n'avait point encore acquises du temps de Mayer. La valeur de δv que nous venons de trouver s'accorde avec celle que M. Plana a obtenue, dans sa *Théorie de la Lune,* par une méthode beaucoup moins simple et beaucoup moins directe ; mais elle diffère, quant au second terme de son coefficient, de celle que Laplace a trouvée, soit dans la *Connaissance des Temps* pour 1824, soit dans le XVI[e] livre de la *Mécanique céleste*. Dans le premier ouvrage, Laplace trouve que le facteur qui multiplie la quantité $\frac{6^{(0)}}{m}$ se réduit à zéro ; et dans la *Mécanique*

céleste, où il est revenu sur le même sujet, il trouve pour ce facteur $\frac{21}{8}$, au lieu de $\frac{13}{8}$. Nous avons indiqué, dans le n° 100, la cause de ces erreurs, qui, du reste, n'a d'influence que sur les termes dépendans de la seconde approximation : aussi le terme $-\frac{19}{3}\frac{6^{0}}{m^2}$, qui forme la principale partie de la valeur numérique de l'inégalité dont nous nous occupons, mais qui est le moins difficile à déterminer, a-t-il été trouvé exactement par Laplace et par MM. Damoiseau et Poisson, qui l'ont calculé après lui par deux méthodes différentes.

110. En substituant pour $6^{(0)}$ sa valeur, n° 105, l'expression précédente devient

$$\delta v = -\frac{2\left(\alpha h - \frac{1}{2}q\right)D^2 \sin\lambda\cos\lambda}{m^2}\left(\frac{19}{3} + \frac{13}{8}m\right)\gamma \sin(gt - ft - \theta).$$

Pour réduire cette expression en nombres, nous ferons usage des valeurs suivantes, qu'on peut regarder comme des données fournies par l'observation :

$$m = 0{,}0748013, \qquad \alpha h = \frac{1}{305},$$
$$\frac{D}{a} = 0{,}0165617, \qquad q = \frac{1}{289},$$
$$\gamma = 0{,}0896734, \qquad \lambda = 23^{\circ}\,27'\,55'';$$

m est le rapport des moyens mouvemens du Soleil et de la Lune; $\frac{D}{a}$ représente le rapport du rayon moyen de la Terre à la distance moyenne de la Lune à son centre : comme nous avons pris cette dernière distance pour unité, $\frac{D}{a}$ est la quantité qu'il faut substituer à la place de D dans l'expression de δv; $\frac{1}{305}$ est la valeur

la plus probable de l'aplatissement de la Terre donnée par l'ensemble des phénomènes qui servent à le mesurer; q le rapport de la force centrifuge à la pesanteur sous l'équateur; γ la tangente de l'inclinaison moyenne de l'orbite de la Lune sur l'écliptique vraie; λ l'obliquité de l'écliptique au commencement du XIXe siècle.

Au moyen de ces valeurs, on trouve

$$\delta v = -6'',623 \sin(gt - ft - \theta).$$

Bürg a fixé cette inégalité à $-6'',8$, et Burckardt à $-7'',0$; en la supposant, par un milieu, $-6'',9$, on trouverait l'aplatissement de la Terre égal à $-0,0033368$ ou $\frac{1}{299,69}$.

L'expression de la tangente de la latitude, n° 106, contient l'inégalité suivante :

$$\delta s = -\frac{2\left(\alpha h - \frac{1}{2}q\right) D^2 \sin\lambda\cos\lambda}{m^2}\left(\frac{2}{3} + \frac{m}{4} + \frac{43}{18}m^2 - e'^2 - \frac{4}{3}\gamma^2\right)\sin ft.$$

Les autres inégalités du mouvement en latitude, résultant de l'aplatissement de la Terre, sont tout à fait insensibles. e' représente l'excentricité de l'orbe solaire, et l'on avait, en 1801,

$$e' = 0,0167918.$$

En joignant cette valeur aux précédentes, on trouve

$$\delta s = -7'',867 \sin ft.$$

Bürg et Burckardt, d'après l'ensemble des observations de Maskeline et de Bradley, se sont accordés à fixer cette inégalité à $-8'',0$; cette valeur diffère peu de la précédente; la coïncidence serait complète en

augmentant un peu l'aplatissement que nous avons attribué à la Terre, et en le supposant de 0,0033049 ou $\frac{1}{302,58}$.

Les deux inégalités précédentes du mouvement en longitude et en latitude de la Lune se réunissent donc pour donner à la Terre, à très-peu près, le même aplatissement; et cet accord pourrait, au besoin, servir de vérification à l'analyse d'où ces inégalités sont déduites. Les coefficiens dont elles sont affectées changent d'ailleurs très-sensiblement suivant la valeur qu'on suppose à l'aplatissement du sphéroïde terrestre; en déterminant donc, par une longue suite d'observations, ces coefficiens avec toute l'exactitude désirable, on pourra, par la comparaison de ces valeurs à leurs expressions analytiques, évaluer avec beaucoup de précision la véritable mesure de l'aplatissement de la Terre. L'observation suivie des mouvemens lunaires nous offre par conséquent le moyen le plus certain peut-être que nous ayons de fixer cet élément important pour les calculs géographiques et astronomiques; et le rapprochement que ce résultat établit entre des phénomènes qui ont en apparence si peu de rapport entre eux, est sans contredit l'un des points les plus curieux de la théorie analytique du système du monde.

111. Pour former l'équation (A), n° 109, nous avons supposé $\int d'.\delta R = 0$, conformément au théorème général établi, n° 91; nous allons démontrer, par le calcul direct, que cette équation se vérifie en effet relativement à l'inégalité à longue période qui a pour argument $gt - ft$: ce sera le moyen de vérifier en même

temps l'exactitude de plusieurs des résultats auxquels nous sommes parvenus dans les numéros précédents.

En négligeant, comme nous le faisons ici, l'excentricité de l'orbe solaire, on peut supposer $dr' = 0$ et $dv' = mdt$; on aura ainsi, n° 14,

$$\int d'\mathrm{R} = \mathrm{R} - m\int \left(\frac{d\mathrm{R}}{dv'}\right) dt,$$

et par suite

$$\int d'.\delta\mathrm{R} = \delta\mathrm{R} - m\int \delta.\left(\frac{d\mathrm{R}}{dv'}\right) dt.$$

En différentiant l'expression de R, n° 3, on trouve

$$\frac{d\mathrm{R}}{dv'} = \frac{3m^2 r^2(1-s^2)}{2}\sin(2v - 2v'),$$

d'où, en différentiant par rapport à δ et faisant, comme précédemment, $u^2 = \frac{1+s^2}{r^2}$, on conclut

$$\delta.\left(\frac{d\mathrm{R}}{dv'}\right) = 3m^2\left[-\frac{\delta u}{u^3}\sin(2v - 2v') + \frac{\delta v}{u^2}\cos(2v - 2v')\right].$$

En vertu de l'action du Soleil, on a, n° 29,

$$v = t + \varepsilon + \frac{11}{8}m^2\sin 2\xi.$$

En substituant cette valeur à la place de v, et mettant mt à la place de v' dans l'équation précédente, on aura

$$\delta.\left(\frac{d\mathrm{R}}{dv'}\right) = 3m^2\left[-\frac{\delta u}{u^3}\sin 2\xi + \frac{\delta v}{u^2}\left(\cos 2\xi - \frac{11}{8}m^2\right)\right].$$

Soit

$$\begin{aligned}\delta u &= g^{(1)}\gamma\cos(2\xi + gt - ft - \theta) + g^{(2)}\gamma\cos(2\xi - gt + ft + \theta),\\ \delta v &= b^{(0)}\gamma\sin(gt - ft - \theta) + b^{(1)}\gamma\sin(2\xi + gt - ft - \theta)\\ &\quad + b^{(2)}\gamma\sin(2\xi - gt + ft + \theta).\end{aligned}$$

En substituant ces valeurs dans $\delta.\left(\frac{dR}{dv'}\right)$, et n'ayant égard qu'à l'inégalité dont l'argument est $gt - ft$, on trouvera

$$\delta.\left(\frac{dR}{dv'}\right) = 3m^2 \left\{ \begin{array}{l} -\frac{19}{8}m^2 b^{(0)} + \frac{1}{2}b^{(1)} - \frac{1}{2}b^{(2)} \\ -\frac{1}{2}[g^{(2)} - g^{(1)}] \end{array} \right\} \gamma \sin(gt - ft - \theta).$$

On a, par ce qui précède, nos 108 et 109,

$$b^{(0)} = -\frac{6^{(0)}}{m^2}\frac{19}{3},\quad b^{(1)} = \frac{6^{(0)}}{m^2}\left(\frac{1}{8}m - \frac{25}{3}m^2\right),\quad b^{(2)} = \frac{6^{(0)}}{m^2}\left(\frac{1}{8}m + \frac{1735}{192}m^2\right),$$

$$g^{(1)} = \frac{6^{(0)}}{m^2}\left(\frac{1}{8}m - \frac{145}{24}m^2\right),\qquad g^{(2)} = \frac{6^{(0)}}{m^2}\left(\frac{1}{8}m + \frac{421}{64}m^2\right);$$

par conséquent,

$$\delta.\left(\frac{dR}{dv'}\right) = \frac{3 6^{(0)}}{2} \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 0\right)m \\ + \left(\begin{array}{l} \frac{361}{12} - \frac{25}{3} - \frac{1735}{192} \\ -\frac{421}{64} - \frac{145}{24} = \frac{3}{32} \end{array} \right) m^2 \end{array} \right\} \gamma \sin(gt - ft - \theta);$$

d'où, en intégrant et observant que l'on a

$$(g - 1)^{-1} = \tfrac{3}{4}m^2,$$

on conclut

$$\int \delta.\left(\frac{dR}{dv'}\right) dt = -\frac{3}{16} 6^{(0)} \gamma \cos(gt - ft - \theta).$$

On a d'ailleurs, n° 109,

$$\delta R = -\frac{3}{16} m 6^{(0)} \gamma \cos(gt - ft - \theta);$$

on aura donc enfin

$$\int d'.\delta R = \delta R - m \int \delta.\left(\frac{dR}{dv'}\right) dt = \left(\frac{3}{16} - \frac{3}{16} = 0\right) m 6^{(0)} \gamma \cos(gt - ft - \theta);$$

d'où l'on voit que les termes qui forment le coefficient de l'inégalité $gt - ft$ se détruisent mutuellement, en sorte que cette inégalité disparaît de la fonction $\int d'.\delta R$, en portant même l'approximation jusqu'aux quantités de l'ordre m^3, ce qui est conforme au théorème général, n° 91.

M. Plana a calculé, dans deux endroits de son ouvrage (vol. Ier, pag. 157 et 397), les valeurs des fonctions δR et $\int d'.\delta R$ relatives à l'inégalité dont l'argument est $gv - fv$, et il a trouvé ainsi, en observant que la quantité qu'il désigne par A' est égale à $\frac{6^{(0)}}{m^2}$,

$$\delta R = 0, \quad \int d'.\delta R = \frac{3}{16} m\, 6^{(0)} \gamma \cos(gv - fv - \theta).$$

Ces valeurs ne sont point en contradiction avec les précédentes, puisque la fonction R n'est pas supposée développée de la même manière dans les deux cas; elles prouvent seulement que, dans le calcul même des inégalités à longues périodes, où l'on porte généralement l'approximation beaucoup moins loin qu'on ne le fait pour les autres inégalités périodiques, on doit se garder de confondre les formules où l'on prend pour variable indépendante la longitude vraie de la Lune, avec celles où la différentielle du temps est supposée constante. C'est en grande partie à ce que Laplace n'a point suffisamment observé cette distinction, qu'il faut attribuer les incorrections dont sont affectés les résultats qu'il a obtenus (*) relativement à cette classe importante d'inégalités lunaires.

(*) *Connaissance des Temps* pour 1824; — *Mécanique céleste*, livre XVI.

De l'inégalité à longue période dépendante de la différence des deux hémisphères terrestres.

112. Cette inégalité a pour argument *trois fois la longitude de la Lune, moins la longitude du périgée, moins deux fois la longitude du nœud.* Nous emploierons, pour la déterminer, les formules de la variation des élémens elliptiques, parce que cette méthode a l'avantage, comme nous l'avons dit n° 88, d'isoler l'inégalité que l'on veut considérer de toutes les inégalités du même genre, qui, par leur combinaison, pourraient la reproduire dans les expressions des coordonnées de la Lune, et qu'on est obligé de calculer quand on fait usage des formules ordinaires du mouvement troublé, alors même qu'on est averti d'avance que ces inégalités auxiliaires doivent demeurer tout à fait insensibles.

La différence d'aplatissement des deux hémisphères de la Terre introduit, n° 104, dans la fonction perturbatrice R, le terme

$$\frac{h'D^3}{r^4}\left(\cos^3\theta - \frac{3}{5}\cos\theta\right).$$

En conservant les notations des numéros précédens, on a, n° 105,

$$\cos\theta = \frac{s\cos\lambda + \sin\lambda\sin fv}{\sqrt{1+s^2}};$$

il en résulte dans la fonction $\frac{h'D^3}{r^4}\left(\cos^3\theta - \frac{3}{5}\cos\theta\right)$ le terme suivant

$$-\frac{h'D^3}{4r^4}\frac{\sin^3\lambda\sin 3fv}{(1+s^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

C'est le seul auquel il soit nécessaire d'avoir égard dans la recherche qui nous occupe. Si l'on réunit donc ce terme à ceux qui résultent de l'action du Soleil, qu'on néglige, comme précédemment, les termes dépendans de la parallaxe solaire, et qu'on suppose, pour abréger, $6^{(1)} = -\frac{h'D^3\sin^3\lambda}{4}$, on aura

$$R = m^2 r^2 P + \frac{6^{(1)} \sin 3fv}{r^4 (1+s^2)^{\frac{3}{2}}},$$

P représentant, comme dans le n° 105, la fonction

$$\frac{1}{4}[1 - 3s^2 + 3(1-s^2)\cos(2v - 2v')].$$

Faisons, pour abréger, $X = \frac{6^{(1)}\sin^3 fv}{r^4(1+s^2)^{\frac{3}{2}}}$; en observant que $r\frac{dX}{dr} = -4X$, on aura

$$R = m^2 r^2 P + X,$$

$$r\frac{dR}{dr} = 2m^2 r^2 P + 4X;$$

en supposant que la caractéristique δ se rapporte au facteur $6^{(1)}$, dont nous négligerons le carré, on en conclura

$$\delta R = \delta . m^2 r^2 P + X,$$

$$\delta . r\frac{dR}{dr} = 2\delta . m^2 r^2 P - 4X.$$

Nous n'aurons égard, dans le développement de R, qu'aux termes qui dépendent de l'angle $3ft - ct - 2gt$, parce que ce sont les seuls qui peuvent devenir considérables en acquérant le très-petit diviseur $(3f - c - 2g)^2$ dans l'expression de la longitude. En substituant donc dans l'expression de X, $1 + 2e\sin(ct - \omega) - \frac{\gamma^2}{4}\sin(2gt - 2\theta)$

$-\frac{e\gamma^2}{2}\sin(ct+2gt-\omega-2\theta)$ à la place de v, $1+4e\cos(ct-\omega)$ à la place de $\frac{1}{r^1}$ et $-\frac{\gamma^2}{2}\cos(2gt-2\theta)$ $-e\gamma^2\cos(ct+2gt-\omega-2\theta)$ à la place de s^2, et en négligeant les puissances de γ^2 supérieures au carré, on aura ainsi

$$R=m^2r^2P+\frac{15}{8}6^{(1)}e\gamma^2\sin(3ft-ct-2gt+\omega+2\theta).$$

Si l'on ne considère dans une première approximation que les termes qui peuvent s'abaisser à l'ordre $\frac{6^{(1)}}{m^2}$ dans les variations des élémens, on pourra faire abstraction du premier terme de cette expression, et l'on aura, en différentiant,

$$\frac{dR}{e\,d\omega}=\frac{15}{8}6^{(1)}\gamma^2\cos(3ft-ct-2gt+\omega+2\theta),$$
$$\frac{dR}{\gamma\,d\theta}=\frac{15}{4}6^{(1)}e\gamma\cos(3ft-ct-2gt+\omega+2\theta).$$

En substituant ces valeurs dans les formules (3) et (5) du n° 87, et en intégrant ensuite, on trouve

$$e\delta e=-\frac{15}{8}\frac{6^{(1)}e\gamma^2}{3f-c-2g}\sin(3ft-ct-2gt+\omega+2\theta),$$
$$\gamma\delta\gamma=-\frac{15}{4}\frac{6^{(1)}e\gamma^2}{3f-c-2g}\sin(3ft-ct-2gt+\omega+2\theta).$$

Ces valeurs étaient nécessaires pour la suite de ce calcul.

En comparant les deux expressions précédentes de R, on a

$$X=\frac{15}{8}6^{(1)}e\gamma^2\sin(3ft-ct-2gt+\omega+2\theta);$$

d'où l'on tire

$$e\frac{dX}{de} = X, \qquad \gamma\frac{dX}{d\gamma} = 2X:$$

on aura donc

$$e\frac{dR}{de} = e\left(\frac{d.m^2r^2P}{de}\right) + X,$$
$$\gamma\frac{dR}{d\gamma} = \gamma\left(\frac{d.m^2r^2P}{d\gamma}\right) + 2X;$$

ou bien, en différentiant, par rapport à δ, cette caractéristique portant uniquement sur le facteur $6^{(1)}$ dont nous négligeons le carré,

$$\delta.e\frac{dR}{de} = \delta.e\left(\frac{d.m^2r^2P}{de}\right) + X,$$
$$\delta.\gamma\frac{dR}{d\gamma} = \delta.\gamma\left(\frac{d.m^2r^2P}{d\gamma}\right) + 2X.$$

Supposons la fonction m^2r^2P réduite en une série ordonnée par rapport aux puissances ascendantes de e et de γ^2; la partie non périodique de ce développement contiendra deux termes de la forme He^2 et $H'\gamma^2$, et il est aisé de s'assurer que ce sont les seuls qui, par leur variation, pourront produire dans $\delta.m^2r^2P$ des termes de l'ordre m^2 affectés du très-petit diviseur $3f - c - 2g$; on aura donc, en vertu de ces termes seuls,

$$m^2r^2P = m^2He^2 + m^2H'\gamma^2;$$

on en conclura

$$\delta.m^2r^2P = 2m^2He\delta e + 2m^2H'\gamma\delta\gamma,$$

ou bien, en substituant pour $e\delta e$ et $\gamma\delta\gamma$ leurs valeurs, et en observant que, d'après l'expression de R en série, n° 6, on a $H = \frac{3}{8}$, $H' = -\frac{3}{8}$,

$$\delta.m^2r^2P = \frac{45}{32}\,\frac{6^{(1)}m^2e\gamma^2}{3f-c-2g}\sin(3ft-ct-2gt+\omega+2\theta);$$

on a d'ailleurs

$$e\left(\frac{d.m^2r^2P}{de}\right)+\gamma\left(\frac{d.m^2r^2P}{d\gamma}\right)=2m^2r^2P,$$

et par conséquent

$$\delta.e\left(\frac{d.m^2r^2P}{de}\right)+\delta.\gamma\left(\frac{d.m^2r^2P}{d\gamma}\right)=2\delta.m^2r^2P.$$

Cela posé, reprenons la formule (8), n° 93. En négligeant les puissances de e^2 et γ^2 supérieures à la seconde, on aura

$$d\varepsilon=-dt\left(2a\frac{dR}{da}-\frac{1}{2}e\frac{dR}{de}-\frac{1}{2}\gamma\frac{dR}{d\gamma}\right),$$

et, par suite,

$$d.\delta\varepsilon=-dt\left(2\delta.a\frac{dR}{da}-\frac{1}{2}\delta.e\frac{dR}{de}-\frac{1}{2}\delta.\gamma\frac{dR}{d\gamma}\right).$$

En substituant dans cette formule pour $\delta.a\,\frac{dR}{da}$, $\delta.e\,\frac{dR}{de}+\delta.\gamma\,\frac{dR}{d\gamma}$, leurs valeurs précédentes, on trouve

$$d.\delta\varepsilon=-dt\left(3\delta.m^2r^2P-\frac{19}{2}X\right).$$

Si l'on remplace, dans cette expression, $\delta.m^2r^2P$ et X par leurs valeurs, on aura

$$d.\delta\varepsilon=-\frac{156^{(1)}e\gamma^2}{32}\left(\frac{9m^2}{3f-c-2g}-38\right)\sin(3ft-ct-2gt+\omega+2\theta).$$

Il est facile de s'assurer, comme dans le n°102, que l'inégalité précédente est la seule de cet ordre relative à l'argument $3ft-ct-2gt$ que renferme l'expres-

sion de la longitude vraie. En changeant donc ε en v et en intégrant ensuite, on aura

$$\delta v = \frac{15\beta^{(1)} e\gamma^2}{32(3f-c-2g)}\left(\frac{9m^2}{3f-c-2g} - 38\right)\cos(3ft - ct - 2gt + \omega + 2\theta).$$

On laisse subsister, dans cette expression, le diviseur $3f - c - 2g$ sans le développer, parce que la série qui résulte de ce développement n'est pas convergente.

113. En substituant pour $\beta^{(1)}$ sa valeur, n° 112, l'inégalité précédente devient

$$\delta v = -\frac{15}{128}\frac{e\gamma^2 D^2 h' \sin^2\lambda}{3f-c-2g}\left(\frac{9m^2}{3f-c-2g} - 38\right)\cos(3ft - 2ct - 2gt + \omega + 2\theta).$$

Pour réduire en nombres cette expression aux valeurs rapportées n° 110, je joindrai les suivantes, qui résultent également de l'observation :

$$c = 0{,}991548, \qquad e = 0{,}054731,$$
$$g = 1{,}004022;$$

e représente l'excentricité de l'orbe lunaire, $(1 - c)t$ est le moyen mouvement du périgée, et $(g - 1)t$ le moyen mouvement du nœud.

A l'aide de ces valeurs et de celles qui sont rapportées n° 110, en supposant d'ailleurs $f = 1$, on a formé les suivantes,

$$\frac{e\gamma^2 D^2 \sin^2\lambda}{3f-c-2g} = 0'',063, \qquad \frac{9m^2}{3f-c-2g} = 123.$$

L'expression de δv devient ainsi

$$\delta v = -0'',631\, h' \cos(3ft - ct - 2gt + \omega + 2\theta).$$

La période de cette inégalité serait de 179 ans à peu près.

M. Bessel, en comparant les longueurs du pendule à secondes observées dans les deux hémisphères, a trouvé que ces observations étaient suffisamment bien représentées en faisant $h' = 0,0003345$; on peut donc admettre, d'après les suppositions les plus probables, que le coefficient h' est inférieur à *un millième;* l'inégalité précédente, dans cette hypothèse, ne s'élèverait pas à *un millième* de seconde : elle serait donc tout à fait insensible.

Cependant cette conclusion n'est pas rigoureuse; nous n'avons calculé que le premier terme du coefficient de cette inégalité, et il se pourrait que le second terme augmentât beaucoup la valeur du premier, de même que le terme du second ordre qui entre dans l'expression de c modifie considérablement la valeur de cette quantité, n° 95, et par suite celle du diviseur $3f - c - 2g$ dans lequel elle se trouve. Ce doute, que l'analyse précédente peut laisser encore sur la véritable valeur de l'inégalité à longue période que nous venons de considérer, ne peut être levé qu'en portant l'approximation aussi loin que nous l'avons fait pour les autres inégalités du même genre; les géomètres, d'ailleurs, qui se sont occupés de cette recherche très-délicate par le grand nombre d'inégalités dont il faut considérer la combinaison, ne s'accordent pas dans leurs résultats (*), et l'analyse développée avec

(*) M. Poisson, dans son Mémoire sur la théorie du mouvement lunaire (*Mémoires de l'Institut*, tome X), est arrivé à

beaucoup d'étendue par Laplace dans les *Connaissances des Temps* pour 1823 et 1824, et dans le XVI[e] livre de la *Mécanique céleste,* a besoin d'être rectifiée, puisqu'elle est entachée de la même erreur qui a rendu fautif le second terme des coefficiens de toutes les inégalités à longues périodes que ce géomètre a calculées. Je me propose de revenir sur ce sujet dans la suite.

114. L'inégalité précédente mérite d'autant plus d'être déterminée avec soin, qu'elle se rattache à un point demeuré encore obscur dans la théorie de la Lune. En effet, Bürg, par la comparaison d'un grand nombre d'observations faites pendant les deux derniers siècles, avait été conduit à remarquer des différences qui semblaient indiquer, dans le mouvement en longitude, l'existence d'une *inégalité* dont la période serait de 180 ans environ, c'est-à-dire la même à peu près que celle de l'inégalité que nous venons de considérer. Cette inégalité ne pouvant provenir, ainsi que l'avait d'abord imaginé Laplace, de la différence d'aplatissement des deux hémisphères terres-

---

un résultat identique avec le nôtre ; mais il s'est borné à considérer, comme nous, les quantités dépendantes de la première approximation ; M. Plana, qui a poussé la précision jusqu'aux quantités dépendantes de l'approximation suivante, et qui a calculé la même inégalité par deux méthodes différentes, dans sa *Théorie de la Lune* (vol. I, pages 173 et 482), a trouvé des résultats qui non-seulement diffèrent du précédent dans l'ordre d'approximation auquel nous nous sommes arrêté, mais qui même ne présentent aucun accord entre eux ; ils ne peuvent, par conséquent, inspirer aucune confiance.

tres, qui ne produit, comme on l'a vu, que des altérations tout-à-fait insensibles dans le mouvement lunaire, ce grand géomètre fut obligé de lui chercher une autre cause, et il crut pouvoir l'attribuer à l'action directe du Soleil et à l'existence d'une inégalité à longue période provenant de cette action, et ayant pour argument *la longitude du périgée de l'orbe lunaire, plus deux fois celle du nœud, moins trois fois la longitude du périgée solaire.* La période de cette inégalité serait de 184 ans, et son argument étant à très peu près le même que celui de l'inégalité précédente, elle pourrait devenir sensible en acquérant, comme elle, un très petit diviseur par l'intégration. En effet, d'après la notation adoptée, l'argument de cette inégalité serait $\omega + 2\theta - 3\omega'$ ou $(1-c)t + 2(1-g)t - 3(1-c')mt$; or, d'après les observations, on a, n° 113,

$$1 - c = 0{,}008452\,, \quad g - 1 = 0{,}004022\,,$$

c'est-à-dire que le premier nombre est à peu près double du second, en supposant $c' = 1$; il en résulte

$$(1-c) + 2(1-g) - 3(1-c')m = 0{,}0004085.$$

La petitesse de cette quantité doit augmenter considérablement les inégalités dans lesquelles elle entrera comme diviseur, et à plus forte raison les termes de la longitude moyenne, dont les dénominateurs seront affectés de son carré par la double intégration qu'ils subissent. Cependant, comme l'inégalité que nous considérons serait au moins du sixième ordre par rapport aux excentricités des orbites de la Lune et du Soleil, et à l'inclinaison de l'orbe lunaire à l'éclipti-

que, d'après la loi du développement de la fonction R, que son coefficient serait de plus multiplié par les très petits facteurs m^2 et $\frac{a}{a'}$, ce qui l'élèverait au dixième ordre, il paraît peu probable que, malgré la petitesse de son diviseur, cette inégalité puisse devenir considérable, et Laplace, par cette raison, s'était dispensé d'en faire le pénible calcul; mais on peut aller plus loin, et il est facile de s'assurer, par des considérations très simples, qu'il n'existe point dans l'expression de la longitude, d'inégalité sensible dépendante de l'argument $\omega + 2\theta - 3\omega'$ ou $3\xi - \varphi + 3\varphi' - 2\eta$, du moins parmi les termes qui résultent de la première approximation.

En effet, en examinant avec attention l'expression de la fonction R, n° 3, on voit que l'inégalité que nous considérons ne peut provenir que du développement des puissances impaires de la quantité que nous avons désignée par μ, en sorte qu'en négligeant les termes inutiles à la recherche qui nous occupe, on peut supposer

$$R = -\frac{m' r^3}{2 r'^4}(3\mu - 5\mu^3).$$

Cette inégalité se trouvera donc comprise parmi celles qui dépendent de la *parallaxe* du Soleil et elle aura pour facteur la très petite quantité $\frac{a}{a'}$, indépendamment du facteur m^2, qui est commun à tous les termes de l'expression de R. On sait, d'ailleurs, d'après la loi générale du développement de la fonction perturbatrice, n° 4, livre VI, que le terme dépendant

de l'angle $\omega + 2\theta - 3\omega'$ doit avoir pour coefficient la quantité $ee'^3\gamma^2$. D'après cela, supposons qu'en développant la fonction R, et en n'ayant égard qu'aux inégalités dépendantes de l'angle $\omega + 2\theta - 3\omega'$ ou $3\xi - \varphi + 3\varphi' - 2\eta$, on ait

$$R = m^2 k\, ee'^3 \gamma^2 \frac{a}{a'} \cos(3\xi - \varphi + 3\varphi' - 2\eta),$$

k étant un facteur numérique quelconque.

Si l'on substitue cette valeur dans la troisième et la cinquième des formules (A), n° 87, et qu'on intègre les expressions résultantes, on aura, pour les termes des valeurs de e^2 et de γ^2, dépendans de l'argument que nous considérons,

$$\delta e^2 = -\frac{2m^2 k\, ee'^3 \gamma^2}{3 - c - 2g} \frac{a}{a'} \cos(\omega + 2\theta - 3\omega'),$$

$$\delta \gamma^2 = -\frac{4m^2 k\, ee'^3 \gamma^2}{3 - c - 2g} \frac{a}{a'} \cos(\omega + 2\theta - 3\omega').$$

La fonction R, n° 6, renferme les termes suivans :

$$R = \frac{3}{8} m^2 (e^2 - \gamma^2);$$

et, en substituant cette valeur dans les formules (8), n° 93, on trouve qu'il en résulte, dans l'expression différentielle de ε, le terme

$$d\varepsilon = -\frac{9}{8} m^2\, dt\, (e^2 - \gamma^2).$$

En remplaçant dans cette expression e^2 et γ^2 par leurs valeurs précédentes, et intégrant la valeur résultante, on aura

$$\delta\varepsilon = -\frac{9}{4} \frac{m^4 k\, ee'^3 \gamma^2}{(3 - c - 2g)^2} \frac{a}{a'} \sin(\omega + 2\theta - 3\omega')$$

pour la partie de la variation de $\delta\varepsilon$ dépendante de

l'angle $\omega + 2\theta - 3\omega'$, et qui acquiert par l'intégration le très petit diviseur $(3 - c - 2g)^2$; les autres inégalités dépendantes du même argument seraient simplement divisées par $3 - c - 2g$, et l'on peut par conséquent les négliger par rapport à la précédente. Si, au moyen des valeurs numériques des quantités m^2, e', γ^2, rapportées n° 119, auxquelles on joindra les suivantes $e = 0{,}054731$, $\frac{a}{a'} = 0{,}00252551$, et au moyen de la valeur du diviseur $3 - c - 2g$ rapportée plus haut, on réduit en nombres le coefficient de l'expression de $\delta\varepsilon$, on trouvera que ce coefficient, abstraction faite du facteur k, ne dépasse pas *cinq dix-millièmes* de seconde, il faudrait donc que le facteur k fût très considérable, pour que cette inégalité pût devenir sensible; or, on peut aisément démontrer que non-seulement le facteur k n'a pas une semblable valeur, mais que même il se réduit à zéro, en sorte que tous les termes dépendans de l'argument $\omega + 2\theta - 3\omega'$ disparaissent de la fonction R.

En effet, en substituant pour μ^3 sa valeur dans l'expression précédente de R, on trouvera qu'il en résulte le terme suivant:

$$R = \frac{5}{8}\frac{m'r^3}{r'^4}\left(1 - \frac{3}{2}s^2\right)\cos(3v - 3v');$$

c'est le seul qui, par son développement, puisse produire des inégalités dépendantes de l'argument $3\xi - \varphi + 3\varphi' - 2\eta$. L'expression précédente peut s'écrire ainsi

$$R = \frac{5}{8}m'r^3\left(1 - \frac{3}{2}s^2\right)\cos 3v\,\frac{\cos 3v'}{r'^4}$$
$$+ \frac{5}{8}m'r^3\left(1 - \frac{3}{2}s^2\right)\sin 3v\,\frac{\sin 3v'}{r'^4}.$$

D'après les valeurs elliptiques de v' et de r', n° 5, on trouve

$$\sin 3v' = \sin 3mt - 3e' \sin(3mt - \varphi') + \frac{21}{8} e'^2 \sin(3mt - 2\varphi') - \frac{e'^3}{2} \sin(3mt - 3\varphi'),$$

$$\cos 3v' = \cos 3mt - 3e' \cos(3mt - \varphi'),$$

$$\frac{a'^4}{r'^4} = 1 + 4e' \cos\varphi' + 7e'^2 \cos 2\varphi' + \frac{23}{2} e'^3 \cos 3\varphi';$$

on tire de là

$$\frac{\sin 3v'}{\left(\frac{r'}{a'}\right)^4} = \left(-\frac{1}{2} + \frac{21}{4} - \frac{21}{2} + \frac{23}{4} = 0\right) e'^3 \sin(3mt - 3\varphi'),$$

$$\frac{\cos 3v'}{\left(\frac{r'}{a'}\right)^4} = \left(-\frac{1}{2} + \frac{21}{4} - \frac{21}{2} + \frac{23}{4} = 0\right) e'^3 \cos(3mt - 3\varphi').$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'expression de R, on voit qu'elle se réduit à zéro; d'où l'on peut conclure que les coefficiens de tous les argumens qui résultent de la combinaison de l'angle $3mt - 3\varphi'$ avec un multiple quelconque des angles φ et 2η seront également nuls, et que par conséquent la fonction perturbatrice ne renfermera aucune inégalité relative à l'argument $3\xi - \varphi + 3\varphi'$, du moins parmi les termes dépendans de la première approximation. Il suit de là que la partie la plus sensible du coefficient de cette inégalité provenant de l'action directe du Soleil, disparaît de l'expression de $\delta\varepsilon$, et par suite de celle de la *longitude vraie*. Nous avons déjà vu que l'inégalité dépendante d'un argument semblable, et qui résulte de la différence d'aplatissement des deux hémisphères terrestres, était tout-à-fait insen-

sible : il faut donc chercher ailleurs la cause des anomalies remarquées par Bürg dans les observations qu'il a comparées ; mais il sera bon, auparavant, de discuter de nouveau ces observations, et de leur comparer les observations nouvelles, pour s'assurer de l'existence réelle de ces différences ; c'est un point important de la théorie lunaire que les astronomes doivent, avant tout, éclaircir. En attendant, Bürg a cru indispensable, pour représenter les observations, d'introduire dans ses Tables une inégalité à *longue période* dépendante de l'argument $\omega + 2\theta - 3\omega'$, et dont il fixe le coefficient déduit des observations à 13",8 ; et Burckhardt, à son exemple, a introduit dans les siennes une inégalité à laquelle il suppose une période de 180 ans, et dont le coefficient, toujours d'après les observations, serait de 12",5 (*).

(*) La supposition de Bürg, fondée sur une analyse incomplète de Laplace (*voyez* l'introduction des Tables de Bürg, par Delambre) est tout-à-fait *inadmissible*, et l'on a vu qu'il ne peut exister, dans l'expression de la longitude, aucune inégalité sensible dépendante de l'angle $\omega + 2\theta - 3\omega'$; quant à la supposition d'une inégalité dont la période serait simplement de 180 à 185 ans, sans en assigner positivement l'argument, et dont le coefficient s'élèverait de 13 à 14 secondes, on se demande comment une inégalité d'une telle importance aurait pu échapper jusqu'ici aux investigations des géomètres ?

CHAPITRE V.

Servant de complément au chapitre troisième.

115. La réduction en nombres des formules contenues dans le chapitre troisième nous a indiqué quelques inégalités qui n'avaient point encore été déterminées avec toute la précision qu'elles pouvaient atteindre; nous avons donc cru nécessaire de porter, à leur égard, l'approximation plus loin que nous ne l'avions fait jusqu'ici. Nous ajouterons, en même temps, aux expressions de la longitude et de la latitude, quelques inégalités nouvelles, très petites en elles-mêmes, mais dont la précision des observations modernes pourra, par la suite, exiger qu'on tienne compte.

Reprenons d'abord le calcul des deux inégalités dépendantes des angles $2\xi - 3\varphi$ et $2\xi + 3\varphi$, nos 26 et 30.

Le développement de la fonction perturbatrice a donné

$$R = \left(-\frac{7}{32}m^2 + \frac{105}{128}m^3 + \frac{88887}{6144}m^4\right) e^3 \cos(2\xi \underset{(43)}{-} 3\varphi)$$

$$+ \frac{25}{32} m^2 e^3 \cos(2\xi \underset{(44)}{+} 3\varphi),$$

$$\frac{dR}{dv} = \frac{7}{16} m^2 e^3 \sin(2\xi \underset{(43)}{-} 3\varphi) - \frac{25}{16} m^2 e^3 \sin(2\xi \underset{(44)}{+} 3\varphi).$$

La seconde de ces valeurs, multipliée par dt et intégrée ensuite, donnera

$$\int\left(\frac{d\mathrm{R}}{dv}\right)dt = \left(\frac{7}{16}m^3 - \frac{7}{8}m^4\right)e^3\cos\left(2\xi \underset{(43)}{-} 3\varphi\right)$$

$$+\left(\frac{5}{16}m^3 + \frac{m^4}{8}\right)e^3\cos\left(2\xi \underset{(44)}{+} 3\varphi\right).$$

En substituant pour R et $\int\left(\frac{d\mathrm{R}}{dv}\right)dt$ les valeurs précédentes dans la formule

$$2\int d'\mathrm{R} + r\frac{d\mathrm{R}}{dr} = 4\mathrm{R} + 2m\int\left(\frac{d\mathrm{R}}{dv}\right)dt,$$

on en conclura

$$2\int d'\mathrm{R} + r\frac{d\mathrm{R}}{dr} = \left(-\frac{7}{8}m^2 + \frac{133}{32}m^3 + \frac{86199}{1536}m^4\right)e^3\cos\left(2\xi \underset{(43)}{-} 3\varphi\right)$$

$$+\left(\frac{25}{8}m^2 + \frac{5}{8}m^3\right)e^3\cos\left(2\xi \underset{(44)}{+} 3\varphi\right).$$

On a trouvé, par les approximations précédentes, n°s 26 et 21,

$$\delta\frac{1}{r} = \left(m^2 + \frac{19}{6}m^3 + \frac{131}{18}m^4\right)\cos 2\xi$$

$$-\left(\frac{15}{4}m^2 + \frac{225}{16}m^3 + \frac{18403}{256}m^4\right)e^2\cos(2\xi - 2\varphi)$$

$$+\left(\frac{7}{2}m^2 + \frac{127}{12}m^3\right)e^2\cos(2\xi + 2\varphi),$$

$$\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2 = \frac{m^4}{3}\cos 2\xi + \left(\frac{5}{8}m^3 + \frac{203}{96}m^4\right)e\cos(2\xi - \varphi)$$

$$+\left(\frac{5}{16}m^3 - \frac{5675}{1024}m^4\right)e^2\cos(2\xi - 2\varphi)$$

$$+\left(\frac{45}{64}m^3 + \frac{4481}{2304}m^4\right)e^3\cos(2\xi - 3\varphi),$$

$$\left(\delta\frac{1}{r}\right)^3 = \frac{675}{256}m^4e^2\cos(2\xi - 2\varphi) + \frac{7425}{4096}m^4e^3\cos(2\xi - 3\varphi).$$

On a, d'ailleurs, par les formules du mouvement ellip-

tique, n° 5,

$$r^3 = 1 - 3e \cos\varphi + \frac{e^2}{8}\cos 3\varphi,$$

$$r^4 = 1 - 4e \cos\varphi + e^2 \cos 2\varphi + \frac{1}{2}e^2 \cos 3\varphi,$$

$$r^5 = 1 - 5e \cos\varphi.$$

En combinant ces valeurs, et en les substituant dans la formule

$$P = -r^3\,\delta\frac{1}{r} + \frac{3}{2}r^4\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2 - 2r^5\left(\delta\frac{1}{r}\right)^3,$$

on trouve

$$P_{43} = \left(-\frac{91}{16}m^2 - \frac{7951}{384}m^3 - \frac{1427975}{18432}m^4\right)e^3\cos(2\xi - 3\varphi),$$

$$P_{44} = \left(\quad\frac{83}{16}m^2 + \frac{1505}{96}m^3\right)e^3\cos(2\xi + 3\varphi).$$

Si dans les deux équations de condition, n° 15,

$$a_{43}[(2-2m-3c)^2-1] = (2-2m-3c)^2\,P_{43} + 2\int d'R_{43} + r\frac{dR_{43}}{dr},$$

$$a_{44}[(2-2m+3c)^2-1] = (2-2m+3c)^2\,P_{44} + 2\int d'R_{44} + r\frac{dR_{44}}{dr},$$

on substitue pour P_{43}, P_{44}, $\int d'R_{43}$, etc., leurs valeurs précédentes, et qu'on remplace c par sa valeur, n° 24, on formera les équations suivantes :

$$\left(4m - \frac{m^2}{2} - \frac{819}{16}m^3\right)a_{43}$$

$$= \left(1 + 4m - \frac{m^2}{2}\right)\left(-\frac{91}{16}m^2 - \frac{7951}{384}m^3 - \frac{1427975}{18432}m^4\right)$$

$$- \left(\frac{7}{8}m^2 - \frac{133}{32}m^3 - \frac{86199}{1536}m^4\right),$$

$$(24-20m)\,a_{44} = (25-20m)\left(\frac{83}{16}m^2 + \frac{1505}{96}m^3\right) + \left(\frac{25}{8}m^2 + \frac{5}{8}m^3\right);$$

d'où l'on tire

$$a_{43} = -\frac{105}{64}m - \frac{7703}{768}m^2 - \frac{3508109}{73728}m^3,$$

$$a_{44} = \quad\frac{2125}{384}m^2 + \frac{19175}{2304}m^3.$$

Au moyen de la formule

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{r_1^2} + \frac{2}{r_1}\,\delta\frac{1}{r} + \left(\delta\frac{1}{r}\right)^2,$$

et des valeurs de $\delta\frac{1}{r}$ et $\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2$, on aura

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^2} = &\left(-\frac{45}{32}m - \frac{6467}{384}m^2 - \frac{3109109}{36864}m^3\right)e^3\cos(2\xi \underset{(43)}{-} 3\varphi)\\ &+\left(\frac{3409}{192}m^2 + \frac{30959}{576}m^3\right)e^3\cos(2\xi \underset{(44)}{+} 3\varphi);\end{aligned}$$

on a trouvé, n° 18,

$$\begin{aligned}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt = &\left(\frac{3}{4}m^2 + \frac{3}{4}m^3\right)\cos 2\xi + \left(-\frac{9}{2}m^2 - 9m^3\right)e\cos(2\xi - \varphi)\\ &+\left(\frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{3}\right)e\cos(2\xi + \varphi)\\ &-\left(\frac{15}{8}m + \frac{45}{32}m^2 + \frac{4579}{512}m^3\right)e^2\cos(2\xi - 2\varphi)\\ &+\left(\frac{3}{8}m^2 + \frac{3}{16}m^3\right)e^2\cos(2\xi + 2\varphi)\\ &+\left(\frac{7}{16}m^2 - \frac{7}{8}m^3\right)e^3\cos(2\xi - 3\varphi)\\ &+\left(\frac{5}{16}m^2 + \frac{m^3}{8}\right)e^3\cos(2\xi + 3\varphi).\end{aligned}$$

En combinant cette valeur avec l'expression suivante

$$\frac{1}{r^2} = 1 + 2\left(1 + \frac{m^2}{3}\right)e\cos\varphi + \frac{5}{2}e^2\cos 2\varphi + \frac{13}{4}e^3\cos 3\varphi,$$

on trouvera

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^2}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt = &\left(-\frac{15}{8}m - \frac{43}{8}m^2 - \frac{10483}{512}m^3\right)e^3\cos(2\xi \underset{(43)}{-} 3\varphi)\\ &+\left(\frac{81}{32}m^2 + \frac{187}{96}m^3\right)e^3\cos(2\xi \underset{(44)}{+} 3\varphi).\end{aligned}$$

En substituant ces valeurs dans la formule, n° 27,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{h}{r^2} + \frac{1}{r^2}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt;$$

et, en supposant $h = 1 - \frac{m^2}{3}$, et

$$\frac{dv}{dt} = (2 - 2m - 3c)\, b_{42} \cos(2\xi - 3\varphi) + (2 - 2m + 3c)\, b_{44} \cos(2\xi + 3\varphi),$$

on aura, en comparant les *cosinus* semblables,

$$\left(-1 - 2m + \frac{9}{4}m^2\right) b_{42}$$
$$= \left(1 - \frac{m^2}{3}\right)\left(-\frac{45}{32}m - \frac{6467}{384}m^2 - \frac{3109109}{36864}m^3\right) - \left(\frac{15}{8}m + \frac{43}{8}m^2 + \frac{10483}{512}m^3\right),$$
$$(5 - 2m)\, b_{44} = \left(\frac{3409}{192}m^2 + \frac{30959}{576}m^3\right) + \left(\frac{81}{32}m^2 + \frac{187}{96}m^3\right).$$

La résolution de ces équations donnera

$$b_{42} = \frac{105}{32}m + \frac{6011}{384}m^2 + \frac{2964653}{36864}m^3,$$
$$b_{44} = \frac{779}{182}m^2 + \frac{7351}{576}m^3.$$

116. Reprenons maintenant, au moyen de la formule (16), n° 31, le calcul des deux inégalités dépendantes des angles $2\xi - 2\varphi - \varphi'$, $2\xi - 2\varphi + \varphi'$.

Soit, n° 35, $\delta r = -r_{,}^{2}\, \delta\frac{1}{r} + r_{,}^{3}\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2$, en supposant, n°s 26 et 21,

$$\delta\frac{1}{r} = -\frac{3}{2}m^2 e' \cos\varphi' + \left(\frac{21}{8}m + \frac{1113}{64}m^2\right) ee' \cos(\varphi - \varphi')$$
$$-\left(\frac{21}{8}m + \frac{837}{64}m^2\right) ee' \cos(\varphi + \varphi')$$
$$+\frac{21}{4}m e^2 e' \cos(2\varphi - \varphi') - \frac{21}{4}m e^2 e' \cos(2\varphi + \varphi')$$
$$+\left(\frac{7}{2}m^2 + \frac{157}{8}m^3\right) e' \cos(2\xi - \varphi')$$
$$-\left(\frac{m^2}{2} + \frac{91}{24}m^3\right) e' \cos(2\xi + \varphi')$$
$$+\left(\frac{35}{8}m + \frac{1269}{64}m^2 + \frac{47255}{768}m^3\right) ee' \cos(2\xi - \varphi - \varphi')$$
$$-\left(\frac{15}{8}m + \frac{97}{64}m^2 - \frac{49997}{768}m^3\right) ee' \cos(2\xi - \varphi + \varphi')$$

$$-\frac{105}{8}m^2 e^2 e' \cos(2\xi - 2\varphi - \varphi')$$
$$+\frac{15}{8}m^2 e^2 e' \cos(2\xi - 2\varphi + \varphi'),$$

$$\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2 = -\frac{191}{48}m^2 ee' \cos(2\xi - \varphi - \varphi') - \frac{13}{16}m^2 ee' \cos(2\xi - \varphi + \varphi'),$$
$$r_1^2 = 1 - 2e\cos\varphi - \frac{e^2}{2}\cos 2\varphi\,;\quad r_1^3 = 1;$$

on conclut

$$\delta r = -\left(\frac{21}{8}m + \frac{1209}{64}m^2\right) ce' \cos(\varphi - \varphi')$$
$$+\left(\frac{21}{8}m + \frac{741}{64}m^2\right) ee' \cos(\varphi + \varphi')$$
$$-\frac{21}{8}m e^2 e' \cos(2\varphi - \varphi') + \frac{21}{8}m e^2 e' \cos(2\varphi + \varphi')$$
$$-\left(\frac{7}{2}m^2 + \frac{157}{8}m^3\right) e' \cos(2\xi - \varphi')$$
$$+\left(\frac{m^2}{2} + \frac{91}{24}m^3\right) e' \cos(2\xi + \varphi')$$
$$-\left(\frac{35}{8}m + \frac{1045}{64}m^2 + \frac{35239}{768}m^3\right) ee' \cos(2\xi - \varphi - \varphi')$$
$$+\left(\frac{15}{8}m + \frac{65}{64}m^2 - \frac{53533}{768}m^3\right) ee' \cos(2\xi - \varphi + \varphi')$$
$$+\left(\frac{35}{8}m + \frac{2165}{64}m^2\right) e^2 e' \cos(2\xi - 2\varphi - \varphi')$$
$$-\left(\frac{15}{8}m + \frac{225}{64}m^2\right) e^2 e' \cos(2\xi - 2\varphi + \varphi').$$

On a, d'ailleurs,

$$r = 1 - e\cos\varphi - \frac{e^2}{2}\cos 2\varphi - \frac{15}{8}m e \cos(2\xi - \varphi),$$
$$dr = \left(1 - \frac{11}{12}m^2\right) e \sin\varphi + e^2 \sin 2\varphi$$
$$+ 2m^2 \sin 2\xi + \left(\frac{15}{8}m + \frac{35}{32}m^2\right) e \sin(2\xi - \varphi)\,;$$

d'où l'on tire d'abord

$$r\delta r = \left(\frac{105}{16}m + \frac{1293}{32}m^2\right) e^2 e' \cos(2\xi - 2\varphi - \varphi')$$
$$-\left(\frac{45}{16}m + \frac{27}{16}m^2\right) e^2 e' \cos(2\xi - 2\varphi + \varphi'),$$

et, par conséquent,

$$\frac{d.r\delta r}{dt} = \left(\frac{315}{16}m^2 + \frac{891}{4}m^3\right) e^2 e' \sin(2\xi - 2\varphi - \varphi')$$
$$+ \left(-\frac{45}{16}m^2 + \frac{81}{32}m^3\right) e^2 e' \sin(2\xi - 2\varphi + \varphi');$$

on aura ensuite

$$\frac{dr\delta r}{dt} = \left(\frac{35}{16}m + \frac{99}{8}m^2 + \frac{140281}{3072}m^3\right) e^2 e' \sin(2\xi - 2\varphi - \varphi')$$
$$+ \left(-\frac{15}{16}m - \frac{103}{32}m^2 + \frac{37003}{1536}m^3\right) e^2 e' \sin(2\xi - 2\varphi + \varphi').$$

En retranchant cette seconde valeur du double de la première, on trouve

$$\frac{2d.r\delta r - dr\delta r}{dt} = \left(-\frac{35}{16}m + 27m^2 + \frac{544007}{3072}m^3\right) e^2 e' \sin(2\xi - 2\varphi - \varphi')$$
$$+ \left(\frac{15}{16}m - \frac{77}{32}m^2 - \frac{29227}{1536}m^3\right) e^2 e' \sin(2\xi - 2\varphi + \varphi');$$

d'où, en différentiant, on conclut

$$\frac{d.(2d.r\delta r - dr\delta r)}{dt^2} = \left(\frac{105}{16}m^2 - \frac{2697}{32}m^3 - \frac{534035}{1024}m^4\right) e^2 e' \cos(2\xi - \underset{(45)}{2\varphi} - \varphi')$$
$$+ \left(-\frac{15}{16}m^2 + \frac{61}{16}m^3 + \frac{43933}{1536}m^4\right) e^2 e' \cos(2\xi - \underset{(46)}{2\varphi} + \varphi').$$

Le développement des fonctions R et $\frac{dR}{dv}$ a donné

$$R = \left(\frac{105}{16}m^2 + \frac{75}{64}m^3 + \frac{45505}{1024}m^4\right) e^2 e' \cos(2\xi - \underset{(45)}{2\varphi} - \varphi')$$
$$- \left(\frac{15}{16}m^2 - \frac{315}{64}m^3 - \frac{84161}{1024}m^4\right) e^2 e' \cos(2\xi - \underset{(46)}{2\varphi} + \varphi');$$

$$\frac{dR}{dv} = \left(-\frac{105}{8}m^2 + \frac{135}{16}m^3 + \frac{90185}{512}m^4\right) e^2 e' \sin(2\xi - \underset{(45)}{2\varphi} - \varphi')$$
$$+ \left(\frac{15}{8}m^2 - \frac{135}{16}m^3 - \frac{75503}{512}m^4\right) e^2 e' \sin(2\xi - \underset{(46)}{2\varphi} + \varphi').$$

En multipliant respectivement les deux termes de la valeur de $\frac{dR}{dv}$ par les fractions

$$-\frac{1}{2-3m-2c}=\frac{1}{3m}\left(1+\frac{m}{2}+\frac{79}{16}m^2\right),$$

$$-\frac{1}{2-m-2c}=\frac{1}{m}\left(1+\frac{3}{2}m+\frac{261}{16}m^2\right),$$

on aura

$$\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt=\left(-\frac{35}{8}m+\frac{5}{8}m^2+\frac{59165}{1536}m^3\right)e^2e'\cos(2\xi-\underset{(45)}{2\varphi}-\varphi')$$

$$+\left(\frac{15}{8}m-\frac{45}{8}m^2-\frac{66323}{512}m^3\right)e^2e'\cos(2\xi-\underset{(46)}{2\varphi'}+\varphi).$$

En supposant, n° 32,

$$r'\frac{dR}{dr'}=-3R=-\left(\frac{45}{8}m^2+\frac{135}{32}m^3+\frac{21729}{512}m^4\right)e^2\cos(2\xi-2\varphi),$$

$$\frac{dR}{dv'}=-\frac{dR}{dv}=\left(\frac{15}{4}m^2-\frac{2711}{256}m^4\right)e^2\sin(2\xi-2\varphi),$$

on aura

$$r'\frac{dR}{dr'}e'\sin\varphi'+2\frac{dR}{dv'}e'\cos\varphi'$$

$$=\left(\frac{105}{16}m^2+\frac{135}{64}m^3+\frac{10885}{1024}m^4\right)e^2e'\sin(2\xi-\underset{(45)}{2\varphi}-\varphi')$$

$$+\left(\frac{15}{16}m^2-\frac{135}{64}m^3-\frac{32573}{1024}m^4\right)e^2e'\sin(2\xi-\underset{(46)}{2\varphi}+\varphi').$$

En multipliant respectivement les deux termes de cette expression par les facteurs $-\frac{1}{3}\left(1+\frac{m}{2}+\frac{79}{16}m^2\right)$ et $-\left(1+\frac{3}{2}m+\frac{261}{16}m^2\right)$, on aura

$$-m\int\left(r'\frac{dR}{dr'}e'\sin\varphi'+2\frac{dR}{dv'}e'\cos\varphi'\right)$$

$$=\left(-\frac{35}{16}m^2-\frac{115}{64}m^3-\frac{45145}{3072}m^4\right)e^2e'\cos(2\xi-\underset{(45)}{2\varphi}-\varphi')$$

$$-\left(\frac{15}{16}m^2-\frac{45}{64}m^3-\frac{20153}{1024}m^4\right)e^2e'\cos(2\xi-\underset{(46)}{2\varphi}+\varphi').$$

Ajoutant à cette valeur celle de la fonction $m\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt$ donnée plus haut, on aura

$$\int d''R = \left(\frac{105}{16}m^2 + \frac{75}{64}m^3 - \frac{24395}{1024}m^4\right)e^2\,e'\cos(2\xi - \underset{(45)}{2\varphi} - \varphi')$$

$$+\left(-\frac{15}{16}m^2 + \frac{315}{64}m^3 + \frac{112493}{1024}m^4\right)e^2\,e'\cos(2\xi - \underset{(46)}{2\varphi} + \varphi').$$

Si dans l'équation n° 14

$$\int d'R = R - \int d''R,$$

on substitue pour R et $\int d''R$ leurs valeurs, on aura

$$\int d'R = \left[(0)\,m^2 + (0)\,m^3 + \frac{17475}{256}m^4\right]e^2\,e'\cos(2\xi - \underset{(45)}{2\varphi} - \varphi')$$

$$+\left[(0)\,m^2 + (0)\,m^3 - \frac{7083}{256}m^4\right]e^2\,e'\cos(2\xi - \underset{(46)}{2\varphi} + \varphi').$$

Au moyen des valeurs précédentes de $\delta\frac{1}{r}$ et de r, et en observant que l'on a $\frac{\delta r}{r} = -r\,\delta\frac{1}{r}$, on formera la suivante :

$$\frac{\delta r}{r} = \frac{3}{2}m^2\,e'\cos\varphi' - \left(\frac{21}{8}m + \frac{1161}{64}m^2\right)e\,e'\cos(\varphi - \varphi')$$

$$+\left(\frac{21}{8}m + \frac{789}{64}m^2\right)e\,e'\cos(\varphi + \varphi')$$

$$-\left(\frac{63}{16}m + \frac{3579}{128}m^2\right)e^2\,e'\cos(2\varphi - \varphi')$$

$$+\left(\frac{63}{16}m + \frac{2271}{128}m^2\right)e^2\,e'\cos(2\varphi + \varphi')$$

$$-\frac{7}{2}m^2\,e'\cos(2\xi - \varphi') + \frac{m^2}{2}e'\cos(2\xi + \varphi')$$

$$-\left(\frac{35}{8}m + \frac{1157}{64}m^2\right)e\,e'\cos(2\xi - \varphi - \varphi')$$

$$+\left(\frac{15}{8}m + \frac{81}{64}m^2\right)e\,e'\cos(2\xi - \varphi + \varphi')$$

$$+\left(\frac{35}{16}m + \frac{3061}{128}m^2\right)e^2\,e'\cos(2\xi - 2\varphi - \varphi')$$

$$-\left(\frac{15}{16}m + \frac{353}{128}m^2\right)e^2\,e'\cos(2\xi - 2\varphi + \varphi').$$

On a d'ailleurs, n° 16, en observant que $r\frac{dR}{dr} = 2R$,

$$r\frac{dR}{dr} = \frac{m^2}{2} - \left(m^2 + \frac{135}{16}m^3\right) e \cos\varphi - \frac{m^2}{4} e^2 \cos 2\varphi$$
$$+ \frac{3}{2} m^2 \cos 2\xi - \left(\frac{9}{2}m^2 + \frac{15}{8}m^3\right) e \cos(2\xi - \varphi)$$
$$+ \frac{15}{4} m^2 e^2 \cos(2\xi - 2\varphi).$$

En combinant ces valeurs, on conclut

$$\frac{\delta r}{r}\left(r\frac{dR}{dr}\right) = \left(\frac{21}{64}m^2 + \frac{13215}{512}m^4\right) e^2 e' \cos(2\xi - \underset{(45)}{2\varphi} - \varphi')$$
$$+ \left(\frac{99}{64}m^2 + \frac{7749}{512}m^4\right) e^2 e' \cos(2\xi - \underset{(46)}{2\varphi} + \varphi');$$

on aura ensuite, n°s 30 et 18,

$$\frac{d.\delta v}{dt} = -3m^2 e' \cos\varphi' + \left(\frac{21}{4}m + \frac{1065}{32}m^2\right) e e' \cos(\varphi - \varphi')$$
$$- \left(\frac{21}{4}m + \frac{885}{32}m^2\right) e e' \cos(\varphi + \varphi')$$
$$+ \left(\frac{105}{8}m + \frac{5661}{64}m^2\right) e^2 e' \cos(2\varphi - \varphi')$$
$$- \left(\frac{105}{8}m + \frac{4089}{64}m^2\right) e^2 e' \cos(2\varphi + \varphi')$$
$$+ \frac{35}{4} m e e' \cos(2\xi - \varphi - \varphi') - \frac{15}{4} m e e' \cos(2\xi - \varphi + \varphi');$$

$$\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt = -\frac{135}{16}m^3 e \cos\varphi + \left(\frac{3}{4}m^2 + \frac{3}{4}m^3\right)\cos 2\xi$$
$$- \left(\frac{9}{2}m^2 + 9m^3\right) e \cos(2\xi - \varphi)$$
$$- \left(\frac{15}{8}m + \frac{45}{32}m^2\right) e^2 \cos(2\xi + 2\varphi);$$

d'où l'on tire

$$\frac{d.\delta v}{dt}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt = \left(\frac{621}{64}m^3 + \frac{11349}{512}m^4\right) e^2 e' \cos(2\xi - \underset{(45)}{2\varphi} - \varphi')$$
$$+ \left(-\frac{261}{64}m^3 - \frac{21753}{512}m^4\right) e^2 e' \cos(2\xi - \underset{(46)}{2\varphi} + \varphi').$$

En rassemblant les valeurs précédentes, et en observant que $\delta . r\frac{d\text{R}}{dr} = 2\delta\text{R}$, on formera la suivante :

$$3\int d'.\delta\text{R} + 2\delta.r\frac{d\text{R}}{dr} - \frac{\delta r}{r}\left(r\frac{d\text{R}}{dr}\right) + \frac{d.\delta v}{dt}\left[\int\left(\frac{d\text{R}}{dv}\right)dt\right]$$
$$= \left(\frac{105}{4}m^2 + \frac{225}{16}m^3 + \frac{96997}{256}m^4\right) e^2\, e'\, \cos(2\xi - \underset{(45)}{2\varphi} - \varphi')$$
$$- \left(\frac{15}{4}m^2 - \frac{225}{16}m^3 - \frac{48161}{256}m^4\right) e^2\, e'\, \cos(2\xi - \underset{(46)}{2\varphi} + \varphi').$$

En substituant cette valeur et celle de la fonction $\frac{d.(2d.r\delta r - dr\delta r)}{dt^2}$ dans la formule (16), n° 31, et supposant $h = 1 - \frac{m^2}{3}$, on trouvera

$$\frac{d.\delta v}{dt} = \left(1+\frac{m^2}{3}\right)\left(-\frac{315}{16}m^2 - \frac{3147}{32}m^3 - \frac{922023}{1024}m^4\right) e^2 e' \cos(2\xi - \underset{(45)}{2\varphi} - \varphi')$$
$$+ \left(1+\frac{m^2}{3}\right)\left(\frac{45}{16}m^2 - \frac{41}{4}m^3 - \frac{245033}{1536}m^4\right) e^2 e' \cos(2\xi - \underset{(46)}{2\varphi} + \varphi').$$

On a d'ailleurs, d'après l'expression de la longitude v, n° 29, en ne tenant compte que des deux inégalités que nous considérons,

$$\frac{d.\delta v}{dt} = \left(-3m + \frac{3}{2}m^2 + \frac{225}{16}m^3\right) b_{45}\, e^2\, e'\, \cos(2\xi - 2\varphi - \varphi')$$
$$+ \left(-m + \frac{3}{2}m^2 + \frac{225}{16}m^3\right) b_{46}\, e^2\, e'\, \cos(2\xi - 2\varphi + \varphi').$$

En comparant cette expression à la précédente, on trouve, toute réduction faite,

$$b_{45} = \frac{105}{16}m + \frac{577}{16}m^2 + \frac{359545}{1024}m^3,$$
$$b_{46} = -\frac{45}{16}m + \frac{193}{32}m^2 + \frac{196739}{1536}m^3.$$

33..

117. Reprenons, au moyen des deux dernières formules (A), n° 1, le calcul des inégalités dépendantes des angles 4ξ et $4\xi+\varphi$, n°s 26 et 30.

Le développement de la fonction perturbatrice, en portant l'approximation jusqu'aux quantités de l'ordre m^7 pour la première, et de l'ordre m^6 pour la seconde, a donné

$$R=\left[\begin{array}{l}\left(\frac{9}{32}m^4+\frac{21}{16}m^5+\frac{61}{16}m^6+\frac{8323}{960}m^7\right)\\ +\left(\frac{45}{16}m^3+\frac{831}{64}m^4+\frac{55259}{1024}m^5\right)e^2\end{array}\right]\cos\underset{(86)}{4\xi}$$
$$+\left(\frac{45}{64}m^4+\frac{195}{64}m^5\right)e\cos(4\xi\underset{(88)}{+}\varphi),$$

$$\frac{dR}{dv}=\left[\begin{array}{l}-\left(\frac{9}{16}m^4+\frac{21}{8}m^5+\frac{31}{4}m^6+\frac{439}{24}m^7\right)\\ -\left(\frac{45}{8}m^3+\frac{831}{32}m^4+\frac{57029}{512}m^5\right)e^2\end{array}\right]\sin\underset{(86)}{4\xi}$$
$$-\left(\frac{45}{32}m^4+\frac{195}{32}m^5\right)e\sin(4\xi\underset{(88)}{+}\varphi).$$

En multipliant respectivement les deux termes de la seconde de ces valeurs par les fonctions

$$\frac{1}{4-4m}=\frac{1}{4}+\frac{m}{4}+\frac{m^2}{4}+\frac{m^3}{4};\quad \frac{1}{4-4m+c}=\frac{1}{5}+\frac{4}{25}m,$$

on en conclura

$$-\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt=\left[\begin{array}{l}-\left(\frac{9}{64}m^4+\frac{51}{64}m^5+\frac{175}{64}m^6+\frac{1403}{192}m^7\right)\\ -\left(\frac{45}{32}m^3+\frac{1011}{128}m^4+\frac{73205}{2048}m^5\right)e^2\end{array}\right]\cos\underset{(86)}{4\xi}$$
$$-\frac{1}{5}\left(\frac{45}{32}m^4+\frac{231}{32}m^5\right)e\cos(4\xi\underset{(88)}{+}\varphi).$$

En substituant les valeurs précédentes de R et de

$\int \left(\frac{dR}{dv}\right) dt$, dans la formule

$$2\int d'R + r\frac{dR}{dr} = 4R + 2m\int \left(\frac{dR}{dv}\right) dt,$$

on aura ensuite

$$2\int d'R + r\frac{dR}{dr} = \left[\begin{array}{l} \left(\frac{9}{8}m^4 + \frac{177}{32}m^5 + \frac{539}{32}m^6 + \frac{19271}{480}m^7\right) \\ + \left(\frac{45}{4}m^3 + \frac{219}{4}m^4 + \frac{59303}{256}m^5\right)e^2 \end{array}\right] \underset{(86)}{\cos 4\xi}$$
$$+ \left(\frac{45}{16}m^4 + \frac{51}{4}m^5\right) e \cos\underset{(88)}{(4\xi + \varphi)}.$$

Au moyen de la valeur de $\delta\frac{1}{r}$, trouvée par les approximations successives, on a formé les suivantes :

$$\delta\frac{1}{r} = \left(\frac{7}{8}m^4 + \frac{2737}{480}m^5\right)\cos 4\xi$$
$$+ \left(\frac{495}{128}m^3 + \frac{13725}{512}m^4 + \frac{5324183}{40960}m^5\right) e \cos(4\xi - \varphi)$$
$$+ \left(\frac{805}{256}m^4 + \frac{1921^{(*)}}{96}m^5\right) e \cos(4\xi + \varphi);$$

$$\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2 = \left[\begin{array}{l} \left(\frac{m^4}{2} + \frac{19}{6}m^5 + \frac{151}{12}m^6 + \frac{169051}{4320}m^7\right) \\ + \left(\frac{975}{128}m^3 + \frac{24359}{512}m^4 + \frac{5517409}{24576}m^5\right)e^2 \end{array}\right] \cos 4\xi$$
$$+ \left(\frac{15}{8}m^3 + \frac{377}{32}m^4 + \frac{27679}{512}m^5\right) e \cos(4\xi - \varphi)$$
$$+ \left(\frac{33}{16}m^4 + \frac{411}{32}m^5\right) e \cos(4\xi + \varphi);$$

$$\left(\delta\frac{1}{r}\right)^3 = \frac{1095}{256}m^3 e^2 \cos 4\xi + \frac{15}{16}m^3 e \cos(4\xi - \varphi).$$

En substituant ces valeurs dans la formule

$$P = -r_1^3\left(\delta\frac{1}{r}\right) + \frac{3}{2}r_1^4\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2 - 2r_1^5\left(\delta\frac{1}{r}\right)^3,$$

(*) Le calcul de ce terme se trouvera plus loin, page 518.

et, en supposant $r_1^3 = 3e^2 - 3e\cos\varphi$, $r_1^4 = 1 - 4e\cos\varphi$, $r_1^5 = 1$, on aura

$$\mathrm{P}\left[\begin{array}{l}\left(\frac{3}{4}m^4 + \frac{19}{4}m^5 + \frac{147}{8}m^6 + \frac{159931}{2880}m^7\right)\\ + \left(\frac{1485}{128}m^2 + \frac{38853}{512}m^4 + \frac{2980353}{8192}m^6\right)e^2\end{array}\right]\cos \underset{(86)}{4\xi}$$

$$+\left(\frac{93}{32}m^4 + \frac{2931}{160}m^5\right)e\cos(4\xi \underset{(88)}{+} \varphi)$$

Si dans les deux équations de condition, n° 15,

$$a_{86}[(4-4m)^2-1] \quad = (4-4m)^2\,\mathrm{P}_{86} + 2\int d'\mathrm{R}_{86} + r\frac{d\mathrm{R}_{86}}{dr},$$

$$a_{88}[(4-4m+c)^2-1] = (4-4m+c)^2\,\mathrm{P}_{88} + 2\int d'\mathrm{R}_{88} + r\frac{d\mathrm{R}_{88}}{dr},$$

on substitue ces différentes valeurs, et qu'on remplace c par sa valeur, n° 24, on formera les équations suivantes :

$$a_{86}(15 - 32m + 16m^2) = (16 - 32m + 16m^2)$$
$$\times\left[\begin{array}{l}\left(\frac{3}{4}m^4 + \frac{19}{4}m^5 + \frac{147}{8}m^6 + \frac{159931}{2880}m^7\right)\\ + \left(\frac{1485}{128}m^2 + \frac{38853}{512}m^4 + \frac{2980353}{8192}m^6\right)e^2\end{array}\right]$$
$$+\left(\frac{9}{8}m^4 + \frac{177}{32}m^5 + \frac{539}{32}m^6 + \frac{19271}{480}m^7\right)$$
$$+\left(\frac{45}{4}m^2 + \frac{219}{4}m^4 + \frac{59303}{256}m^6\right)e^2;$$

$$a_{88}(24 - 40m) = (25 - 40m)\left(\frac{93}{32}m^4 + \frac{2931}{160}m^5\right)$$
$$+\frac{45}{16}m^4 + \frac{51}{4}m^5;$$

d'où l'on conclura

$$a_{86} = \frac{7}{8}m^4 + \frac{2737}{480}m^5 + \frac{162869}{7200}m^6 + \frac{7554833}{108000}m^7$$
$$+\left(\frac{105}{8}m^2 + \frac{2811}{32}m^4 + \frac{656483}{1536}m^6\right)e^2;$$
$$a_{88} = \frac{805}{256}m^4 + \frac{1921}{96}m^5.$$

Pour obtenir le même degré d'approximation dans l'expression de la longitude, observons que si dans la formule

$$\frac{1}{r^2} = \frac{2}{r_1}\,\delta\frac{1}{r} + \left(\delta\frac{1}{r}\right)^2,$$

on suppose $\frac{1}{r_1} = 1 + e\cos\varphi$,

$$\delta\frac{1}{r} = \left[\begin{array}{l} \frac{7}{8}m^4 + \frac{2737}{480}m^5 + \frac{162869}{7200}m^6 + \frac{7554833}{108000}m^7 \\ + \left(\frac{105}{8}m^3 + \frac{2811}{32}m^4 + \frac{656483}{1536}m^5\right)e^2 \end{array}\right]\cos \underset{(86)}{4\xi}$$
$$+ \left(\frac{495}{128}m^3 + \frac{13725}{512}m^4 + \frac{5324183}{40960}m^5\right)e\cos(4\xi \underset{(87)}{-} \varphi)$$
$$+ \left(\frac{805}{256}m^4 + \frac{1921}{96}m^5\right)e\cos(4\xi \underset{(88)}{+} \varphi),$$

et qu'on remplace $\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2$ par sa valeur donnée plus haut, on trouvera

$$\frac{1}{r^2} = \left[\begin{array}{l} \left(\frac{9}{4}m^4 + \frac{3497}{240}m^5 + \frac{208169}{3600}m^6 + \frac{19335941}{108000}m^7\right) \\ + \left(\frac{2415}{64}m^3 + \frac{64823}{256}m^4 + \frac{75527877}{61440}m^5\right)e^2 \end{array}\right]\cos \underset{(86)}{4\xi}$$
$$+ \left(\frac{1181}{128}m^4 + \frac{1757}{30}m^5\right)e\cos(4\xi \underset{(88)}{+} \varphi).$$

On a, par ce qui précède,

$$\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt = \left[\frac{3}{4}m^2 + \frac{3}{4}m^3 + \frac{m^4}{2} + \frac{m^5}{2} - \left(\frac{15}{8}m^2 + \frac{15}{8}m^3\right)e^2\right]\cos 2\xi$$
$$- \left(\frac{9}{2}m^2 + 9m^3\right)e\cos(2\xi - \varphi)$$
$$+ \left(\frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{3} + \frac{67}{72}m^4\right)e\cos(2\xi + \varphi)$$
$$+ \left[\begin{array}{l} \frac{9}{64}m^4 + \frac{51}{64}m^5 + \frac{175}{64}m^6 + \frac{4209}{576}m^7 \\ + \left(\frac{45}{32}m^3 + \frac{1011}{128}m^4 + \frac{73205}{2048}m^5\right)e^2 \end{array}\right]\cos 4\xi$$

$$+\left(\frac{15}{16}m^2+\frac{399}{64}m^4+\frac{87785}{3072}m^6\right)e\cos(4\xi-\varphi)$$
$$+\left(\frac{9}{32}m^4+\frac{231}{160}m^6\right)e\cos(4\xi+\varphi),$$

$$\frac{1}{r^2}=1+\frac{e^2}{2}+\frac{m^2}{3}+\left(2+\frac{2}{3}m^2\right)e\cos\varphi$$
$$+\left[2m^2+\frac{19}{3}m^3+\left(\frac{75}{8}m+\frac{1009}{32}m^2+\frac{186845}{1536}m^3\right)e^2\right]\cos 2\xi$$
$$+\left(\frac{15}{4}m+\frac{203}{16}m^2+\frac{34585}{768}m^3\right)e\cos(2\xi-\varphi)$$
$$+\left(\frac{41}{8}m^2+\frac{379}{24}m^3\right)e\cos(2\xi+\varphi).$$

Au moyen de ces valeurs, on forme la suivante :

$$\frac{1}{r^2}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt=\left[\begin{array}{l}\frac{57}{64}m^4+\frac{251}{64}m^5+\frac{1079}{96}m^6+\frac{7567}{288}m^7\\+\left(\frac{435}{64}m^3+\frac{5175}{256}m^4+\frac{11775873}{61440}m^5\right)e^2\end{array}\right]\underset{(86)}{\cos 4\xi}$$
$$+\left(\frac{91}{32}m^4+\frac{11521}{960}m^6\right)e\cos\underset{(88)}{(4\xi+\varphi)}.$$

En substituant ces valeurs dans la formule générale

$$\frac{dv}{dt}=\frac{h}{r^2}+\frac{1}{r^2}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt,$$

et en observant qu'on peut supposer ici $h=1-\frac{e^2}{2}-\frac{m^2}{3}$,

$$\frac{dv}{dt}=(4-4m)\,b_{86}\cos 4\xi+(5-4m)\,b_{88}\cos(4\xi+\varphi),$$

on aura, en comparant les *cosinus* semblables dans les deux membres,

$$(4-4m)\,b_{86}=\left(1-\frac{e^2}{2}-\frac{m^2}{3}\right)\left[\begin{array}{l}\frac{9}{4}m^4+\frac{3497}{240}m^5+\frac{208169}{3600}m^6+\frac{19335941}{108000}m^7\\+\left(\frac{2415}{64}m^3+\frac{64823}{256}m^4+\frac{75527877}{61440}m^5\right)e^2\end{array}\right]$$
$$+\left(\frac{57}{64}m^4+\frac{251}{64}m^5+\frac{1079}{96}m^6+\frac{7567}{288}m^7\right)$$
$$+\left(\frac{435}{64}m^3+\frac{5175}{256}m^4+\frac{11775873}{61440}m^5\right)e^2;$$

$$(5-4m)\,b_{11}=\left(\frac{1181}{128}\,m^4+\frac{1757}{30}\,m^5\right)$$
$$+\left(\frac{91}{32}\,m^4+\frac{11521}{960}\,m^5\right);$$

d'où l'on conclura

$$b_{16}=\left(\frac{201}{256}\,m^4+\frac{649}{120}\,m^5+\frac{647623}{28800}\,m^6+\frac{31363361}{432000}\,m^7\right)$$
$$+\left(\frac{1425}{128}\,m^3+\frac{40555}{512}\,m^4+\frac{52774867}{122880}\,m^5\right)e^2;$$

$$b_{11}=\frac{309}{128}\,m^4+\frac{15403}{960}\,m^5.$$

118. La fonction R, n° 6, contient les termes suivans :

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}=&-\frac{53}{32}\,m^2\,e\,e'^3\cos(\varphi-3\varphi')\\
&-\frac{53}{32}\,m^2\,e\,e'^3\cos(\varphi+3\varphi')\\
&+\frac{77}{32}\,m^2\,e'^4\cos 4\varphi'\\
&-\frac{2535}{64}\,m^2\,e\,e'^3\cos(2\xi-\varphi-3\varphi')\\
&-\frac{3}{64}\,m^2\,e\,e'^3\cos(2\xi-\varphi+3\varphi').
\end{aligned}$$

La fonction que nous avons désignée par P, n° 13, contient les termes

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}=&-\frac{159}{32}\,m^2\,e\,e'^3\cos(\varphi-3\varphi')\\
&-\frac{159}{32}\,m^2\,e\,e'^3\cos(\varphi+3\varphi')\\
&+\frac{845}{32}\,m^2\,e\,e'^3\cos(2\xi-\varphi-3\varphi')\\
&+\frac{m^2}{32}\,e\,e'^3\cos(2\xi-\varphi+3\varphi').
\end{aligned}$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (6), n° 13, et en l'intégrant ensuite, on trouve que la fonction

$\delta\frac{1}{r}$ contient les termes suivans :

$$\delta\frac{1}{r} = \frac{371}{192} m\, e\, e'^2 \cos(\varphi - 3\varphi')$$
$$- \frac{371}{192} m\, e\, e'^2 \cos(\varphi + 3\varphi')$$
$$- \frac{77}{16} m^2 e'^4 \sin 4\varphi'$$
$$+ \frac{845}{64} m\, e\, e'^2 \cos(2\xi - \varphi - 3\varphi')$$
$$- \frac{5}{64} m\, e\, e'^2 \cos(2\xi - \varphi + 3\varphi');$$

et, au moyen de l'équation $\frac{dv}{dt} = 2\delta\frac{1}{r}$, on en conclut

$$\delta v = \frac{371}{96} m\, e\, e'^2 \sin(\varphi - 3\varphi')$$
$$- \frac{371}{96} m\, e\, e'^2 \sin(\varphi + 3\varphi')$$
$$- \frac{77}{32} m\, e'^4 \sin 4\varphi'$$
$$+ \frac{845}{32} m\, e\, e'^2 \cos(2\xi - \varphi - 3\varphi')$$
$$- \frac{5}{32} m\, e\, e'^2 \cos(2\xi - \varphi - 3\varphi').$$

119. Reprenons le calcul des inégalités dépendantes de la *parallaxe solaire*.

En calculant séparément les termes résultans de la première et de la seconde partie de l'expression de la fonction perturbatrice R, n° 3, et en désignant respectivement par R_1 et R_2 ces deux parties, nous avons trouvé

$$R_1 = -\frac{315}{32} m^2 \frac{a}{a'} e'^2 \cos(\xi - 2\varphi') - \frac{15}{16} m^2 \frac{a}{a'} e'^2 \cos(\xi + 2\varphi'),$$

$$R_2 = \frac{159}{64} m^2 \frac{a}{a'} e'^2 \cos(\xi - 2\varphi') + \frac{33}{64} m^2 \frac{a}{a'} e'^2 \cos(\xi + 2\varphi')$$
$$+ \frac{9}{16} m^2 \frac{a}{a'} \gamma^2 \cos(\xi - 2\eta) + \frac{15}{32} m^2 \frac{a}{a'} \gamma^2 \cos(3\xi + 2\eta).$$

En ajoutant ces valeurs, on en conclura

$$R = -\frac{471}{64} m^2 \frac{a}{a'} e'^2 \cos(\xi - 2\varphi') - \frac{27}{64} m^2 \frac{a}{a'} e'^2 \cos(\xi + 2\varphi')$$
$$+ \frac{9}{16} m^2 \frac{a}{a'} \gamma^2 \cos(\xi - 2\eta) + \frac{15}{32} m^2 \frac{a}{a'} \gamma^2 \cos(3\xi - 2\eta);$$

et, en observant que l'on peut supposer ici $\int d'R = R$, et que l'on a, n° 16,

$$r\frac{dR}{dr} = 2R_1 + 3R_2,$$

on en conclura

$$2\int d'R + r\frac{dR}{dr} = -\frac{1725}{64} m^2 \frac{a}{a'} e'^2 \cos(\xi - 2\varphi') - \frac{75}{64} m^2 \frac{a}{a'} e'^2 \cos(\xi + 2\varphi')$$
$$+ \frac{45}{16} m^2 \frac{a}{a'} \gamma^2 \cos(\xi - 2\eta) + \frac{75}{32} m^2 \frac{a}{a'} \gamma^2 \cos(3\xi - 2\eta).$$

Au moyen des valeurs de $\delta\frac{1}{r}$, n° 26, on a trouvé

$$\delta\frac{1}{r} = \frac{15}{16} m \frac{a}{a'} e' \cos(\xi - \varphi');$$
$$\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2 = \frac{35}{8} m^2 \frac{a}{a'} e'^2 \cos(\xi - 2\varphi')$$
$$- \frac{15}{8} m^2 \frac{a}{a'} e'^2 \cos(\xi + 2\varphi')$$
$$+ \frac{75}{32} m \frac{a}{a'} e e' \cos(3\xi - \varphi + \varphi').$$

En substituant ces valeurs dans la formule

$$P = -r_1 \delta\frac{1}{r} + \frac{3}{2} r_1^2 \left(\delta\frac{1}{r}\right)^2,$$

et en remplaçant r_1 et r_1^2 par leurs valeurs elliptiques, on aura

$$P = \frac{45}{32} m \frac{a}{a'} e e' \cos(\xi + \varphi - \varphi')$$
$$+ \frac{105}{16} m^2 \frac{a}{a'} e'^2 \cos(\xi - 2\varphi')$$
$$- \frac{45}{16} m^2 \frac{a}{a'} e'^2 \cos(\xi + 2\varphi')$$
$$+ \frac{225}{64} m \frac{a}{a'} e e' \cos(3\xi - \varphi + \varphi').$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation (6), n° 13, on aura

$$\frac{d^2.\delta\frac{1}{r}}{dt^2}+\delta\frac{1}{r}=-\frac{45}{8}m\frac{a}{a'}e\,e'\cos(\xi+\varphi-\varphi')$$
$$+\frac{1305}{64}m^2\frac{a}{a'}e'^2\cos(\xi-2\varphi')$$
$$+\frac{255}{64}m^2\frac{a}{a'}e'^2\cos(\xi+2\varphi')$$
$$-\frac{45}{16}m^2\frac{a}{a'}\gamma^2\cos(\xi-2\eta)$$
$$-\frac{225}{16}m\frac{a}{a'}e\,e'\cos(3\xi-\varphi+\varphi')$$
$$-\frac{75}{32}m^2\frac{a}{a'}\gamma^2\cos(3\xi-2\eta);$$

d'où, en intégrant, on tire

$$\delta\frac{1}{r}=\frac{15}{8}m\frac{a}{a'}e\,e'\cos(\xi+\varphi-\varphi')$$
$$+\frac{435}{128}m\frac{a}{a'}e'^2\cos(\xi-2\varphi')$$
$$-\frac{255}{128}m\frac{a}{a'}e'^2\cos(\xi+2\varphi')$$
$$+\frac{45}{32}m\frac{a}{a'}\gamma^2\cos(\xi-2\eta)$$
$$+\frac{75}{16}m\frac{a}{a'}e\,e'\cos(3\xi-\varphi+\varphi')$$
$$-\frac{25}{64}m\frac{a}{a'}\gamma^2\cos(3\xi-2\eta).$$

Si l'on joint à cette valeur la suivante

$$\delta\frac{1}{r}=\frac{15}{16}m\frac{a}{a'}e'\cos(\xi-\varphi'),$$

trouvée n° 26, qu'on la substitue dans l'équation

$$\frac{1}{r^2}=\frac{2}{r_1}\delta\frac{1}{r}+\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2,$$

en supposant

$$\frac{1}{r_1}=1+e\cos\varphi,\quad \left(\delta\frac{1}{r}\right)^2=\frac{75}{32}m\frac{a}{a'}e\,e'\cos(3\xi-\varphi+\varphi'),$$

on trouvera

$$\frac{1}{r^2} = \frac{75}{16}\, m\frac{a}{a'}\, e\, e' \cos(\xi + \varphi - \varphi')$$
$$+ \frac{435}{64} m\frac{a}{a'}\, e'^2 \cos(\xi - 2\varphi')$$
$$- \frac{255}{64} m\frac{a}{a'}\, e'^2 \cos(\xi + 2\varphi')$$
$$+ \frac{375}{32} m\frac{a}{a'}\, e\, e' \cos(3\xi - \varphi + \varphi').$$

L'expression de s^2, n° 73, contient les termes suivans :

$$s^2 = -\frac{\gamma^2}{2}\cos 2\eta - \frac{15}{16}\, m\frac{a}{a'}\,\gamma^2 \cos(\xi - 2\eta)$$
$$+ \frac{15}{16}\, m\frac{a}{a'}\,\gamma^2 \cos(\xi + 2\eta).$$

En vertu des valeurs trouvées n°s 26 et 72, on a

$$\frac{1}{r^2} = 1 - \frac{15}{8}\, m\frac{a}{a'}\cos\xi + \frac{45}{16}\, m\frac{a}{a'}\,\gamma^2 \cos(\xi - 2\eta)$$
$$- \frac{25}{32}\, m\frac{a}{a'}\,\gamma^2 \cos(3\xi - 2\eta);$$

d'où l'on conclut

$$\frac{1+s^2}{r^2} = \frac{75}{32} m\frac{a}{a'}\,\gamma^2 \cos(\xi - 2\eta)$$
$$+ \frac{45}{32} m\frac{a}{a'}\,\gamma^2 \cos(\xi + 2\eta)$$
$$- \frac{25}{32} m\frac{a}{a'}\,\gamma^2 \cos(3\xi - 2\eta).$$

Si l'on substitue pour $\frac{1}{r^2}$ et $\frac{1+s^2}{r^2}$ leurs valeurs dans la deuxième des équations (A), n° 1, et qu'on suppose $h = 1$, on aura

$$\frac{dv}{dt} = \frac{75}{16}\, m\frac{a}{a'}\, e\, e' \cos(\xi + \varphi - \varphi')$$
$$+ \frac{435}{64}\, m\frac{a}{a'}\, e'^2 \cos(\xi - 2\varphi')$$
$$- \frac{255}{64}\, m\frac{a}{a'}\, e'^2 \cos(\xi + 2\varphi')$$

$$+\frac{75}{32}m\frac{a}{a'}\gamma^2\cos(\xi-2\eta)$$
$$+\frac{45}{32}m\frac{a}{a'}\gamma^2\cos(\xi+2\eta)$$
$$+\frac{375}{32}m\frac{a}{a'}e\,e'\cos(3\xi-\varphi+\varphi')$$
$$-\frac{25}{32}m\frac{a}{a'}\gamma^2\cos(3\xi-2\eta).$$

En intégrant cette équation on voit qu'il en résulte, dans l'expression de la longitude, les termes suivans, qu'il faudra joindre à ceux qui ont été déterminés nos 30 et 77 :

$$\delta v=\frac{75}{32}(*)\,m\frac{a}{a'}e\,e'\sin(\xi+\varphi-\varphi')$$
$$+\frac{435}{64}m\frac{a}{a'}e'^2\sin(\xi-2\varphi')$$
$$-\frac{255}{64}m\frac{a}{a'}e'^2\sin(\xi+2\varphi')$$
$$-\frac{75}{32}m\frac{a}{a'}\gamma^2\sin(\xi-2\eta)$$
$$+\frac{15}{32}m\frac{a}{a'}\gamma^2\sin(\xi+2\eta)$$
$$+\frac{375}{64}m\frac{a}{a'}e\,e'\sin(3\xi-\varphi+\varphi')$$
$$-\frac{25}{32}m\frac{a}{a'}\gamma^2\sin(3\xi-2\eta).$$

120. Reprenons le calcul des inégalités de la longitude qui dépendent du carré et des puissances supérieures de l'inclinaison de l'orbe lunaire à l'écliptique.

Nous porterons d'abord dans le coefficient de l'inégalité relative à l'argument $2\xi-\varphi-2\eta$, l'approxi-

(*) Cette valeur a été employée dans le calcul de l'inégalité à longue période dépendante de l'angle $\xi-\varphi+\varphi'$, n° 102.

mation jusqu'aux quantités de l'ordre m^3, comme nous l'avons fait pour les inégalités analogues dépendantes des argumens $2\xi - \varphi + 2\eta$ et $2\xi + \varphi - 2\eta$, n° 80.

Le développement de la fonction perturbatrice, en portant l'approximation jusqu'aux quantités de l'ordre m^4 et en n'ayant égard qu'aux termes que nous considérons, a donné

$$\delta R = -\left(\frac{3}{8}m^2 + \frac{3}{2}m^3 + \frac{3203}{512}m^4\right) e\,\gamma^2 \cos(2\xi - \varphi - 2\eta).$$

On a trouvé, d'ailleurs, n° 66,

$$\frac{dR}{dv} = \frac{3}{4}m^2\, e\,\gamma^2 \sin(2\xi - \varphi - 2\eta).$$

En multipliant cette valeur par le facteur

$$\frac{1}{2 - 2m - c - 2g} = -\frac{1}{1 + 2m},$$

on en a conclu

$$-\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt = -\left(\frac{3}{4}m^2 - \frac{3}{2}m^3\right) e\,\gamma^2 \cos(2\xi - \varphi - 2\eta).$$

En vertu de la formule

$$2\int d'R + r\frac{dR}{dr} = 4R + 2m\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt,$$

on aura donc

$$2\int d'R_{22} + r\frac{dR_{22}}{dr} = -\left(\frac{3}{2}m^2 + \frac{9}{2}m^3 + \frac{3587}{128}m^4\right) e\gamma^2 \cos(2\xi - \varphi - 2\eta).$$

Nous avons trouvé, n° 72,

$$\delta\frac{1}{r} = \left(-\frac{3}{4}m^2 + \frac{9}{16}m^3 + \frac{401}{256}m^4\right)\gamma^2 \cos(2\xi - 2\eta).$$

Par les approximations successives, on a

$$\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2 = \frac{m^4}{4}\gamma^2\cos(2\xi-2\eta)$$
$$+\left(\frac{23}{32}m^2+\frac{159}{64}m^4\right)e\gamma^2\cos(2\xi-\varphi-2\eta).$$

En substituant ces valeurs dans la formule

$$P = -r_1^3\,\delta\frac{1}{r}+\frac{3}{2}r_1^4\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2;$$

et en observant que, d'après les formules du mouvement elliptique, on a $r^3=-3e\cos\varphi$, $r^4=1-4e\cos\varphi$, on trouve

$$P_{59} = \left(-\frac{9}{8}m^2+\frac{123}{64}m^3+\frac{2727}{512}m^4\right)e\gamma^2\cos(2\xi-\varphi-2\eta).$$

Si dans l'équation de condition, n° 63,

$$a_{59}[(2-2m-c-2g)^2-1]=(2-2m-c-2g)^2\,P_{59}+2\int d'R_{59}+r\frac{dR_{59}}{dr},$$

on substitue pour c et g leurs valeurs, n°s 24 et 41, pour P_{59} et $2\int d'R_{59}+r\frac{dR_{59}}{dr}$ leurs valeurs précédentes, on aura

$$a_{59}\left(4m+\frac{11}{2}m^2-\frac{195}{16}m^3\right)$$
$$=\left(1+4m+\frac{11}{2}m^2\right)\left(-\frac{9}{8}m+\frac{123}{64}m^3+\frac{2727}{512}m^4\right)$$
$$-\frac{3}{2}m^2-\frac{9}{2}m^3-\frac{3587}{128}m^4;$$

d'où l'on tire

$$a_{59}=-\frac{21}{32}m-\frac{111}{128}m^2-\frac{6253}{1024}m^3.$$

Déterminons les termes correspondans de l'expression

de la longitude. Par ce qui précède, on a

$$\int \delta . \left(\frac{dR}{dv}\right) dt = \left(-\frac{3}{8}m + \frac{9}{32}m^2 + \frac{353}{512}m^3\right) \gamma^2 \cos(2\xi - 2\eta)$$
$$+ \left(\frac{3}{4}m^2 - \frac{3}{2}m^3\right) e\gamma^2 \cos(2\xi - \varphi - 2\eta),$$

$$\frac{1}{r^2} = 1 + 2\left(1 + \frac{m^2}{3}\right) e \cos \varphi;$$

d'où l'on conclut

$$\frac{1}{r^2} \int \delta . \left(\frac{dR}{dv}\right) dt = \left(-\frac{3}{8}m + \frac{33}{32}m^2 - \frac{95}{512}m^3\right) e\gamma^2 \cos(2\xi - \varphi - 2\eta).$$

Au moyen des valeurs de $\frac{1}{r^2}$ et de s^2 précédemment déterminées, on a trouvé ensuite

$$h\delta . \frac{1}{r^2} = \left(-\frac{21}{16}m - \frac{159}{64}m^2 - \frac{5853}{512}m^3\right) e\gamma^2 \cos(2\xi - \varphi - 2\eta),$$

$$\left(\frac{dv}{dt}\right) s^2 = \left(\frac{21}{16}m + \frac{289}{64}m^2 + \frac{66035}{3072}m^3\right) e\gamma^2 \cos(2\xi - \varphi - 2\eta).$$

En n'ayant égard qu'à l'argument que nous considérons, on a d'ailleurs

$$\frac{dv}{dt} = (2 - 2m - c - 2g)\, b_{19}\, e\gamma^2 \cos(2\xi - \varphi - 2\eta).$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (a), n° 73, et en remplaçant c et g par leurs valeurs, nos 24 et 60, on trouvera

$$-b_{19}\left(1 + 2m + \frac{3}{4}m^2\right) = \left(-\frac{3}{8}m + \frac{49}{16}m^2 + \frac{30347}{3072}m^3\right);$$

d'où l'on conclut

$$b_{19} = \frac{3}{8}m - \frac{61}{16}m^2 - \frac{7787}{3072}m^3.$$

121. La fonction R, n° 3, contient les termes suivans :

$$R = -\frac{21}{16} m^2 e e' \gamma^2 \cos(2\xi - \varphi - \varphi' - 2\eta)$$
$$+ \frac{3}{16} m^2 e e' \gamma^2 \cos(2\xi - \varphi + \varphi' - 2\eta)$$
$$+ \frac{231}{64} m^2 e e' \gamma^2 \cos(2\xi + \varphi - \varphi' - 2\eta)$$
$$- \frac{33}{64} m^2 e e' \gamma^2 \cos(2\xi + \varphi + \varphi' - 2\eta).$$

La fonction que nous avons désignée par P, n° 13, contient les termes

$$P = -\frac{63}{16} m^2 e e' \gamma^2 \cos(2\xi - \varphi - \varphi' - 2\eta)$$
$$+ \frac{9}{16} m^2 e e' \gamma^2 \cos(2\xi - \varphi + \varphi' - 2\eta)$$
$$- \frac{231}{32} m^2 e e' \gamma^2 \cos(2\xi + \varphi - \varphi' - 2\eta)$$
$$+ \frac{33}{32} m^2 e e' \gamma^2 \cos(2\xi + \varphi + \varphi' - 2\eta).$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (6), n° 13, on en conclut

$$\delta\frac{1}{r} = -\frac{49}{32} m e e' \gamma^2 \cos(2\xi - \varphi - \varphi' - 2\eta)$$
$$+ \frac{21}{32} m e e' \gamma^2 \cos(2\xi - \varphi + \varphi' - 2\eta)$$
$$- \frac{77}{64} m e e' \gamma^2 \cos(2\xi + \varphi - \varphi' - 2\eta)$$
$$+ \frac{33}{64} m e e' \gamma^2 \cos(2\xi + \varphi + \varphi' - 2\eta).$$

D'après les valeurs de v et de s, n°s 29 et 44, on trouve

$$s^2 = -\frac{1}{2}\gamma^2 \cos 2\eta + \frac{9}{32} m e'^2 \gamma^2 \cos(2\varphi' + 2\eta) + \frac{37}{8} m e' \gamma^2 \cos(2\xi - \varphi' - 2\eta)$$
$$- \frac{3}{8} m e' \gamma^2 \cos(2\xi + \varphi' - 2\eta) + \frac{35}{8} m e e' \gamma^2 \cos(2\xi - \varphi - \varphi' - 2\eta)$$

$$-\frac{15}{8}mee'\gamma^2\cos(2\xi-\varphi+\varphi'-2\eta)+\frac{15}{8}mee'\gamma^2\cos(2\xi-\varphi+\varphi'+2\eta)$$
$$-\frac{35}{8}mee'\gamma^2\cos(2\xi-\varphi-\varphi'+2\eta),$$

$$\frac{dv}{dt}=1+2e\cos\varphi+\frac{35}{4}mee'\cos(2\xi-\varphi-\varphi')-\frac{15}{4}mee'\cos(2\xi-\varphi+\varphi');$$

d'où l'on conclut

$$s^2\frac{dv}{dt}=\frac{9}{32}me'^2\gamma^2\cos(2\varphi'+2\eta)+\frac{49}{16}mee'\gamma^2\cos(2\xi-\varphi-\varphi'-2\eta)$$
$$-\frac{21}{16}mee'\gamma^2\cos(2\xi-\varphi+\varphi'-2\eta)+\frac{7}{8}mee'\gamma^2\cos(2\xi+\varphi-\varphi'-2\eta)$$
$$-\frac{3}{8}mee'\gamma^2\cos(2\xi+\varphi+\varphi'-2\eta)-\frac{105}{16}mee'\gamma^2\cos(2\xi-\varphi-\varphi'+2\eta)$$
$$+\frac{45}{16}mee'\gamma^2\cos(2\xi-\varphi+\varphi'+2\eta).$$

Le développement de la fonction $\frac{dR}{dv}$ donne

$$\delta.\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt=-\frac{7}{8}me'\gamma^2\cos(2\xi-\varphi'-2\eta)+\frac{3}{8}me'\gamma^2\cos(2\xi+\varphi'-2\eta).$$

On a d'ailleurs, par les formules du mouvement elliptique, $\frac{1}{r^2}=2e\cos\varphi$; d'où l'on conclut

$$\frac{1}{r^2}\delta.\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt=-\frac{7}{8}mee'\gamma^2\cos(2\xi-\varphi-\varphi'-2\eta)$$
$$+\frac{3}{8}mee'\gamma^2\cos(2\xi-\varphi+\varphi'-2\eta)$$
$$-\frac{7}{8}mee'\gamma^2\cos(2\xi+\varphi-\varphi'-2\eta)$$
$$+\frac{3}{8}mee'\gamma^2\cos(2\xi+\varphi+\varphi'-2\eta).$$

La valeur précédente de $\frac{1}{r}$, en observant que l'on a $\delta\frac{1}{r^2}=2\delta\frac{1}{r}$, donne

$$\delta.\frac{1}{r^2}=-\frac{49}{16}mee'\gamma^2\cos(2\xi-\varphi-\varphi'-2\eta)$$
$$+\frac{21}{16}mee'\gamma^2\cos(2\xi-\varphi+\varphi'-2\eta)$$

$$-\frac{77}{32} m\, e\, e'\, \gamma^2 \cos(2\xi + \varphi - \varphi' - 2\eta)$$
$$+\frac{33}{32} m\, e\, e'\, \gamma^2 \cos(2\xi + \varphi + \varphi' - 2\eta).$$

En substituant ces différentes valeurs dans l'équation

$$\frac{dv}{dt} = s^2 \frac{dv}{dt} + \frac{1}{r^2}\delta.\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt + \delta\frac{1}{r^2};$$

et, en intégrant l'équation résultante, on trouve que δv contient les termes suivans :

$$\delta v = \frac{9}{64} m\, e'^2\, \gamma^2 \sin(2\varphi' + 2\eta)$$
$$+\frac{7}{8} m\, e\, e'\, \gamma^2 \sin(2\xi - \varphi - \varphi' - 2\eta)$$
$$-\frac{3}{8} m\, e\, e'\, \gamma^2 \sin(2\xi - \varphi + \varphi' - 2\eta)$$
$$-\frac{77}{32} m\, e\, e'\, \gamma^2 \sin(2\xi + \varphi - \varphi' - 2\eta)$$
$$+\frac{33}{32} m\, e\, e'\, \gamma^2 \sin(2\xi + \varphi + \varphi' - 2\eta)$$
$$-\frac{35}{16} m\, e\, e'\, \gamma^2 \sin(2\xi - \varphi - \varphi' + 2\eta)$$
$$+\frac{15}{16} m\, e\, e'\, \gamma^2 \sin(2\xi - \varphi + \varphi' + 2\eta).$$

122. On a, par les approximations précédentes,

$$\delta\frac{1}{r} = \frac{m^2}{2}\gamma^2 \cos 2\eta, \quad r^2 = e^2 \cos 3\varphi;$$

ce qui donne

$$r^2\delta\frac{1}{r} = \frac{m^2}{4} e^2\gamma^2 \cos(3\varphi - 2\eta).$$

En supposant $\delta\frac{1}{r} = A\, e^3\, \gamma^2 \cos(3\varphi - 2\eta)$, on a ensuite

$$\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2 = \left[\frac{m^2}{3} + \frac{15}{4} m\, e \cos(2\xi - \varphi)\right]$$
$$-\left[-\frac{5}{8} e\,\gamma^2 \cos(\varphi - 2\eta) + A\, e^3\gamma^2 \cos(3\varphi - 2\eta) - \frac{33}{32} m\, e^2\gamma^2 \cos(2\xi + 2\varphi - 2\eta)\right];$$

d'où l'on tire

$$\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2 = -\frac{5}{24}m^2 e\gamma^2 \cos(\varphi - 2\eta) + \frac{m^2}{3}\mathrm{A}\, e^2\gamma^2\cos(3\varphi - 2\eta)$$
$$-\frac{495}{256}m^2 e^2\gamma^2\cos(3\varphi - 2\eta);$$

on a d'ailleurs $r^4 = 1 + e^2\cos 2\varphi$, par conséquent

$$r^4\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2 = \frac{m^2}{3}\left(\mathrm{A} - \frac{1565}{256}\right)e^2\gamma^2\cos(3\varphi - 2\eta).$$

En substituant ces valeurs dans la formule

$$\mathrm{P} = -r^2\delta\frac{1}{r} + \frac{3}{2}r^4\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2,$$

on trouve

$$\mathrm{P} = \left(\frac{1}{2}\mathrm{A} - \frac{1693}{512}\right)m^2 e^2\gamma^2\cos(3\varphi - 2\eta).$$

On a, nº 3,

$$\mathrm{R} = \frac{m^2 r^2}{4}\left(1 - 3s^2\right).$$

On trouve, par ce qui précède,

$$\frac{r^2}{2} = -r^2\delta\frac{1}{r} = -\mathrm{A}\, e^2\gamma^2\cos(3\varphi - 2\eta),$$

$$r^2 s^2 = \left(1 - 2e\cos\varphi - \frac{e^2}{2}\cos 2\varphi - \frac{e^2}{4}\cos 3\varphi\right)$$
$$\times\left[-\frac{\gamma^2}{2}\cos 2\eta + e\gamma^2\cos(\varphi - 2\eta) + \frac{1}{4}e^2\gamma^2\cos(2\varphi - 2\eta) - \frac{1}{24}e^2\gamma^2\cos(3\varphi - 2\eta)\right]$$
$$= \left(-\frac{1}{24} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = -\frac{23}{48}\right)e^2\gamma^2\cos(3\varphi - 2\eta).$$

Au moyen de ces quantités, on aura

$$\mathrm{R} = -\left(\frac{1}{2}\mathrm{A} - \frac{23}{64}\right)m^2 e^2\gamma^2\cos(3\varphi - 2\eta).$$

En substituant ces valeurs dans l'équation de con-

dition

$$[(3c-2g)^2-1]\,a=(3c-2g)^2\,P+4R,$$

on trouve

$$-\frac{15}{2}m^2 A=\frac{m^2}{2}A-\frac{1693}{512}m^2-2m^2 A+\frac{23}{16}m^2,$$

d'où l'on tire, enfin,

$$A=\frac{319}{1024}.$$

On a ensuite

$$\frac{1}{r^2}=\frac{2}{r}\,\delta\frac{1}{r}=2\,(1+e^2\cos 2\varphi)\left[-\frac{5}{8}e\gamma^2\cos(\varphi-2\eta)+A\,e^2\gamma^2\cos(3\varphi-2\eta)\right],$$

$$\frac{s^2}{r^2}=\left(1+2e\cos\varphi+\frac{5}{2}e^2\cos 2\varphi+\frac{13}{4}e^2\cos 3\varphi\right)$$

$$\times\left\{\begin{array}{l}-\frac{\gamma^2}{2}\cos 2\eta-e\,\gamma^2\cos(\varphi+2\eta)+e\,\gamma^2\cos(\varphi-2\eta)\\+\frac{1}{4}e^2\gamma^2\cos(2\varphi-2\eta)-\frac{13}{8}e^2\gamma^2\cos(2\varphi+2\eta)\\-\frac{1}{24}e^2\gamma^2\cos(3\varphi-2\eta)-\frac{59}{24}e^2\gamma^2\cos(3\varphi+2\eta)\end{array}\right\};$$

d'où l'on conclut

$$\frac{1}{r^2}=2\left(A-\frac{5}{16}\right)e^2\gamma^2\cos(3\varphi-2\eta),$$

$$\frac{s^2}{r^2}=\left(\frac{1}{4}+\frac{5}{4}-\frac{13}{16}-\frac{1}{24}=\frac{31}{48}\right)e^2\gamma^2\cos(3\varphi-2\eta)$$
$$+\left(-\frac{13}{8}-\frac{5}{4}-\frac{13}{16}-\frac{59}{24}=-\frac{295}{48}\right)e^2\gamma^2\cos(3\varphi+2\eta).$$

Ces valeurs, substituées dans l'équation $\frac{dv}{dt}=\frac{1+s^2}{r^2}$, en supposant $v=\mathcal{6}e^2\sin(3\nu-2\eta)+\mathcal{6}'e^2\sin(3\varphi+2\eta)$, donneront, en comparant les cosinus des mêmes angles :

$$\mathcal{6}=2A+\frac{31}{48}-\frac{5}{8}=\frac{989}{1536},$$

$$\mathcal{6}'=-\frac{1}{5}\times\frac{295}{48}=-\frac{59}{48}.$$

On aura donc, dans l'expression de la longitude, les deux inégalités suivantes :

$$\delta v = \frac{989}{1536} e^3 \gamma^2 \sin(3\varphi - 2\eta) - \frac{59}{48} e^3 \gamma^2 \sin(3\varphi + 2\eta).$$

123. La valeur de s^2, déduite de celle de s, nos 44 et 63, contient les termes suivans :

$$s^2 = -\frac{21}{64} m^2 e' \gamma^2 \cos(4\xi - \varphi' + 2\eta) + \frac{9}{64} m^2 e' \gamma^2 \cos(4\xi + \varphi - 2\eta).$$

En substituant cette valeur dans la formule (a), n° 73, et supposant $\left[\frac{dv}{dt}\right] = 1$, on trouve

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{21}{64} m^2 e' \gamma^2 \cos(4\xi - \varphi' - 2\eta) + \frac{9}{64} m^2 e' \gamma^2 \cos(4\xi + \varphi' - 2\eta),$$

d'où l'on conclut

$$\delta v = -\frac{21}{128} m^2 e' \gamma^2 \sin(4\xi - \varphi' - 2\eta) + \frac{9}{128} m^2 e' \gamma^2 \sin(4\xi + \varphi' - 2\eta).$$

En observant que l'on a $s^2 = \frac{z^2}{r^2} + \frac{z^4}{r^4} +$ etc., on trouve aisément, d'après la valeur de $\frac{z}{r}$, n° 44, que l'expression de s^2 contient les termes suivans :

$$s^2 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\gamma^2\right) \gamma^2 \cos 2\eta - (1 + \gamma^2) e \gamma^2 \cos(\varphi + 2\eta)$$
$$+ \left(-\frac{3}{8} m + \frac{33}{64} m \gamma^2\right) e' \gamma^2 \cos(\varphi' - 2\eta) + \frac{3}{16} m \gamma^4 \cos(2\xi + 2\eta).$$

On a d'ailleurs,

$$\frac{h}{r^2} = \left(1 - \frac{\gamma^2}{2}\right)(1 + 2e \cos\varphi);$$

d'où l'on conclut

$$\frac{h s^2}{r^2} = -\frac{\gamma^4}{4} \cos 2\eta - \frac{3}{4} e \gamma^4 \cos(\varphi + 2\eta) + \frac{45}{64} m e' \gamma^4 \cos(\varphi' - 2\eta)$$
$$+ \frac{3}{16} m \gamma^4 \cos(2\xi + 2\eta).$$

On aura donc, en ne considérant que ces termes,

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{\gamma^4}{4}\cos 2\eta-\frac{3}{4}e\gamma^4\cos(\varphi+2\eta)+\frac{45}{64}me'\gamma^4\cos(\varphi'-2\eta)$$
$$+\frac{3}{16}m\gamma^4\cos(2\xi+2\eta);$$

d'où, en intégrant, on tire

$$\delta v=-\frac{\gamma^4}{4}\cos 2\eta-\frac{3}{4}e\gamma^4\cos(\varphi+2\eta)-\frac{45}{128}me'\gamma^4\cos(\varphi'-2\eta)$$
$$+\frac{3}{64}m\gamma^4\sin(2\xi+2\eta).$$

La valeur de $\frac{z}{r}$, n° 44, contient les termes suivans :

$$\frac{z}{r}=\gamma\sin\eta+e\gamma\sin(\varphi-\eta)+e\gamma\sin(\varphi+\eta)+\frac{5}{8}e\gamma^3\sin(\varphi-3\eta);$$

d'où l'on conclura

$$\frac{z^2}{r^2}=-\frac{1}{2}\gamma^2\cos 2\eta+e\gamma^2\cos(\varphi-2\eta)-e\gamma^2\cos(\varphi+2\eta)+\frac{5}{8}e\gamma^4\cos(\varphi-4\eta)$$
$$+\frac{3}{8}m\gamma^2\cos(2\xi-2\eta),$$

$$\frac{z^4}{r^4}=\frac{1}{8}\gamma^4\cos 4\eta-\frac{1}{2}e\gamma^4\cos(\varphi-4\eta)+\frac{1}{2}e\gamma^4\cos(\varphi+4\eta)$$
$$-\frac{3}{16}m\gamma^4\cos(2\xi-4\eta).$$

En substituant ces valeurs dans la formule $s^2=\frac{z^2}{r^2}+\frac{z^4}{r^4}$, on trouve

$$s^2=-\frac{1}{2}\gamma^2\cos 2\eta+\frac{1}{8}\gamma^4\cos 4\eta+\frac{1}{8}e\gamma^4\cos(\varphi-4\eta)+\frac{1}{2}e\gamma^4\cos(\varphi+4\eta)$$
$$-\frac{3}{16}m\gamma^4\cos(2\xi-4\eta).$$

On a d'ailleurs, n° 75,

$$\frac{1}{r^2}=1+2e\cos\varphi-\frac{5}{4}e\gamma^2\cos(\varphi-2\eta);$$

d'où, en supposant $h = 1$, on conclut

$$\frac{h s^2}{r^2} = \frac{1}{8}\gamma^4 \cos 4\eta + \frac{9}{16}\gamma^4 \cos(\varphi - 4\eta) + \frac{5}{8}\gamma^4 \cos(\varphi + 4\eta)$$
$$- \frac{3}{16} m \gamma^4 \cos(2\xi - 4\eta).$$

En substituant cette valeur dans la deuxième des formules (A), n° 1, et en intégrant ensuite, on trouve :

$$\delta v = \frac{1}{32}\gamma^4 \sin 4\eta - \frac{3}{16} e \gamma^4 \sin(\varphi - 4\eta) + \frac{1}{8} e \gamma^4 \sin(\varphi + 4\eta)$$
$$+ \frac{3}{32} m \gamma^4 \sin(2\xi - 4\eta).$$

124. L'expression du rayon vecteur, n° 72, contient les termes suivans :

$$\delta \frac{1}{r} = \left(-\frac{15}{16} m - \frac{15}{256} m e^2 + \frac{75}{32} m e'^2\right) e \gamma^2 \cos(2\xi - \varphi)$$
$$- \frac{405}{128} m e^2 \gamma^2 \cos(2\xi + \varphi).$$

On a d'ailleurs, par les formules du mouvement elliptique ;

$$r^2 = -3e\left(1 + \frac{3}{8} e^2\right) \cos \varphi ;$$

d'où, en supposant $P = -r^2 \delta \frac{1}{r}$, on a conclu

$$P = \left(-\frac{2745}{512} e^2 + \frac{225}{64} e'^2\right) m e^2 \gamma^2 \cos 2\xi.$$

Cette valeur, substituée dans la formule (6), n° 13, donne

$$3 a_{30} = 4\left(-\frac{2745}{512} e^2 + \frac{225}{64} e'^2\right) m e^2 \gamma^2 ;$$

d'où l'on a conclu

$$a_{30} = -\frac{915}{128} m e^4 \gamma^2 + \frac{75}{16} m e^2 e'^2 \gamma^2.$$

Reprenons la formule (a) du n° 73 :

$$\frac{dv}{dt} = s^2\left[\frac{dv}{dt}\right] + \frac{1}{r^2}\delta.\left[h + \int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt\right]. \qquad (a)$$

Au moyen des valeurs de s^2 et de $\frac{dv}{dt}$, déduites des valeurs de s et de v, et de la valeur de $\frac{1}{r}$, donnée par les approximations successives, on a formé les suivantes :

$$s^2\left[\frac{dv}{dt}\right] = \left(-\frac{15}{8}e^2e'^2 + \frac{771}{512}e^4 - \frac{39}{128}e'^4 - \frac{15}{64}\frac{a^2}{a'^2}\right)m\gamma^2\cos 2\xi,$$

$$\frac{1}{r^2} = \begin{cases} \left(\begin{array}{l} \frac{375}{32}e^2e'^2\gamma^2 - \frac{375}{16}e^2e'^2 - \frac{75}{16}e^2\gamma^2 + \frac{75}{8}e^2 \\ + \frac{135}{32}e^4 - \frac{4455}{256}e^4\gamma^2 \end{array}\right) m\cos 2\xi \\ + \frac{5}{2}e^2\cos 2\varphi, \end{cases}$$

$$\delta.\left[h + \int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt\right] = 1 - \frac{e^2}{2} - \frac{\gamma^2}{2} + \frac{1}{4}e^2\gamma^2 + \frac{15}{32}me^2\gamma^2\cos(2\xi - 2\varphi).$$

Ces valeurs, substituées dans la formule (a), ont donné

$$\frac{dv}{dt} = \left(-\frac{39}{128}me'^4 + \frac{345}{16}me^2e'^2 - \frac{6517}{512}me^4 - \frac{15}{64}m\frac{a^2}{a'^2}\right)\gamma^2\cos 2\xi.$$

On a d'ailleurs, en ne tenant compte que des termes que nous considérons, n° 29, $\frac{dv}{dt} = 2b_{30}\cos 2\xi$; en comparant ces deux expressions, on conclut

$$b_{30} = \left(-\frac{6517}{1024}me^4 + \frac{345}{32}me^2e'^2 - \frac{39}{256}me'^4 - \frac{15}{128}m\frac{a^2}{a'^2}\right)\gamma^2.$$

125. Reprenons enfin, pour la compléter de la même manière, l'expression de la latitude.

Au moyen des valeurs de z et de $\frac{1}{r}$, on a formé la

suivante :

$$\begin{aligned}\frac{z}{r^3} = & \frac{63}{16} m^2 e' \gamma^3 \sin (2\xi - \varphi' - 3\eta) \\ & - \frac{9}{16} m^2 e' \gamma^3 \sin (2\xi + \varphi' - 3\eta) \\ & + \frac{27}{16} e^4 \gamma \sin (4\varphi - \eta) \\ & + \frac{125}{16} e^4 \gamma \sin (4\varphi + \eta) \\ & - \frac{63}{64} m^2 \gamma^3 \sin (4\xi - 3\eta).\end{aligned}$$

Cette valeur, substituée dans l'équation différentielle

$$\frac{d^2s}{dt^2} + s\left(1 + \frac{3}{2}m^2\right) + \frac{z}{r^3} = 0,$$

donne, en intégrant,

$$\begin{aligned}s = & \frac{21}{32} m e' \gamma^3 \sin (2\xi - \varphi' - 3\eta) \\ & - \frac{9}{32} m e' \gamma^3 \sin (2\xi + \varphi' - 3\eta) \\ & + \frac{27}{128} e^4 \gamma \sin (4\varphi - \eta) \\ & + \frac{125}{384} e^4 \gamma \sin (4\varphi + \eta) \\ & + \frac{63}{512} m^2 \gamma^3 \sin (4\xi - 3\eta).\end{aligned}$$

Au moyen de la formule $\frac{s}{\sqrt{1 + s^2}} = \frac{z}{r}$ et des valeurs de z et $\frac{1}{r}$ précédemment déterminées, on a conclu de là :

$$\begin{aligned}\frac{s}{\sqrt{1 + s^2}} = & \frac{21}{32} m e' \gamma^3 \sin (2\xi - \varphi' - 3\eta) \\ & - \frac{9}{32} m e' \gamma^3 \sin (2\xi + \varphi' - 3\eta) \\ & + \frac{99}{128} e^4 \gamma \sin (4\varphi - \eta) \\ & + \frac{625}{384} e^4 \gamma \sin (4\varphi + \eta) \\ & + \frac{63}{512} m^2 \gamma^3 \sin (4\xi - 3\eta).\end{aligned}$$

126. L'action de la Lune trouble le mouvement de la Terre autour du Soleil, et il en résulte, par la réaction de la Terre sur la Lune, des altérations dans quelques-unes des inégalités dont le mouvement de ce satellite est affecté, altérations dont il faut tenir compte lorsqu'on veut obtenir une grande précision. Pour les déterminer, observons que si l'on nomme x_1, y_1 et z_1 les coordonnées de la Lune rapportées à trois axes rectangulaires menés par le centre commun de gravité de la Terre et de la Lune, par ξ_1, η_1 et χ_1 les trois coordonnées de la Terre relatives aux mêmes axes et à la même origine, on aura, par la propriété des centres de gravité,

$$mx_1 + M\xi_1 = 0, \quad my_1 + M\eta_1 = 0, \quad mz_1 + M\chi_1 = 0.$$

Soient X, Y et Z les coordonnées du centre de gravité de la Lune et de la Terre, X_1, Y_1 et Z_1 celles du centre de gravité de la Terre par rapport à trois axes rectangulaires parallèles aux premiers et passant par le centre du Soleil, en sorte qu'on ait

$$X_1 = X + \xi_1, \quad Y_1 = Y + \eta_1, \quad Z_1 = Z + \chi_1.$$

Si l'on substitue dans ces équations à la place de ξ_1, η_1 et χ_1 leurs valeurs, en faisant, pour abréger, $\nu = \frac{m}{M}$, et en observant qu'ayant désigné par x', y' et z', n° 1, les coordonnées du Soleil rapportées à trois axes rectangulaires qui se croisent au centre de gravité de la terre, on a $X_1 = -x'$, $Y_1 = -y'$, $Z_1 = -z'$, on trouve

$$x' = -X + \nu x_1, \quad y' = -Y + \nu y_1, \quad z' = -Z + \nu z_1.$$

On aura donc égard aux perturbations résultantes, dans

le mouvement de la Lune, de son action sur la Terre, en changeant simplement x', y', z' en $-X+\nu x_1$, $-Y+\nu y_1$ et $-Z+\nu z_1$ dans l'expression de la force perturbatrice R, les termes νx_1, νy_1 et νz_1 pouvant être regardés comme exprimant les perturbations des coordonnées de la Terre dues à l'action de la Lune. Cela posé, on a, n° 1,

$$R = \frac{m'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} - \frac{m'(xx'+yy'+zz')}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

En développant cette expression par rapport aux puissances ascendantes des coordonnées x, y, z, négligeant les termes du troisième ordre relativement à ces quantités, et supprimant le terme

$$\frac{m'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}},$$

qui est indépendant des cordonnées de la Lune, on trouve, n° 3,

$$R = -\frac{m'(x^2+y^2+z^2)}{2(x'^2+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3m'(xx'+yy'+zz')^2}{2(x'^2+y'^2+z'^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

En substituant respectivement, dans cette expression, $-X+\nu x_1$, $-Y+\nu y_1$, $-Z+\nu z_1$ à la place de x', y' et z', et désignant par R_1 les termes affectés du facteur ν, dont nous négligerons le carré et les puissances supérieures, on aura

$$\begin{aligned} R_1 = &-\frac{3m'\nu(x^2+y^2+z^2)(Xx_1+Yy_1+Zz_1)}{2(X^2+Y^2+Z^2)^{\frac{5}{2}}} \\ &-\frac{3m'\nu(Xx+Yy+Zz)(xx_1+yy_1+zz_1)}{(X^2+Y^2+Z^2)^{\frac{5}{2}}} \\ &+\frac{15m'\nu(Xx+Yy+Zz)(Xx_1+Yy_1+Zz_1)}{2(X^2+Y^2+Z^2)^{\frac{7}{2}}}. \end{aligned}$$

Si l'on néglige, comme nous le ferons, le carré de ν, on pourra supposer, dans cette expression,

$$X = -x' = -r'\cos v',\quad Y = -y' = -r'\sin v',\quad Z = -z' = 0,$$

elle deviendra ainsi :

$$R_1 = -\frac{3m'\nu}{2r'^4}\left\{\begin{array}{l}[5(x\cos v' + y\sin v')^2 - r^2](x_1\cos v' + y_1\sin v') \\ -2(x\cos v' + y\sin v')(xx_1 + yy_1)\end{array}\right\}.$$

On pourra aussi, au lieu des coordonnées x_1, y_1, z_1, relatives au centre commun de gravité de la Terre et de la Lune, substituer les coordonnées x, y, z qui se rapportent simplement au centre de la Terre; mais les différentielles d'R, $\frac{dR}{dv}$, $r\frac{dR}{dr}$ ne devant être prises que par rapport aux coordonnées de la Lune, on ne devra faire $x = x_1$, $y = y_1$ et $z = z_1$, que quand cette opération sera effectuée. Si l'on suppose donc

$$x = r\cos v,\quad y = r\sin v,\quad x_1 = r_1\cos v_1,\quad y_1 = r_1\sin v_1;$$

on aura

$$R_1 = -\frac{3m'\nu r^2 r_1}{2r'^4}\left\{\left[\frac{3}{2} + \frac{5}{2}\cos 2(v - v')\right]\cos(v_1 - v') - 2\cos(v - v')\cos(v - v_1)\right\},$$

formule dans laquelle on fera $r_1 = r$ et $v_1 = v$ après qu'on l'aura différentiée.

Telle est donc la partie que l'action de la Lune sur la Terre ajoute à la fonction perturbatrice R, et à laquelle il faudra avoir égard lorsqu'on voudra déterminer les perturbations du mouvement lunaire qui dépendent de la masse de notre satellite.

Proposons-nous de déterminer, par exemple, les termes que cette cause ajoute au coefficient de l'iné-

galité du mouvement en longitude dépendante de l'angle ξ ou de l'inégalité qu'on a nommée *équation parallactique*, n° 6; son importance, comme on le verra bientôt, exige qu'on la détermine avec toute l'exactitude qu'on peut atteindre.

Il suffira, dans ce cas, en négligeant les excentricités des orbites de la Lune et du Soleil, de supposer

$$R_1 = -\frac{9m^2\nu}{8}\left(\frac{a}{a'}\right)\cos\xi,$$

$$r\frac{dR_1}{dr} = 2R_1 = -\frac{9m^2\nu}{4}\left(\frac{a}{a'}\right)\cos\xi.$$

La valeur précédente de R_1 donne, en la différentiant par rapport à v seulement, et en faisant $r_1 = r$, $v_1 = v$ après la différentiation,

$$\frac{dR_1}{dv} = \frac{3}{4}\,\frac{m^2\nu r^3}{r'^4}\sin(v - v');$$

on a généralement $d'R = \frac{dR}{dr}dr + \frac{dR}{dv}dv$; mais lorsqu'on néglige les excentricités et les termes d'un ordre supérieur à m^2, on peut supposer $d'R = \frac{dR}{dv}dv$; en n'ayant donc égard qu'aux termes que nous considérons, et faisant $m'\frac{a^3}{a'^3} = m^2$, on aura

$$\int d'R_1 = -\frac{3}{4}m^2\nu\frac{a}{a'}\cos\xi.$$

Au moyen de ces différentes valeurs, l'équation de condition, n° 15,

$$[(1-m)^2 - 1]\,a_{7,0} = (1-m)^2 P_{7,0} + R_{7,0}$$

donnera

$$-2m\,a_{10} = -\left(\frac{3}{2}+\frac{9}{4}=\frac{15}{4}\right)m^2\nu;$$

et, par conséquent,

$$a_{10} = \frac{15}{8}m\nu.$$

En supposant, ce qui suffit ici, $\delta v = \frac{1}{r^2}$, on en conclura

$$b_{10} = \frac{15}{4}m\nu.$$

La masse de la Lune produit donc, dans l'expression de son rayon vecteur, le terme $\frac{15}{8}m\nu\frac{a}{a'}\cos\xi$, et dans celle de la longitude, le terme $\frac{15}{4}m\nu\frac{a}{a'}\sin\xi$. Pour porter l'approximation jusqu'aux quantités de l'ordre m^2, il faut conserver les quantités de l'ordre m^3 dans l'expression de la fonction perturbatrice; or, on a généralement

$$\delta R_1 = -\left(r\frac{dR}{dr}\right)r\delta\frac{1}{r} + \left(\frac{dR}{dv}\right)\delta v,$$

ou bien, en substituant pour $r\delta\frac{1}{r}$ et δv leurs valeurs résultant de la première approximation, et pour $r\frac{dR}{dr}$ et $\frac{dR}{dv}$ les termes de leur développement, qui, combinés avec ces valeurs, peuvent reproduire l'argument que nous considérons :

$$\delta R_1 = -\left(\frac{m^2}{2}+\frac{3}{2}m^2\cos 2\xi\right)\frac{15}{8}m\nu\frac{a}{a'}\cos\xi$$
$$-\frac{3}{2}m^2\sin 2\xi\cdot\frac{15}{4}m\nu\frac{a}{a'}\sin\xi;$$

d'où l'on conclura

$$\delta R_1 = \left(\frac{15}{16} + \frac{45}{32} + \frac{45}{16} = \frac{165}{32}\right) m^2 \nu \frac{a}{a'} \cos \xi.$$

On a d'ailleurs, n° 14,

$$\int d'R = R - \int\left[\left(\frac{dR}{dr'}\right) dr' + \left(\frac{dR}{dv'}\right) dv'\right].$$

On a vu plus haut que la fonction $\frac{dR}{dv}$ contenait le terme $-\frac{3}{4}m^2\nu\frac{a}{a'}\sin\xi$; la différentielle dv' renferme le terme mdt; en vertu de ces valeurs, en observant que $\frac{dR}{dv'} = -\frac{dR}{dv}$, on trouve

$$\int d'R_1 = R_1 + \frac{3}{4} m^2 \nu \frac{a}{a'} \cos \xi.$$

En affectant la caractéristique δ aux quantités multipliées par le facteur ν, on a ensuite

$$\delta\frac{1}{r^2} = \frac{2}{r}\delta\frac{1}{r} = \left(\frac{m^2}{3} + 2m^2\cos 2\xi\right)\frac{15}{8} m\nu\frac{a}{a'}\cos\xi$$
$$= \left(\frac{5}{8} + \frac{15}{8} = \frac{5}{2}\right) m^2 \nu \frac{a}{a'} \cos \xi.$$

En n'ayant égard qu'aux termes que nous considérons, on peut supposer $P_{10} = \frac{3}{2}\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2$; on aura donc ainsi

$$P_{10} = \frac{15}{4} m^2 \nu \frac{a}{a'} \cos \xi.$$

En substituant ces diverses valeurs dans l'équation de condition, n° 15, relative à l'argument que nous considérons, on aura

$$(-2m + m^2) a_{10} = -\frac{15}{4} m^2 \nu + \left(\frac{15}{4} - \frac{165}{16} - \frac{3}{2} - \frac{165}{16} = -\frac{147}{8}\right) m^2 \nu.$$

Si l'on suppose dans cette équation $a_{10} = \frac{15}{8} m\nu + \alpha m^2 \nu$,

on trouvera $\alpha = \frac{81}{8}$, et par suite

$$a_{10} = \left(\frac{15}{8} m + \frac{81}{8} m^2\right) \nu.$$

La formule (15), n° 27, donne

$$\frac{d.\delta v}{dt} = 2\delta \frac{1}{r} + \int \left(\frac{dR}{dv}\right) dt;$$

en supposant donc $\delta v = b_{10} \frac{a}{a'} \sin \xi$, en vertu des valeurs précédentes, et en n'ayant égard qu'aux termes que nous considérons, on aura

$$(1 - m)\, b_{10} = \left[\frac{15}{4} m + \left(\frac{81}{4} - \frac{3}{4} = \frac{39}{2}\right) m^2\right] \nu;$$

d'où l'on conclut

$$b_{10} = \left(\frac{15}{4} m + \frac{93}{4} m^2\right) \nu.$$

En réunissant les termes dépendans de la masse de la Lune, que nous venons de calculer, à ceux du même ordre que produit dans le coefficient de l'inégalité parallactique l'action directe du Soleil, on aura, en ne considérant que cette inégalité,

$$\delta \frac{1}{r} = \left[-\frac{15}{16} m - \frac{81}{16} m^2 + \left(\frac{15}{8} m + \frac{81}{8} m^2\right) \nu\right] \frac{a}{a'} \cos \xi,$$

$$\delta v = \left[-\frac{15}{8} m - \frac{93}{8} m^2 + \left(\frac{15}{4} m + \frac{93}{4} m^2\right) \nu\right] \frac{a}{a'} \sin \xi.$$

On voit, par ces deux expressions, qu'il suffira, pour tenir compte des termes dépendans de la masse de la Lune, de multiplier par le facteur $(1 - 2\nu)$ les termes obtenus en ne considérant que la seule action du Soleil. Cette règle, que nous venons de vérifier relativement aux deux premiers termes de l'équation

parallactique, paraît s'étendre encore aux approximations suivantes, et comprend toutes les inégalités du même genre, c'est-à-dire toutes les inégalités dépendantes de la parallaxe solaire; il faudra donc, pour plus d'exactitude, lorsqu'on réduira en nombres les formules précédentes, multiplier par le facteur $1 - 2\nu$ ou $\frac{1-\nu}{1+\nu}$, ce qui revient au même, puisque nous négligeons les quantités de l'ordre ν^2, toutes les inégalités affectées du facteur $\frac{a}{a'}$, qui ont été déterminées nos 26 et 30 (*).

On peut, d'ailleurs, généraliser les résultats précédents par les considérations suivantes.

D'après les valeurs de R, $r\frac{dR}{dr}$ et $\frac{dR}{dv}$, n° 3, en ne considérant que les termes qui dépendent de la *parallaxe solaire*, on a

$$R = \frac{m'r^3}{8r'^4}[3\cos(v - v') + 5\cos 3(v - v')],$$

$$\frac{dR}{dv} = -\frac{3m'r^3}{8r'^4}[\sin(v - v') + 5\sin 3(v - v')],$$

$$r\frac{dR}{dr} = \frac{3m'r^3}{8r'^4}[3\cos(v - v') + 5\cos 3(v - v')].$$

(*) M. Poisson, dans son Mémoire sur la théorie de la Lune, a contesté l'exactitude de cette correction; mais le calcul sur lequel il se fonde est visiblement inexact, puisqu'il le conduit à trouver $\left(\frac{15}{4}m + \frac{27}{4}m^2\right)\nu$ pour les deux premiers termes que la masse de la Lune ajoute au coefficient de l'inégalité parallactique, au lieu des deux termes $\left(\frac{15}{4}m + \frac{93}{4}m^2\right)\nu$ que donne un calcul rigoureux, comme on vient de le voir, et comme l'a trouvé, de son côté, M. Plana.

Si l'on n'a égard qu'aux termes qui dépendent de la masse de la Lune, en nommant R_1 la partie qui en résulte dans l'expression de la fonction perturbatrice, on a, par ce qui précède,

$$R_1 = -\frac{3m'\nu r^2}{8r'^4}[3\cos(v-v') + 5\cos 3(v-v')],$$

$$\frac{dR_1}{dv} = \frac{3m'\nu r^2}{4r'^4}[\sin(v-v') + 5\sin 3(v-v')],$$

$$r\frac{dR_1}{dr} = -\frac{3m'\nu r^2}{4r'^4}[3\sin(v-v') + 5\cos 3(v-v')].$$

En réunissant donc ces deux parties de la fonction R, on aura

$$R = (1-2\nu)R, \quad \int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt = (1-2\nu)\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt,$$

$$r\frac{dR}{dr} = (1-2\nu)r\frac{dR}{dr}.$$

Si, de même, l'on substitue dans l'équation

$$d'R = r\frac{dR}{dr}\left(\frac{dr}{r}\right) + \frac{dR}{dv}dv,$$

à la place de $r\frac{dR}{dr}$ et de $\frac{dR}{dv}$, les valeurs qui se rapportent aux deux parties R' et R'', dans lesquelles nous avons décomposé la fonction R, n° 16, et qu'on les réunisse ensuite, il est clair qu'on aura, généralement,

$$\int d'R = (1-2\nu)\int\left[r\frac{dR}{dr}\left(\frac{dr}{r}\right) + \frac{dR}{dv}dv\right].$$

Les expressions précédentes subsistent, quelque loin qu'on porte les approximations, puisque nous négligeons les carrés de ν et de $\frac{a}{a'}$; et, comme les trois quantités $\int d'R$, $r\frac{dR}{dr}$ et $\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt$ sont les seules

qui entrent dans les équations qui déterminent les perturbations du rayon vecteur et de la longitude, on peut en conclure que pour avoir égard à la masse de la Lune, il suffira de multiplier par le facteur $(1 - 2\nu)$ les coefficiens des inégalités relatives à la parallaxe du Soleil, et qui ne dépendent que de l'action de cet astre. Cette remarque nous dispensera de faire un nouveau calcul pour déterminer les termes dont il s'agit. Au reste, la correction qui en résulte n'est guère sensible que relativement à l'*équation parallactique,* la plus considérable des inégalités de cette espèce.

127. Nous avons supposé dans l'expression de R, n° 3, $s' = 0$, ce qui revient à prendre pour le plan auquel on rapporte le mouvement de la Lune, le plan de l'écliptique vraie; il est aisé de faire voir, en effet, que les inégalités qui résultent du déplacement séculaire de l'écliptique étant tout à fait insensibles, les phénomènes relatifs aux mouvemens de la Lune sont absolument les mêmes, soit qu'on les rapporte à une écliptique fixe ou au plan mobile de l'écliptique vraie. Pour cela, observons que s' désignant la tangente de la latitude du Soleil au-dessus de l'écliptique fixe, cette quantité peut être représentée par une suite de termes de cette forme, n° 69, livre II,

$$\Sigma k \sin (v' + ht + l).$$

L'angle ht croissant avec une grande lenteur, h est un coefficient très-petit.

Soit z_1 ce que devient la fonction z par rapport au plan de l'écliptique fixe; on aura, aux quantités près

de l'ordre s^3 que nous négligeons,

$$z_1 = z + \Sigma k \sin(v' + ht + l) + \delta z,$$

la caractéristique δ désignant la variation de la fonction z provenant du mouvement séculaire de l'écliptique.

L'expression de la fonction R, n° 3, en négligeant les quantités de l'ordre s'^2, contient le terme suivant :

$$R = \frac{m'r^2}{4r'^3}[1 + 3(1 - s^2)\cos(2v - 2v') + 12ss'\cos(v - v') - 3s^2].$$

Au moyen de la formule

$$\frac{dR}{dz} = \frac{dR}{rds} + \frac{s}{r}\left(r\frac{dR}{dr}\right),$$

on en conclut

$$\frac{dR}{dz} = -\frac{m'rs}{r'^3} + \frac{3m'rs'}{r'^3}\cos(v - v').$$

L'équation (19), n° 37, devient ainsi :

$$\frac{d^2z_1}{dt^2} + \frac{z_1}{r^3} + \frac{m'rs}{r'^3} - \frac{3m'rs'}{r'^3}\cos(v - v') = 0.$$

Si l'on néglige les excentricités des orbites de la Lune et du Soleil, en suivant l'analyse du numéro cité, et en observant qu'on a, n° 8, $\frac{m'a^3}{a'^3} = m^2$, on trouvera

$$\frac{d^2z_1}{dt^2} + \left(1 + \frac{3}{2}m^2\right)z_1 - 3m^2s'\cos(v - v') = 0.$$

Le terme $\frac{3}{2}m^2 z_1$ introduit dans cette équation la quantité $\frac{3}{2}m^2 \Sigma k \sin(v' + ht + l)$, le terme suivant une quantité égale et de signe contraire, qui détruit la première; si l'on substitue donc pour z_1 et s' leurs valeurs, en observant qu'on peut supposer $v = t$, en

n'ayant égard qu'aux inégalités dépendantes de la variation séculaire de l'écliptique, on aura

$$\frac{d^2.\delta z}{dt^2}+\left(1+\frac{3}{2}m^2\right)\delta z+\Sigma\,[1-(1+h)^2]\,k\sin(t+ht+l)=0.$$

Pour satisfaire à cette équation, soit

$$\delta z=\Sigma\,k'\sin(t+ht+l).$$

En substituant cette valeur à la place de δz, on aura

$$\Sigma\,[1-(1+h)^2]\,(k+k')\sin(t+ht+l)+\frac{3}{2}m^2\,\Sigma\,k'\sin(t+ht+l)=0;$$

d'où, en comparant les *sinus* des mêmes angles, on tire

$$k'=-\frac{[1-(1+h)^2]\,k}{\frac{3}{2}m^2+1-(1+h)^2}=\frac{(2h+h^2)\,k}{\frac{3}{2}m^2-2h-h^2}.$$

L'inégalité qui résulte du déplacement séculaire de l'écliptique dans l'expression de la fonction z, sera donc

$$\frac{\Sigma\,(2h+h^2)\,k\sin(t+ht+l)}{\frac{3}{2}m^2-2h-h^2}.$$

Le coefficient de cette inégalité est insensible; en effet, d'après la théorie des mouvemens planétaires, l'angle ht ne s'élevant qu'à $25''$ au plus par an, et l'angle $\frac{3}{2}m^2t$, d'après la valeur de m, nº 110, croissant de $40°,37$ à peu près dans le même intervalle, le facteur $\frac{2h+h^2}{\frac{3}{2}m^2-2h-h^2}$ ne surpasse guère 0,00034; le facteur k ne s'élevant d'ailleurs qu'à quelques centièmes de secondes, le produit de ces deux facteurs est une quantité tout à fait insensible.

Ainsi donc, dans l'équation différentielle qui

détermine les inégalités de la latitude, on peut omettre les termes qui dépendent des déplacemens séculaires de l'écliptique, et la latitude de la Lune par rapport à l'écliptique vraie est la même que dans le cas où cette écliptique serait immobile; ce qui est conforme à la supposition que nous avions admise, n° 3, pour simplifier les formules d'où dépend la détermination des mouvemens lunaires.

CHAPITRE VI.

Des inégalités du mouvement lunaire qui résultent de l'action des planètes.

128. Parmi les causes qui peuvent produire dans le mouvement de la Lune des inégalités sensibles, il faut comprendre encore la différence d'action que les planètes exercent sur la Terre et sur son satellite. Pour les déterminer, soient m'' la masse de la planète que l'on considère, X, Y, Z ses coordonnées rapportées au centre de la Terre, f sa distance à ce centre, la fonction perturbatrice R sera augmentée, par l'action de m'', de la quantité

$$\frac{m''}{\sqrt{(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2}}-\frac{m''(xX+yY+zZ)}{f^3},$$

ou, en développant,

$$\frac{m''}{f}-\frac{1}{2}\frac{m''r^2}{f^3}+\frac{3}{2}\frac{m''(xX+yY+zZ)^2}{f^5}.$$

Soient x'', y'', z'' les coordonnées de m'' rapportées au centre du Soleil, x', y', z' étant celles de la Terre, on aura

$$X=x''-x', \quad Y=y''-y', \quad Z=z''-z';$$

et la fonction précédente deviendra ainsi :

$$\frac{m''}{f}-\frac{1}{2}\frac{m''r^2}{f^3}+\frac{3}{2}m''\frac{(xx''+yy''+zz''-xx'-yy'-zz')^2}{f^5}.$$

Prenons pour plan fixe le plan de l'écliptique; soient r'' le rayon vecteur de la planète m'' projeté sur ce plan, v'' l'angle que cette projection fait avec l'axe des x, et s'' la tangente de la latitude héliocentrique de la planète : nommons, comme précédemment, r' le rayon vecteur de la Terre, et v' l'angle formé par ce rayon et par la droite d'où l'on compte l'angle v'', on aura

$$x'' = r'' \cos v'', \qquad y'' = r'' \sin v'', \qquad z'' = r''s'';$$
$$x' = r' \cos v', \qquad y' = r' \sin v', \qquad z' = 0.$$

L'accroissement de la fonction R par l'action de m'', en substituant pour x', y', z', x'', y'' et z'' leurs valeurs, devient

$$\frac{m''}{f} - \frac{1}{2}\frac{m''r^2}{f^3} + \frac{3}{2}\frac{m''r^2[r''\cos(v-v'') - r'\cos(v-v') + r''ss'']^2}{(1+s^2)f^5}.$$

Si l'on développe cette expression, en observant que l'on a

$$f = \sqrt{r'^2 + r''^2 - 2r'r''\cos(v'-v'')},$$

aux quantités près de l'ordre du carré de s'' que nous négligerons, on trouve

$$\frac{m''}{f} + \frac{m''r^2(1-3s^2)}{4f^3} + \frac{3m''r^2}{4f^5} \times \left\{ \begin{array}{l} r''^2\cos(2v-2v'') + r'^2\cos(2v-2v') - 2r'r''\cos(2v-v'-v'') \\ \qquad + 4r''ss''[r''\cos(v-v'') - r'\cos(v-v')] \end{array} \right\}.$$

Le premier terme de cette expression ne renfermant pas les coordonnées de la Lune, disparaît par la différentiation dans les équations différentielles du mouvement troublé. On peut négliger les termes divisés par f^5; en nommant donc R_1 la partie de la fonction perturbatrice qui dépend de l'action de m'' sur la

Lune, on aura simplement :

$$R = \frac{m'' r^2}{4 f^3}.$$

D'après la valeur précédente de f, il est aisé de voir qu'on peut développer la fonction $\frac{1}{f^3}$ en une série de la forme

$$\frac{1}{2} l^{(0)} + l^{(1)} \cos(v'' - v') + l^{(2)} \cos 2(v'' - v') + \text{etc.};$$

en nommant donc i le rapport du moyen mouvement de la planète à celui de la Lune pris pour unité, il en résultera dans R les termes suivans :

$$R = \frac{m'' r^2}{4} \left[\frac{1}{2} l^{(0)} + l^{(1)} \cos(i - m)t + l^{(2)} \cos 2(i - m)t + \text{etc.} \right].$$

En ne considérant que ces termes et en négligeant l'excentricité de l'orbe lunaire, ce qui permet de supposer $r = a$, on aura

$$r \frac{dR}{dr} = 2R, \quad \int d'R = 0,$$

et l'équation différentielle (6), n° 13, deviendra

$$\frac{d^2 . \delta \frac{1}{r}}{dt^2} + \delta \frac{1}{r} + \frac{m'' a^2}{2} \left[\frac{1}{2} l^{(0)} + l^{(1)} \cos(i - m)t + l^{(2)} \cos 2(i - m)t + \text{etc.} \right] = 0.$$

Cette équation donne, en l'intégrant,

$$\delta . \frac{a}{r} = - \frac{m'' a^3}{2} \times \left[\frac{l^{(1)} \cos(i - m)t}{1 - (i - m)^2} + \frac{l^{(2)} \cos 2(i - m)t}{1 - 4(i - m)^2} + \frac{l^{(3)} \cos 3(i - m)t}{1 - 9(i - m)^2} + \text{etc.} \right];$$

et, en vertu de l'équation (15), n° 27, on en conclut

$$\frac{d . \delta v}{dt} = - m'' a^3 \times \left[\frac{l^{(1)} \cos(i - m)t}{1 - (i - m)^2} + \frac{l^{(2)} \cos 2(i - m)t}{1 - 4(i - m)^2} + \frac{l^{(3)} \cos 3(i - m)t}{1 - 9(i - m)^2} + \text{etc.} \right];$$

d'où, en intégrant et observant qu'on a, n° 8, $\frac{m'a^3}{a'^3} = m^2$, m' désignant la masse du Soleil, on tire :

$$\delta v = -\frac{m^2 a''^3}{i-m} \cdot \frac{m''}{m'} \times \left[\frac{l^{(1)} \sin(i-m)t}{1-(i-m)^2} + \frac{1}{2} \frac{l^{(2)} \sin 2(i-m)t}{1-4(i-m)^2} + \frac{1}{3} \frac{l^{(3)} \sin 3(i-m)t}{1-9(i-m)^2} + \text{etc.} \right].$$

Cela posé, dans le cas d'une planète inférieure, α désignant le rapport de la distance moyenne de la planète au Soleil à celle de la Terre au même astre, ce qui donne $\alpha = \frac{a''}{a'}$, on pourra supposer, n° 18, livre VI,

$$[1+\alpha^2 - 2\alpha \cos(i-m)t]^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} b_{\frac{3}{2}}^{(0)} + b_{\frac{3}{2}}^{(1)} \cos(i-m)t + b_{\frac{3}{2}}^{(2)} \cos 2(i-m)t + \text{etc.}$$

Cette valeur, comparée à celle de la fonction $\frac{1}{f^3}$, donne

$$a'^3 l^{(1)} = b_{\frac{3}{2}}^{(1)}, \qquad a'^3 l^{(2)} = b_{\frac{3}{2}}^{(2)}, \text{ etc.}$$

Dans le cas d'une planète supérieure, α représentant alors le rapport de la distance moyenne de la Terre au Soleil à celle de la planète au même astre, ce qui donne $\alpha = \frac{a'}{a''}$, on aura

$$a''^3 l^{(1)} = \alpha^3 b_{\frac{3}{2}}^{(1)}, \qquad a''^3 l^{(2)} = \alpha^3 b_{\frac{3}{2}}^{(2)}, \text{ etc.}$$

La variation δv de la longitude vraie de la Lune résultant de l'action de m'', devient ainsi, pour une planète inférieure,

$$-\frac{m^2}{i-m} \cdot \frac{m''}{m'} \times \left\{ \frac{b_{\frac{3}{2}}^{(1)} \sin(i-m)t}{1-(i-m)^2} + \frac{1}{2} \frac{b_{\frac{3}{2}}^{(2)} \sin 2(i-m)t}{1-4(i-m)^2} + \frac{1}{3} \frac{b_{\frac{3}{2}}^{(3)} \sin 3(i-m)t}{1-9(i-m)^2} + \text{etc.}, \right\} \qquad (a)$$

et pour une planète supérieure,

$$-\frac{m^2\alpha^2}{i-m}\cdot\frac{m''}{m'}\times\left\{\begin{array}{l}\frac{b_{\frac{3}{2}}^{(1)}\sin(i-m)t}{1-(i-m)^2}+\frac{1}{2}\frac{b_{\frac{3}{2}}^{(2)}\sin 2(i-m)t}{1-4(i-m)^2}\\ \qquad +\frac{1}{3}\frac{b_{\frac{3}{2}}^{(3)}\sin 3(i-m)t}{1-9(i-m)^2}+\text{etc.}\end{array}\right\} \quad (b)$$

Ce sont les seules inégalités sensibles que l'action directe de la planète m'' sur la Lune produise dans l'expression de la *longitude vraie;* mais l'action de m'' sur la Terre introduit dans l'expression de son rayon vecteur des inégalités qui, réfléchies par l'action du Soleil dans le mouvement de la Lune, y produisent des inégalités du même ordre que celles que nous venons de considérer. Pour le faire voir, supposons qu'en négligeant les termes dépendans des excentricités des orbites, on représente les inégalités de la fonction $\frac{\delta r'}{a'}$ résultant de l'action de la planète m'' sur la Terre, par la série

$$\frac{m''}{m'}\left[k^{(1)}\cos(n''t-n't+\varepsilon''-\varepsilon')+k^{(2)}\cos 2(n''t-n't+\varepsilon''-\varepsilon')+\text{etc.}\right].$$

Le terme $\frac{m'r^2}{2r'^3}$ que renferme la fonction $r\frac{dR}{dr}$, n° 3, par son développement, produira le suivant:

$$-\frac{3m'a^2}{2a'^3}\left[k^{(1)}\cos(i-m)t+k^{(2)}\cos 2(i-m)t+\text{etc.}\right];$$

d'où résulte dans $\delta\frac{a}{r}$ les termes

$$\frac{3m^2}{2}\cdot\frac{m''}{m'}\left[\frac{k^{(1)}\cos(i-m)t}{1-(i-m)^2}+\frac{k^{(2)}\cos 2(i-m)t}{1-4(i-m)^2}+\text{etc.}\right];$$

et, par conséquent, en vertu de l'équation $\delta v=\frac{h}{r^2}$,

dans δv le terme

$$\frac{3m^2}{i-m}\cdot\frac{m''}{m'}\left[\frac{k^{(1)}\sin(i-m)t}{1-(i-m)^2}+\frac{k^{(2)}\sin 2(i-m)t}{1-4(i-m)^2}+\text{etc.}\right]; \qquad (c)$$

quantité du même ordre que celle qui résulte de l'action directe de la planète m'' sur la Lune. En les réunissant, on aura toutes les inégalités sensibles qui peuvent résulter de l'action des planètes dans le mouvement de la Lune.

Pour réduire en nombres les formules précédentes, nous supposerons que m'' représente successivement Vénus et Jupiter. On aura, relativement à Vénus, par les nos 87 et 89 du livre VI,

$$\frac{m''}{m'}=\frac{1}{401839},\qquad \alpha=\frac{a''}{a'}=0,7233323,$$

$$\log b_{\frac{3}{2}}^{(1)}=0,9480163,\quad \log b_{\frac{3}{2}}^{(2)}=0,8684434,\quad \log b_{\frac{3}{2}}^{(3)}=0,7748044.$$

Les observations donnent $i-m=0,0467899$, et l'on a, no 110, $m^2=0,0055952 34$; la fonction (a) réduite en secondes au moyen de ces valeurs, devient

$$-0'',54703\sin(i-m)t-0'',22923\sin 2(i-m)t-0'',12456\sin 3(i-m)t.$$

En observant que $\delta r''$, dans le no 97, livre VI, désigne ce que nous nommons ici $\frac{\delta r'}{a'}$, on aura pour la partie de $\frac{\delta r'}{a'}$ résultant de l'action de Vénus,

$$\begin{aligned}\frac{\delta r'}{a'}=&-0,0000057218\cos(i-m)t\\&+0,0000163449\cos 2(i-m)t\\&+0,0000025811\cos 3(i-m)t\\&+\text{etc.}\end{aligned}$$

La fonction (c), réduite en secondes, deviendra ainsi :

$$-0'',42432\sin(i-m)t+0'',61008\sin 2(i-m)t+0'',06496\sin 3(i-m)t.$$

En réunissant cette valeur à la précédente, on aura pour les inégalités du mouvement lunaire en longitude dues à l'action directe et indirecte de Vénus sur la Lune,

$$-0'',97135 \sin(i-m)t + 0'',38085 \sin 2(i-m)t - 0'',05960 \sin 3(i-m)t.$$

Relativement à Jupiter, on a, nos 87 et 89, livre VI,

$$\frac{m'''}{m'} = \frac{1}{1053,924}, \qquad \alpha = 0,1922646,$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 0,6190630, \qquad b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 0,148198, \qquad b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 0,032439.$$

Les observations donnent $i - m = -0,0684952$; la fonction (a), réduite en secondes, devient ainsi :

$$0'',07067 \sin(i-m)t + 0'',00858 \sin 2(i-m)t + 0'',00130 \sin 3(i-m)t.$$

On a d'ailleurs, n° 97, livre VI, en vertu de l'action de Jupiter,

$$\frac{\delta r'}{a'} = 0,0000161375 \cos(i-m)t - 0,0000092122 \cos 2(i-m)t$$
$$- 0,0000065573 \cos 3(i-m)t.$$

La fonction (c), réduite en secondes, devient ainsi :

$$-0'',81957 \sin(i-m)t + 0'',23728 \sin 2(i-m)t + 0'',01166 \sin 3(i-m)t.$$

En réunissant cette valeur à la précédente; on aura, pour les inégalités que l'action directe et indirecte de Jupiter sur la Lune introduit dans l'expression de son mouvement en longitude :

$$-0'',74890 \sin(i-m)t + 0'',24586 \sin 2(i-m)t + 0'',01296 \sin 3(i-m)t.$$

L'action des planètes introduit dans la valeur de la quantité c qui détermine le mouvement moyen du périgée lunaire, des altérations légères qu'il est facile de déterminer au moyen des formules du n° 95. En effet, la fonction R, par ce qui précède, contient le terme $\frac{m'' l^{(0)} r^2}{8}$; si on le développe, en n'ayant égard

qu'à la partie non périodique de ce développement, et faisant $a'^3 l^{(0)} = b^{(0)}_{\frac{3}{2}}$, on trouve

$$R = \frac{3}{16} b^{(0)}_{\frac{3}{2}} \frac{a^2}{a'^3} m'' e^2,$$

et, par l'analyse du n° 39, on voit qu'il en résulte dans c le terme suivant :

$$-\frac{3}{8} m^2 b^{(0)}_{\frac{3}{2}} \frac{m''}{m'}.$$

La fonction R, n° 3, contient le terme $-\frac{3m'r^2}{4r'^4}\delta r'$, et par son développement il en résulte dans R le terme

$$-\frac{9}{8}\frac{m'a^2}{a'^3}\frac{\delta r'}{a'},$$

$\delta r'$ désignant la partie constante de la variation du rayon vecteur de l'orbe terrestre. Ce terme produira dans c le suivant :

$$\frac{9}{4} m^2 \frac{\delta r'}{a'}.$$

En le réunissant au précédent, on aura l'altération totale de la valeur de c, due à l'action directe et indirecte de la planète m''; mais ces deux quantités sont absolument insensibles.

129. Considérons maintenant le mouvement en latitude. La fonction R, en vertu de l'action de m'', contient le terme suivant, n° 108,

$$\frac{3m'' r^2 r'' s s'' [r'' \cos(v - v'') - r' \cos(v - v')]}{f^5}.$$

En négligeant les quantités de l'ordre s^2 et en observant que l'on a, n° 37, $\frac{dR}{dz} = \frac{1}{r}\left(\frac{dR}{ds}\right) + \frac{s}{r}\left(r\frac{dR}{dr}\right)$, on

trouve qu'il en résulte dans $\frac{dR}{dz}$ le terme

$$\frac{3m''r\,r''s''[r''\cos(v-v'')-r'\cos(v-v')]}{f^5}.$$

Si l'on substitue dans cette expression à la place de s'' sa valeur elliptique, $\gamma''\sin(v''-\theta'')$, en désignant par γ'' la tangente de l'inclinaison de l'orbite de m'' à l'écliptique, et par θ'' la longitude de son nœud ascendant; que, conformément à la notation adoptée n° 18, livre VI, on suppose, pour le cas d'une planète inférieure, $a''=\alpha a'$, et

$$f^{-5}=\frac{1}{a'^5}\left[\frac{1}{2}b^{(0)}_{\frac{5}{2}}+b^{(1)}_{\frac{5}{2}}\cos(v'-v'')+\text{etc.}\right],$$

on s'assurera aisément que la fonction précédente renferme, dans son développement, le terme suivant:

$$\frac{3}{4}\alpha m''\frac{r}{a'^5}\left(\alpha b^{(0)}_{\frac{5}{2}}-b^{(1)}_{\frac{5}{2}}\right)\gamma''\sin(v-\theta'').$$

Ce terme acquiert, par l'intégration dans l'expression de la latitude, un très-petit diviseur de l'ordre m^2, qui peut le rendre sensible. En effet, si l'on substitue cette valeur à la place de Q dans l'équation

$$\frac{d^2z}{dt^2}+\left(1+\frac{3}{2}m^2\right)\frac{z}{a^3}+Q=0,$$

qu'on intègre l'équation résultante, en observant que l'on peut supposer ici $v=nt+\varepsilon$, et que l'on a, n° 8, $a^3n^2=1$ et $\frac{m'a^3}{a'^3}=m^2$, on trouvera qu'il en résulte dans z le terme

$$-\frac{1}{2}\alpha\frac{m''r}{m'}\left[\alpha b^{(0)}_{\frac{5}{2}}-b^{(1)}_{\frac{5}{2}}\right]\gamma''\sin(nt+\varepsilon-\theta'').$$

On a, d'ailleurs, $s=\frac{z}{r}$; l'action d'une planète inférieure produit donc dans s l'inégalité

$$-\frac{1}{2}\alpha\frac{m''}{m'}\left[\alpha b^{(0)}_{\frac{5}{2}}-b^{(1)}_{\frac{5}{2}}\right]\gamma''\sin(nt+\varepsilon-\theta'').$$

Pour une planète supérieure, cette inégalité deviendrait

$$-\frac{1}{2}\alpha^3\frac{m''}{m'}\left[b_{\frac{5}{2}}^{(0)} - \alpha b_{\frac{5}{2}}^{(1)}\right]\gamma'' \sin(nt + \varepsilon - \theta'').$$

Réduisons ces deux quantités en nombres. En supposant d'abord que la première se rapporte à Vénus, d'après les valeurs de $b_{\frac{3}{2}}^{(0)}$, $b_{\frac{3}{2}}^{(1)}$, etc., n° 89, livre VI, au moyen de la formule (5), n° 19, livre VI, on trouve

$$b_{\frac{5}{2}}^{(0)} = 85,77422,$$

$$b_{\frac{5}{2}}^{(1)} = 83,40760.$$

On a, d'ailleurs, n° 88, livre VI, $\gamma'' = \text{tang}(3^\circ\, 23'\, 29'')$; en joignant ces valeurs à celles de $\frac{m''}{m'}$ et de α rapportées plus haut, on trouve, pour l'inégalité résultante de l'action de Vénus dans le mouvement en latitude de la Lune,

$$0'',23476 \sin(nt + \varepsilon - \theta').$$

Pour Jupiter, au moyen des valeurs rapportées n° 89, livre VI, et de la formule (5), n° 19, on trouve

$$b_{\frac{5}{2}}^{(0)} = 2,51906,$$

$$b_{\frac{5}{2}}^{(1)} = 1,13310.$$

On a, d'ailleurs, n° 88, livre VI, $\gamma'' = \text{tang}(1^\circ\, 18'\, 52'')$; en joignant à ces valeurs celles qui sont rapportées plus haut, on trouve, pour l'inégalité produite par l'action de Jupiter dans le mouvement lunaire, en latitude,

$$0'',03718 \sin(nt + \varepsilon - \theta^{\text{IV}}),$$

θ' et θ^{IV} désignant respectivement les longitudes des nœuds ascendans des orbites de Vénus et de Jupiter sur l'écliptique fixe.

130. L'action des planètes introduit encore dans l'expression du mouvement moyen des nœuds de légères variations, qu'on peut déterminer par les formules du n° 95. En effet, la fonction perturbatrice renferme, en vertu de l'action de m'', le terme $\frac{m'' r^2 (1 - 3s^2)}{4f^3}$; en le développant, et en n'ayant égard qu'à la partie constante qui en résulte, on aura

$$R = -\frac{3}{16} b_{\frac{3}{2}}^{(0)} \frac{a^2}{a'^3} m'' \gamma^2.$$

En comparant cette valeur à celle de la fonction R, n° 95, on voit que la quantité g est augmentée par l'action d'une planète inférieure de la quantité $\frac{3}{8} m^2 b_{\frac{3}{2}}^{(0)} \frac{m''}{m'}$; cet accroissement serait de $\frac{3}{8} \alpha^2 b_{\frac{3}{2}}^{(0)} \frac{m''}{m'}$ relativement à une planète supérieure.

La fonction R, n° 3, contient le terme $-\frac{3m' r^2 s^2}{4r'^3}$; ce terme produit le suivant $\frac{9}{8} \frac{m' a^2}{a'^3} \frac{\delta r'}{a'} \gamma^2$, $\delta r'$ désignant la partie constante du rayon vecteur de l'orbe terrestre; on peut en conclure qu'il en résultera, dans l'expression de g, le terme $-\frac{9}{4} m^2 \frac{\delta r'}{a'}$. On voit par là que l'action directe et indirecte de la planète m'' introduit dans g des variations égales, mais de signes contraires à celles que cette action produit dans c; mais ces quantités sont, comme nous l'avons dit, tout-à-fait insensibles.

131. Considérons enfin les altérations que l'action des planètes peut introduire dans les inégalités séculaires du mouvement lunaire. En vertu de l'action directe de la planète m'', la fonction perturbatrice ren-

ferme le terme

$$3m''r^2\frac{[r''^2\cos(2v-2v'')+r'^2\cos(2v-2v')-2r'r''\cos(2v-v'-v'')]}{4f^5},$$

qui, en se développant, produit des termes de cette forme

$$\frac{m''}{m'}\,\mathrm{H}\,m^2e'^2+\frac{m''}{m'}\,\mathrm{H}'m^2e'e''+\frac{m''}{m'}\,\mathrm{H}''m^2e''^2,$$

e'' étant le rapport de l'excentricité de l'orbite de m'' au demi-grand axe.

Cela posé, il est facile de voir, par l'analyse du n° 94, que la quantité précédente produit, dans l'expression de la longitude ε de l'époque, des termes proportionnels à l'excentricité e' de l'orbe terrestre, et par suite, dans l'expression de la *longitude vraie* de la Lune, une *inégalité séculaire* analogue à celle qui résulte de l'action indirecte des planètes, et que nous avons déterminée n° 94. Mais tous les termes dont il s'agit étant multipliés par le très-petit facteur $\frac{m''}{m'}$, peuvent être regardés comme insensibles relativement à ceux qui forment l'*inégalité séculaire* proprement dite, et qui sont simplement multipliés par m^2 ; il paraît donc inutile d'y avoir égard.

L'action directe des planètes est donc à peu près inappréciable dans la variation séculaire de la longitude vraie de la Lune, tandis que l'action indirecte, transmise par le moyen du Soleil, produit la partie très-sensible de cette variation que la comparaison des anciennes observations aux modernes avait fait remarquer aux astronomes long-temps avant qu'on fût parvenu à en découvrir la cause théorique.

CHAPITRE VII.

Expressions numériques des trois coordonnées qui servent à déterminer à chaque instant la position de la Lune autour de la Terre.

132. Nous allons réunir, sous un même point de vue, les différens résultats auxquels nous sommes parvenus dans les chapitres précédens; nous convertirons ensuite les formules littérales en nombres, au moyen des données fournies par l'observation, et nous obtiendrons les valeurs des trois coordonnées d'où dépend à chaque instant la position de la Lune, avec toute l'exactitude que comportent les observations modernes. Nous aurons ainsi atteint le but final qu'on doit toujours se proposer dans la théorie de notre satellite, quelle que soit, du reste, la marche plus ou moins directe qu'on ait suivie pour y parvenir.

Dans les formules suivantes, on se rappellera que v désigne la *longitude vraie* de la Lune, $t + \varepsilon$ sa *longitude moyenne*, $mt + \varepsilon'$ celle du Soleil; et que, pour abréger, nous avons nommé

$\varphi = ct + c\varepsilon - \omega$ *l'anomalie moyenne de la Lune;*

$\varphi' = c'mt + c'\varepsilon' - \omega'$ *l'anomalie moyenne du Soleil;*

$\xi = t - mt + \varepsilon - \varepsilon'$ *la longitude moyenne de la Lune moins celle du Soleil;*

$\eta = gt + g\varepsilon - \theta$ *la longitude moyenne de la Lune moins celle du nœud:*

Dans ces valeurs, les trois quantités ε, ω, θ ne sont pas constantes; elles doivent être augmentées respectivement de leur équation séculaire, déterminée par les formules suivantes, nos 94 et 98.

Équation séculaire du moyen mouvement de la Lune,

$$\frac{3}{2} m^2 \int (e'^2 - E'^2)\, dt\,;$$

Équation séculaire du moyen mouvement du périgée,

$$\left[\begin{array}{c} -\frac{9}{8} m^2 - \frac{825}{32} m^3 - \frac{61179}{256} m^4 - \frac{1767849}{1024} m^5 \\ + \left(\frac{9}{16} m^2 + \frac{2475}{64} m^3\right) e^2 + \frac{9}{4} m^2 \gamma^2 \end{array}\right] \int (e'^2 - E'^2)\, dt\,;$$

Équation séculaire du moyen mouvement des nœuds,

$$\left[\begin{array}{c} \frac{9}{8} m^2 - \frac{33}{32} m^3 - \frac{3261}{256} m^4 - \frac{84517}{1024} m^5 \\ + \left(\frac{9}{4} m^2 - \frac{39}{64} m^3\right) e^2 - \frac{9}{16} m^2 \gamma^2 \end{array}\right] \int (e'^2 - E'^2)\, dt.$$

Dans l'intégrale $\int (e'^2 - E'^2) dt$, e' est la valeur de l'excentricité de l'orbe solaire qui répond à $t = 0$, E' sa valeur après un temps quelconque.

Les quantités c et g qui fixent les mouvemens progressifs du périgée et des nœuds, sont déterminées par les formules suivantes, nos 24, 51, 70, 41, 60, 83 et 97 :

$$\begin{aligned} c = 1 &- \frac{3}{4} m^2 - \frac{225}{32} m^3 - \frac{4071}{128} m^4 - \frac{265493}{2048} m^5 \\ &- \frac{12822631}{24576} m^6 - \frac{1273925965}{589824} m^7 \\ &+ \left(\frac{3}{8} m^2 + \frac{675}{64} m^3 + \frac{31893}{512} m^4 + \frac{2891955}{8192} m^5\right) e^2 \end{aligned}$$

$$- \left(\frac{9}{8} m^2 + \frac{825}{32} m^3 + \frac{61179}{256} m^4 + \frac{1767849}{1024} m^5 \right) e'^2$$

$$+ \left(\frac{3}{2} m^2 + \frac{189}{32} m^3 + \frac{3963}{128} m^4 + \frac{259287}{1024} m^5 \right) \gamma^2$$

$$+ \left(\frac{9}{16} m^2 + \frac{2475}{64} m^3 \right) e^2 e'^2$$

$$- \frac{63}{64} m^2 e^2 \gamma^2 + \frac{9}{4} m^2 e'^2 \gamma^2$$

$$+ \frac{3}{32} m^2 e^4 - \left(\frac{45}{32} m^2 + \frac{225}{4} m^3 \right) e'^4 - \frac{27}{64} m^2 \gamma^4$$

$$- \left(\frac{45}{32} m^2 + \frac{6075}{512} m^3 \right) \frac{a^2}{a'^2},$$

$$g = 1 + \frac{3}{4} m^2 - \frac{9}{32} m^3 - \frac{273}{128} m^4 - \frac{9797}{2048} m^5$$

$$- \frac{199273}{24576} m^6 - \frac{6657733}{589824} m^7$$

$$+ \left(\frac{3}{2} m^2 + \frac{189}{32} m^3 + \frac{3027}{128} m^4 + \frac{8852925}{65536} m^5 \right) e^2$$

$$+ \left(\frac{9}{8} m^2 - \frac{33}{32} m^3 - \frac{3261}{256} m^4 - \frac{79753}{1024} m^5 \right) e'^2$$

$$- \left(\frac{3}{8} m^2 - \frac{27}{64} m^3 - \frac{1227}{512} m^4 - \frac{26203}{4096} m^5 \right) \gamma^2$$

$$+ \left(\frac{9}{4} m^2 - \frac{39}{64} m^3 \right) e^2 e'^2$$

$$- \frac{3}{4} m^2 e^2 \gamma^2 - \frac{9}{16} m^2 e'^2 \gamma^2$$

$$- \frac{21}{64} m^2 e^4 + \left(\frac{45}{32} m^2 - \frac{9}{4} m^3 \right) e'^4 + \frac{9}{32} m^2 \gamma^4$$

$$+ \left(\frac{45}{32} m^2 - \frac{15}{16} m^3 \right) \frac{a^2}{a'^2}.$$

Cela posé, en ne conservant dans l'expression du rayon vecteur que les termes du cinquième ordre, les seuls qui puissent produire des quantités sensibles (*), et en réunissant les résultats obtenus nos 26,

---

(*) Les termes que nous supprimons ici étaient nécessaires pour le calcul de la *longitude vraie*, qui exige que les approximations soient poussées beaucoup plus loin que pour le rayon vecteur.

53 et 72, on trouvera

Expression du rayon vecteur en fonction de la longitude moyenne.

$$
\begin{aligned}
\frac{a}{r} = {} & 1 + \frac{m^2}{6} - \frac{179}{288} m^4 - \frac{97}{48} m^5 + \frac{m^2}{4} e'^2 \\
& + \left\{ \begin{aligned} & 1 + \frac{m^2}{6} - \frac{645}{128} m^3 - \frac{152129}{4608} m^4 \\ & - \left(\frac{1}{8} + \frac{797}{96} m^2 \right) e^2 - \frac{43}{8} m^2 e'^2 \\ & - \left(\frac{83}{128} m^2 - \frac{315}{256} m^3 \right) \gamma^2 + \frac{1}{192} e^4 \end{aligned} \right\} e \cos \varphi \\
& + \left(1 + \frac{2}{3} m^2 - \frac{405}{32} m^3 - \frac{1}{3} e^2 \right) e^2 \cos 2\varphi \\
& + \left(\frac{9}{8} + \frac{41}{32} m^2 - \frac{81}{128} e^2 \right) e^3 \cos 3\varphi \\
& + \frac{4}{3} e^4 \cos 4\varphi + \frac{625}{384} e^5 \cos 5\varphi \\
& + \left(\begin{aligned} & - \frac{3}{2} m^2 + \frac{449}{16} m^4 \\ & - \frac{9}{4} m^2 e^2 - \frac{27}{16} m^2 e'^2 + \frac{9}{4} m^2 \gamma^2 \end{aligned} \right) e' \cos \varphi' \\
& - \frac{9}{4} m^2 e'^2 \cos 2\varphi' - \frac{53}{16} m^2 e'^3 \cos 3\varphi' \\
& + \left(\begin{aligned} & \frac{21}{8} m + \frac{1113}{64} m^2 + \frac{833}{8} m^3 \\ & + \frac{51}{64} m e^2 + \frac{189}{64} m e'^2 - \frac{63}{16} m \gamma^2 \end{aligned} \right) e e' \cos (\varphi - \varphi') \\
& + \left(\begin{aligned} & - \frac{21}{8} m - \frac{837}{64} m^2 - \frac{7063}{128} m^3 \\ & - \frac{51}{64} m e^2 - \frac{189}{64} m e'^2 + \frac{63}{16} m \gamma^2 \end{aligned} \right) e e' \cos (\varphi + \varphi') \\
& + \left(\frac{21}{4} m + \frac{1161}{32} m^2 \right) e^2 e' \cos (2\varphi - \varphi') \\
& - \left(\frac{21}{4} m + \frac{789}{32} m^2 \right) e^2 e' \cos (2\varphi + \varphi') \\
& + \left(\frac{63}{32} m + \frac{4635}{256} m^2 \right) e e'^2 \cos (\varphi - 2\varphi') \\
& + \left(- \frac{63}{32} m - \frac{1965}{256} m^2 \right) e e'^2 \cos (\varphi + 2\varphi') \\
& + \frac{63}{16} m e^2 e'^2 \cos (2\varphi - 2\varphi') - \frac{63}{16} m e^2 e'^2 \cos (2\varphi + 2\varphi') \\
& + \frac{567}{64} m e^3 e' \cos (3\varphi - \varphi') - \frac{567}{64} m e^3 e' \cos (3\varphi + \varphi')
\end{aligned}
$$

$$+\left(\frac{m^2}{2}-\frac{3}{4}m^3-\frac{5}{4}e^2+\frac{135}{32}m\,e^2\right)\gamma^2\cos 2\eta$$

$$+\left(-\frac{5}{8}+\frac{135}{64}m-\frac{481}{1536}m^2\right)e\,\gamma^2\cos(\varphi-2\eta)$$

$$+\left(\frac{33}{32}m^2-\frac{135}{64}e^2\right)e\,\gamma^2\cos(\varphi+2\eta)$$

$$+\frac{3}{4}m^2\,e'\,\gamma^2\cos(\varphi'-2\eta)+\frac{3}{4}m^2\,e'\,\gamma^2\cos(\varphi'+2\eta)$$

$$-\frac{75}{64}m\,e\,e'\,\gamma^2\cos(\varphi-\varphi'-2\eta)$$

$$+\frac{75}{64}m\,e\,e'\,\gamma^2\cos(\varphi+\varphi'-2\eta)$$

$$+\frac{639}{1024}e^3\,\gamma^2\cos(3\varphi-2\eta)$$

$$+\left\{\begin{array}{l}m^2+\frac{19}{6}m^3+\frac{131}{18}m^4+\frac{383}{27}m^5\\ +\left(\frac{15}{4}m+\frac{189}{16}m^2+\frac{11923}{256}m^3\right)e^2\\ -\left(\frac{5}{2}m^2+\frac{239}{12}m^3\right)e'^2\\ -\left(\frac{m^2}{2}+\frac{29}{24}m^3\right)\gamma^2\\ -\frac{75}{8}m\,e^2\,e'^2-\frac{15}{8}m\,e^2\gamma^2-\frac{15}{16}m\,e^4\end{array}\right\}\cos 2\xi$$

$$+\left\{\begin{array}{l}\frac{15}{8}m+\frac{187}{32}m^2+\frac{31673}{1536}m^3+\frac{1222495}{18432}m^4\\ -\frac{463}{128}m^2\,e^2-\left(\frac{75}{16}m+\frac{385}{32}m^2\right)e'^2\\ -\left(\frac{15}{16}m+\frac{161}{32}m^2\right)\gamma^2\end{array}\right\}e\cos(2\xi-\varphi)$$

$$+\left\{\begin{array}{l}\frac{33}{16}m^2+\frac{101}{16}m^3+\frac{5897}{384}m^4\\ +\left(\frac{405}{64}m+\frac{5037}{256}m^2\right)e^2-\frac{165}{32}m^2\,e'^2\\ -\frac{33}{32}m^2\,\gamma^2\end{array}\right\}e\cos(2\xi+\varphi)$$

$$+\left[\begin{array}{l}\frac{7}{2}m^2+\frac{157}{8}m^3+\frac{3349}{48}m^4\\ +\left(\frac{35}{4}m+\frac{799}{16}m^2\right)e^2-\frac{123}{16}m^2\,e'^2-\frac{7}{4}m^2\,\gamma^2\end{array}\right]e'\cos(2\xi-\varphi')$$

$$+\left[\begin{array}{l}-\frac{m^2}{2}-\frac{91}{24}m^3-\frac{1265}{144}m^4\\ -\left(\frac{15}{4}m+\frac{207}{16}m^2\right)e^2+\frac{m^2}{16}e'^2+\frac{m^2}{4}\gamma^2\end{array}\right]e'\cos(2\xi+\varphi')$$

$$+\left(-\frac{15}{4}m^2-\frac{225}{16}m^3+\frac{45}{32}m^2\gamma^2\right)e^2\cos(2\xi-2\varphi)$$

$$+\left(\frac{7}{2}m^2+\frac{127}{12}m^3+10\,m\,e^2\right)e^2\cos(2\xi+2\varphi)$$

$$+\left(\begin{array}{l}\frac{35}{8}m+\frac{1269}{64}m^2+\frac{47255}{768}m^3\\-\frac{315}{64}m\,e^2-\frac{615}{64}m\,e'^2-\frac{35}{16}m\,\gamma^2\end{array}\right)e\,e'\cos(2\xi-\varphi-\varphi')$$

$$+\left(\begin{array}{l}-\frac{15}{8}m-\frac{97}{64}m^2+\frac{49997}{768}m^3\\+\frac{945}{128}m\,e^2+\frac{15}{64}m\,e'^2+\frac{15}{16}m\,\gamma^2\end{array}\right)e\,e'\cos(2\xi-\varphi+\varphi')$$

$$+\left(\frac{231}{32}m^2+\frac{5727}{128}m^3+\frac{945}{64}m\,e^2\right)e\,e'\cos(2\xi+\varphi-\varphi')$$

$$+\left(-\frac{33}{32}m^2-\frac{1687}{128}m^3-\frac{405}{64}m\,e^2\right)e\,e'\cos(2\xi+\varphi+\varphi')$$

$$+\left(\frac{17}{2}m^2+\frac{799}{12}m^3+\frac{255}{16}m\,e^2\right)e'^2\cos(2\xi-2\varphi')$$

$$+\left(-\frac{3}{4}m^2-\frac{45}{16}m\,e^2\right)e'^2\cos(2\xi+2\varphi')$$

$$-\left(\frac{105}{64}m+\frac{7703}{768}m^2\right)e^3\cos(2\xi-3\varphi)$$

$$+\frac{2125}{384}m^2\,e^3\cos(2\xi+3\varphi)$$

$$-\frac{105}{8}m^2\,e^2\,e'\cos(2\xi-2\varphi-\varphi')$$

$$+\frac{15}{8}m^2\,e^2\,e'\cos(2\xi-2\varphi+\varphi')$$

$$+\frac{49}{4}m^2\,e^2\,e'\cos(2\xi+2\varphi-\varphi')$$

$$-\frac{7}{4}m^2\,e^2\,e'\cos(2\xi+2\varphi+\varphi')$$

$$+\left(\frac{255}{32}m+\frac{12011}{256}m^2\right)e\,e'^2\cos(2\xi-\varphi-2\varphi')$$

$$+\left(-\frac{45}{32}m-\frac{6219}{256}m^2\right)e\,e'^2\cos(2\xi-\varphi+2\varphi')$$

$$+\frac{561}{32}m^2\,e\,e'^2\cos(2\xi+\varphi-2\varphi')$$

$$-\frac{55}{16}m\,e^4\cos(2\xi-4\varphi)$$

$$-\frac{245}{64}m\,e^3\,e'\cos(2\xi-3\varphi-\varphi')$$

$$+\frac{105}{64}m\,e^3\,e'\cos(2\xi-3\varphi+\varphi')$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(-\frac{3}{4}m^2+\frac{9}{16}m^3+\frac{3}{32}m\gamma^2\right)\gamma^2\cos(2\xi-2\eta)\\
&-\left(\frac{21}{32}m+\frac{111}{128}m^2\right)e\gamma^2\cos(2\xi-\varphi-2\eta)\\
&-\frac{165}{128}m^2 e\gamma^2\cos(2\xi-\varphi+2\eta)\\
&+\left(-\frac{33}{64}m+\frac{503}{512}m^2\right)e\gamma^2\cos(2\xi+\varphi-2\eta)\\
&-\frac{21}{8}m^2 e'\gamma^2\cos(2\xi-\varphi'-2\eta)\\
&+\frac{3}{8}m^2 e'\gamma^2\cos(2\xi+\varphi'-2\eta)\\
&-\frac{21}{16}m^2 e^2\gamma^2\cos(2\xi-2\varphi-2\eta)\\
&-\frac{75}{32}m\, e^2\gamma^2\cos(2\xi-2\varphi+2\eta)\\
&-\frac{33}{32}m\, e^2\gamma^2\cos(2\xi+2\varphi-2\eta)\\
&+\left(\begin{array}{l}-\frac{15}{16}m-\frac{81}{16}m^2-\frac{5817}{256}m^3\\ -\frac{105}{32}me^2-\frac{15}{16}me'^2+\frac{165}{64}m\gamma^2\end{array}\right)\frac{a}{a'}\cos\xi\\
&+\frac{45}{16}m^2\frac{a}{a'}e\cos(\xi-\varphi)\\
&+\left(-\frac{15}{8}m-\frac{177}{16}m^2\right)\frac{a}{a'}e\cos(\xi+\varphi)\\
&+\left(\frac{15}{16}m-\frac{977}{64}m^2\right)\frac{a}{a'}e'\cos(\xi-\varphi')\\
&+\left(\frac{5}{4}-\frac{45}{8}m+\frac{2211}{64}m^2+\frac{1025}{192}e^2+\frac{5}{4}e'^2-\frac{15}{16}\gamma^2\right)\frac{a}{a'}e'\cos(\xi+\varphi')\\
&+\frac{435}{128}m\frac{a}{a'}e^2\cos(\xi-2\varphi)-\frac{405}{128}m\frac{a}{a'}e^2\cos(\xi+2\varphi)\\
&+\frac{15}{8}m\frac{a}{a'}ee'\cos(\xi+\varphi-\varphi')\\
&+\left(\frac{5}{2}-\frac{45}{4}m\right)\frac{a}{a'}ee'\cos(\xi+\varphi+\varphi')\\
&+\frac{435}{128}m\frac{a}{a'}e'^2\cos(\xi-2\varphi')\\
&-\frac{255}{128}m\frac{a}{a'}e'^2\cos(\xi+2\varphi')+\frac{45}{32}m\frac{a}{a'}\gamma^2\cos(\xi-2\eta)\\
&+\left(\frac{25}{64}m^2-\frac{115}{128}m^3\right)\frac{a}{a'}\cos 3\xi\\
&-\frac{475}{64}m^2\frac{a}{a'}e\cos(3\xi-\varphi)+\frac{15}{16}m^2\frac{a}{a'}e\cos(3\xi+\varphi)
\end{aligned}
$$

$$+\frac{125}{64}m\frac{a}{a'}e'\cos(3\xi-\varphi')+\frac{35}{16}m^2\frac{a}{a'}e'\cos(3\xi+\varphi')$$
$$-\frac{175}{64}m\frac{a}{a'}e^2\cos(3\xi-2\varphi)+\frac{75}{16}m\frac{a}{a'}ee'\cos(3\xi-\varphi+\varphi')$$
$$-\frac{25}{64}m\frac{a}{a'}\gamma^2\cos(3\xi-2\eta)$$
$$+\left(\frac{7}{8}m^4+\frac{2737}{480}m^5+\frac{105}{8}m^2e^2\right)\cos 4\xi$$
$$+\left(\frac{495}{128}m^3+\frac{13725}{512}m^4+\frac{6075}{512}m^2e^2\right)e\cos(4\xi-\varphi)$$
$$+\frac{805}{256}m^4e\cos(4\xi+\varphi)$$
$$+\frac{49}{8}m^4e'\cos(4\xi-\varphi')-\frac{7}{8}m^4e'\cos(4\xi+\varphi')$$
$$+\left(\frac{225}{64}m^2+\frac{3195}{128}m^3\right)e^2\cos(4\xi-2\varphi)$$
$$+\frac{5775}{256}m^3ee'\cos(4\xi-\varphi-\varphi')-\frac{1485}{256}m^3ee'\cos(4\xi-\varphi+\varphi')$$
$$+\frac{585}{512}m^2e^3\cos(4\xi-3\varphi)+\frac{525}{32}m^2e^2e'\cos(4\xi-2\varphi-\varphi')$$
$$-\frac{225}{32}me^2e'\cos(4\xi-2\varphi+\varphi')$$
$$+\frac{3}{8}m^2\gamma^2\cos(4\xi-2\eta)+\frac{45}{128}m^2e\gamma^2\cos(4\xi-\varphi-2\eta).$$

133. En réunissant de même les résultats obtenus nos 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 57, 58, 77, 78, 79, 80, 101, 102, 109, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123 et 124, on aura, pour l'expression de la *longitude vraie* de la Lune, en fonction de sa longitude moyenne :

Expression de la longitude vraie en fonction de la longitude moyenne.

$$v=t+\varepsilon+\frac{3}{2}m^2\int(e'^2-E'^2)\,dt$$
$$+\left\{\begin{array}{l}2+\frac{3}{2}m^2-\frac{75}{64}m^3-\frac{26659}{256}m^4-\frac{4884375}{36864}m^5-\frac{65756819}{147456}m^6\\ -\left(\frac{1}{4}+17m^2+\frac{3195}{32}m^3\right)e^2-\left(9m^2+\frac{6125}{64}m^3\right)e'^2\\ -\left(\frac{51}{32}m^2-\frac{87}{16}m^3\right)\gamma^2+\frac{5}{96}e^4+\frac{107}{4608}e^6\end{array}\right\}e\sin\varphi$$

$$+\left\{\begin{array}{l}\frac{5}{4}+\frac{23}{16}m^2-\frac{1485}{128}m^3-\frac{5597}{64}m^4-\frac{12036265}{24576}m^5\\ -\left(\frac{11}{24}+\frac{47503}{1536}m^2\right)e^2-\frac{389}{32}m^2e'^2\\ -\left(\frac{5}{16}-\frac{135}{128}m\right)\gamma^2+\frac{17}{192}e^4\end{array}\right\}e^2\sin 2\varphi$$

$$+\left(\frac{13}{12}+\frac{41}{24}m^2-\frac{43}{64}e^2-\frac{5}{8}\gamma^2\right)e^3\sin 3\varphi$$

$$+\frac{103}{96}e^4\sin 4\varphi+\frac{1097}{960}e^5\sin 5\varphi$$

$$+\left\{\begin{array}{l}-3m+\frac{735}{16}m^3+\frac{1261}{4}m^4+\frac{142817}{96}m^5+\frac{3257665}{576}m^6\\ \qquad+\frac{964471235}{55296}m^7\\ -\left(\begin{array}{l}\frac{27}{8}m+\frac{2925}{32}m^2+\frac{454735}{512}m^3+\frac{39522017}{6144}m^4\\ \qquad+\frac{638335067}{16384}m^5\end{array}\right)e^2\\ -\frac{27}{8}me'^2+\left(\frac{27}{8}m-\frac{117}{32}m^2-\frac{6785}{512}m^3\right)\gamma^2\end{array}\right\}e'\sin\varphi'$$

$$+\left(\begin{array}{l}-\frac{9}{4}m+\frac{5751}{128}m^3+\frac{13871}{32}m^4\\ -\frac{81}{32}me^2-\frac{7}{4}me'^2+\frac{81}{32}m\gamma^2\end{array}\right)e'^2\sin 2\varphi'$$

$$-\frac{53}{24}me'^3\sin 3\varphi'$$

$$+\left\{\begin{array}{l}\frac{21}{4}m+\frac{1233}{32}m^2+\frac{15165}{64}m^3+\frac{2844993}{2048}m^4\\ \qquad+\frac{307187071}{36864}m^5+\frac{91720676239}{1769472}m^6\\ +\frac{51}{32}me^2+\frac{189}{32}me'^2-\frac{63}{8}m\gamma^2\end{array}\right\}ee'\sin(\varphi-\varphi')$$

$$+\left\{\begin{array}{l}-\frac{21}{4}m-\frac{717}{32}m^2-\frac{3215}{32}m^3-\frac{2806183}{6144}m^4\\ \qquad-\frac{19962409}{2216}m^5-\frac{18084760319}{1769472}m^6\\ -\frac{51}{32}me^2-\frac{189}{32}me'^2+\frac{63}{8}m\gamma^2\end{array}\right\}ee'\sin(\varphi+\varphi')$$

$$+\left(\begin{array}{l}\frac{105}{16}m+\frac{6081}{128}m^2+\frac{139475}{512}m^3\\ +\frac{13}{32}me^2+\frac{945}{128}me'^2-\frac{1641}{128}m\gamma^2\end{array}\right)e^2e'\sin(2\varphi-\varphi')$$

$$+\left(-\frac{105}{16}m-\frac{3669}{128}m^2\right)e^2e'\sin(2\varphi+\varphi')$$

$$+\left(\begin{array}{l}\frac{63}{16}m+\frac{5355}{128}m^2+\frac{43557}{128}m^3\\ -\frac{1521}{256}me^2+\frac{49}{16}me'^2-\frac{189}{32}m\gamma^2\end{array}\right)ee'^2\sin(\varphi-2\varphi')$$

$$+\left(-\frac{63}{16}m-\frac{1245}{128}m^2-\frac{10519}{256}m^3\right)ee'^2\sin(\varphi+2\varphi')$$

$$+\frac{273}{32}me^2e'\sin(3\varphi-\varphi')-\frac{273}{32}me^2e'\sin(3\varphi+\varphi')$$

$$+\left[\begin{array}{l}-\frac{1}{4}+\frac{11}{16}m^2-\frac{33}{32}m^3-\frac{623}{256}m^4\\ -\left(\frac{9}{16}-\frac{675}{128}m\right)e^2-\frac{1}{8}\gamma^2\end{array}\right]\gamma^2\sin 2\eta$$

$$+\left(\frac{3}{4}-\frac{135}{32}m-\frac{69}{256}m^2-\frac{2857}{2048}m^3\right)e\gamma^2\sin(\varphi-2\eta)$$

$$+\left(-\frac{1}{2}+\frac{13}{16}m^2+\frac{19}{96}e^2-\frac{1}{4}\gamma^2\right)e\gamma^2\sin(\varphi+2\eta)$$

$$+\left(\begin{array}{l}\frac{3}{16}m-\frac{123}{128}m^2-\frac{4721}{512}m^3+\frac{69}{128}me^2+\frac{27}{128}me'^2\\ \qquad-\frac{45}{128}m\gamma^2\end{array}\right)e'\gamma^2\sin(\varphi'-2\eta)$$

$$+\left(\frac{3}{16}m+\frac{201}{128}m^2\right)e'\gamma^2\sin(\varphi'+2\eta)$$

$$+\left(-\frac{1}{8}-\frac{135}{64}m\right)e^2\gamma^2\sin(2\varphi-2\eta)$$

$$-\frac{13}{16}e^2\gamma^2\sin(2\varphi+2\eta)$$

$$+\frac{45}{32}mee'\gamma^2\sin(\varphi-\varphi'-2\eta)$$

$$-\frac{27}{16}mee'\gamma^2\sin(\varphi-\varphi'+2\eta)$$

$$-\frac{45}{32}mee'\gamma^2\sin(\varphi+\varphi'-2\eta)$$

$$+\frac{27}{16}mee'\gamma^2\sin(\varphi+\varphi'+2\eta)$$

$$+\frac{9}{64}me'^2\gamma^2\sin(2\varphi'-2\eta)$$

$$+\frac{9}{64}me'^2\gamma^2\sin(2\varphi'+2\eta)$$

$$+\frac{989}{1536}e^3\gamma^2\sin(3\varphi-2\eta)$$

$$-\frac{59}{48}e^3\gamma^2\sin(3\varphi+2\eta)$$

$$+\frac{1}{32}\gamma^4\sin 4\eta$$

$$-\frac{3}{16}e\,\gamma^4\sin(\varphi-4\eta)$$

$$+\frac{1}{8}e\,\gamma^4\sin(\varphi+4\eta)$$

$$+\left\{\begin{array}{l}
\frac{11}{8}m^2+\frac{59}{12}m^3+\frac{893}{72}m^4+\frac{2855}{108}m^5+\frac{8304449}{165888}m^6 \\
\qquad+\frac{102859909}{1244160}m^7+\frac{3748175501}{37324800}m^8 \\
+\left(\begin{array}{l}\frac{75}{16}m+\frac{1101}{64}m^2+\frac{71471}{1024}m^3+\frac{893915}{4096}m^4 \\ \qquad+\frac{143944619}{294912}m^5\end{array}\right)e^2 \\
-\left(\frac{55}{16}m^2+\frac{691}{24}m^3+\frac{16579}{144}m^4+\frac{91129}{864}m^5\right)e'^2 \\
-\left(\begin{array}{l}\frac{3}{16}m+\frac{47}{64}m^2+\frac{5149}{3072}m^3+\frac{91745}{36864}m^4 \\ \qquad+\frac{4098637}{4423680}m^5\end{array}\right)\gamma^2 \\
-\left(\frac{45}{32}m+\frac{733}{64}m^2+\frac{118199}{3072}m^3\right)e^4 \\
+\left(\frac{143}{128}m^2-\frac{427}{48}m^3\right)e'^4 \\
-\left(\frac{375}{32}m+\frac{4965}{64}m^2+\frac{264025}{2048}m^3\right)e^2e'^2 \\
-\left(\frac{63}{32}m+\frac{1761}{128}m^2+\frac{544181}{8192}m^3\right)e^2\gamma^2 \\
+\left(\frac{15}{32}m+\frac{269}{64}m^2+\frac{221027}{6144}m^3\right)e'^2\gamma^2 \\
+\frac{11025}{256}m\,e^4e'^2+\frac{975}{256}m\,e^2e'^4-\frac{555}{512}m\,e^6 \\
-\frac{6517}{1024}m\,e^4\gamma^2+\frac{345}{32}m\,e^2e'^2\gamma^2-\frac{39}{256}m\,e'^4\gamma^2 \\
+\left(\begin{array}{l}\frac{1925}{1024}m^2+\frac{32085}{2048}m^3+\frac{525}{128}me^2+\frac{375}{128}me'^2 \\ \qquad-\frac{15}{128}m\gamma^2\end{array}\right)\frac{a^2}{a'^2}
\end{array}\right\}\sin 2\xi$$

$$
+\left\{
\begin{aligned}
&\frac{15}{4}m+\frac{263}{16}m^2+\frac{50377}{768}m^3+\frac{1973903}{9216}m^4\\
&\qquad+\frac{127960397}{221184}m^5+\frac{3464046433}{2654208}m^6\\
&-\left(\frac{369}{64}m^2+\frac{64221}{2048}m^3+\frac{3406917}{8192}m^4\right)e^2\\
&-\left(\frac{75}{8}m+\frac{575}{16}m^2-\frac{326617}{1536}m^3-\frac{37134073}{9216}m^4\right)e'^2\\
&-\left(\frac{3}{2}m+\frac{359}{32}m^2+\frac{42977}{768}m^3-\frac{1367059}{18432}m^4\right)\gamma^2\\
&+\frac{387}{512}me^4+\frac{195}{64}me'^4\\
&-\frac{81}{128}me^2\gamma^2+\frac{15}{4}me'^2\gamma^2+\frac{105}{32}m\frac{a^2}{a'^2}
\end{aligned}
\right\}e\sin(2\xi-\varphi)
$$

$$
+\left\{
\begin{aligned}
&\frac{17}{8}m^2+\frac{169}{24}m^3+\frac{10495}{576}m^4+\frac{126001}{3456}m^5+\frac{1228925}{41472}m^6\\
&+\left(\frac{195}{32}m+\frac{2655}{128}m^2+\frac{180599}{2048}m^3+\frac{6040589}{24576}m^4\right)e^2\\
&-\left(\frac{85}{16}m^2+\frac{785}{12}m^3+\frac{957907}{2304}m^4\right)e'^2\\
&-\left(\frac{3}{8}m+\frac{41}{32}m^2+\frac{4357}{1536}m^3+\frac{45853}{9216}m^4\right)\gamma^2\\
&-\frac{2205}{512}me^4-\frac{217}{64}me^2\gamma^2+\frac{15}{16}me'^2\gamma^2
\end{aligned}
\right\}e\sin(2\xi+\varphi)
$$

$$
+\left\{
\begin{aligned}
&\frac{77}{16}m^2+\frac{479}{16}m^3+\frac{7551}{64}m^4+\frac{127385}{384}m^5+\frac{17924309}{36864}m^6\\
&\qquad-\frac{872999227}{552960}m^7\\
&+\left(\frac{175}{16}m+\frac{4541}{64}m^2+\frac{392779}{1024}m^3+\frac{7273931}{4096}m^4\right)e^2\\
&-\left(\frac{1353}{128}m^2+\frac{12669}{128}m^3\right)e'^2\\
&-\left(\frac{7}{16}m+\frac{209}{64}m^2+\frac{17587}{1024}m^3\right)\gamma^2\\
&-\frac{1645}{128}me^4-\frac{3075}{128}me^2e'^2-\frac{147}{32}me^2\gamma^2+\frac{123}{128}me'^2\gamma^2
\end{aligned}
\right\}e'\sin(2\xi-\varphi')
$$

$$
+\left\{
\begin{aligned}
&-\frac{11}{16}m^2-\frac{257}{48}m^3-\frac{7337}{576}m^4+\frac{124223}{3456}m^5\\
&\qquad+\frac{178759285}{331776}m^6+\frac{1683933119}{4976640}m^7\\
&-\left(\frac{75}{16}m+\frac{1113}{64}m^2-\frac{59161}{1024}m^3-\frac{4791425}{4096}m^4\right)e^2\\
&+\left(\frac{11}{128}m^2-\frac{1921}{384}m^3\right)e'^2\\
&+\left(\frac{3}{16}m+\frac{73}{64}m^2+\frac{24397}{3072}m^3\right)\gamma^2\\
&+\frac{4785}{256}me^4+\frac{75}{128}me^2e'^2\\
&+\frac{129}{64}me^2\gamma^2-\frac{3}{128}me'^2\gamma^2-\frac{375}{128}m\frac{a^2}{a'^2}
\end{aligned}
\right\}e'\sin(2\xi+\varphi')
$$

$$
+\left\{
\begin{aligned}
&\frac{45}{16}m+\frac{53}{4}m^2+\frac{276049}{3072}m^3+\frac{8005693}{18432}m^4\\
&\qquad+\frac{2117652131}{884736}m^5+\frac{15083402581 1}{13271040}m^6\\
&+\frac{15}{64}me^2-\frac{225}{32}me'^2-\frac{3}{8}m\gamma^2
\end{aligned}
\right\}e^2\sin(2\xi-2\varphi)
$$

$$
+\left(\frac{95}{32}m^2+\frac{913}{96}m^3+\frac{148693}{5760}m^4+\frac{515}{64}me^2-\frac{39}{64}m\gamma^2\right)e^2\sin(2\xi+2\varphi)
$$

$$
+\left\{
\begin{aligned}
&\frac{35}{4}m+\frac{1801}{32}m^2+\frac{32429}{128}m^3+\frac{1507947}{2048}m^4\\
&\qquad+\frac{1202189}{8192}m^5-\frac{26036432933}{1769472}m^6\\
&-\frac{315}{32}me^2-\frac{615}{32}me'^2-\frac{7}{2}m\gamma^2
\end{aligned}
\right\}ee'\sin(2\xi-\varphi-\varphi')
$$

$$
+\left\{
\begin{aligned}
&-\frac{15}{4}m-\frac{173}{32}m^2+\frac{49045}{384}m^3+\frac{29183005}{18432}m^4\\
&\qquad+\frac{2827212637}{221184}m^5+\frac{470658148655}{5308416}m^6\\
&+\frac{945}{64}me^2+\frac{15}{32}me'^2+\frac{3}{2}m\gamma^2
\end{aligned}
\right\}ee'\sin(2\xi-\varphi+\varphi')
$$

$$
+\left(
\begin{aligned}
&\frac{119}{16}m^2+\frac{3131}{64}m^3+\frac{115757}{512}m^4+\frac{5346351}{6144}m^5\\
&+\frac{455}{32}me^2-\frac{7}{8}m\gamma^2
\end{aligned}
\right)ee'\sin(2\xi+\varphi-\varphi')
$$

$$
+\left(
\begin{aligned}
&-\frac{17}{16}m^2-\frac{2633}{192}m^3-\frac{280873}{4608}m^4-\frac{9677359}{55296}m^5\\
&-\frac{195}{32}me^2+\frac{3}{8}m\gamma^2
\end{aligned}
\right)ee'\sin(2\xi+\varphi+\varphi')
$$

$$+\left(\begin{array}{c}\frac{187}{16}m^2+\frac{9707}{96}m^3+\frac{78625}{144}m^4+\frac{60894013}{27648}m^5 \\ +\frac{1275}{64}m\,e^2-\frac{51}{64}m\,\gamma^2\end{array}\right)e'^2\sin(2\xi-2\varphi')$$

$$+\left(-\frac{33}{32}m^2-\frac{225}{64}m\,e^2+\frac{9}{64}m\,\gamma^2\right)e'^2\sin(2\xi+2\varphi')$$

$$+\left(\frac{105}{32}m+\frac{6011}{384}m^2+\frac{2964653}{36864}m^3\right)e^3\sin(2\xi-3\varphi)$$

$$+\left(\frac{779}{192}m^2+\frac{7351}{576}m^3\right)e^3\sin(2\xi+3\varphi)$$

$$+\left(\frac{105}{16}m+\frac{577}{16}m^2+\frac{359545}{1024}m^3\right)e^2\,e'\sin(2\xi-2\varphi-\varphi')$$

$$+\left(-\frac{45}{16}m+\frac{193}{32}m^2+\frac{196739}{1536}m^3\right)e^2\,e'\sin(2\xi-2\varphi+\varphi')$$

$$+\frac{665}{64}m^2\,e^2\,e'\sin(2\xi+2\varphi-\varphi')$$

$$-\frac{95}{64}m^2\,e^2\,e'\sin(2\xi+2\varphi+\varphi')$$

$$+\left(\frac{225}{16}m+\frac{17179}{128}m^2+\frac{291049}{384}m^3+\frac{217024381}{73728}m^4\right)e\,e'^2\sin(2\xi-\varphi-2\varphi')$$

$$+\left(-\frac{45}{16}m-\frac{6219}{128}m^2-\frac{23417}{64}m^3\right)e\,e'^2\sin(2\xi-\varphi+2\varphi')$$

$$+\frac{289}{16}m^2\,e\,e'^2\sin(2\xi+\varphi-2\varphi')$$

$$+\frac{35}{8}m\,e^4\sin(2\xi-4\varphi)$$

$$+\frac{245}{32}m\,e^3\,e'\sin(2\xi-3\varphi-\varphi')$$

$$-\frac{105}{32}m\,e^3\,e'\sin(2\xi-3\varphi+\varphi')$$

$$+\frac{765}{64}m\,e^2\,e'^2\sin(2\xi-2\varphi-2\varphi')$$

$$-\frac{525}{128}m\,e^4\,e'^2\sin(2\xi+2\varphi+2\varphi')$$

$$+\left(\begin{array}{c}\frac{9}{16}m-\frac{11}{8}m^2-\frac{2555}{3072}m^3-\frac{166169}{18432}m^4 \\ -\frac{75}{32}m\,e^2-\frac{45}{32}m\,e'^2+\frac{3}{64}m\,\gamma^2\end{array}\right)\gamma^2\sin(2\xi-2\eta)$$

$$+\left(-\frac{11}{32}m^2-\frac{59}{48}m^3-\frac{195}{64}m\,e^2+\frac{3}{64}m\,\gamma^2\right)\gamma^2\sin(2\xi+2\eta)$$

$$+\left(\frac{3}{8}m-\frac{61}{16}m^2-\frac{7787}{3072}m^3\right)e\,\gamma^2\sin(2\xi-\varphi-2\eta)$$

$$+\left(-\frac{5}{16}m-\frac{19}{4}m^2-\frac{35735}{3072}m^3\right)e\,\gamma^2\sin(2\xi-\varphi+2\eta)$$

$$+\left(-\frac{33}{32}m+\frac{231}{256}m^2+\frac{291}{512}m^3\right)e\,\gamma^2\sin(2\xi+\varphi-2\eta)$$

$$-\frac{39}{32}m^2\,e\,\gamma^2\sin(2\xi+\varphi+2\eta)$$

$$+\left(\frac{21}{16}m-\frac{11}{4}m^2\right)e'\,\gamma^2\sin(2\xi-\varphi'-2\eta)$$

$$-\frac{77}{64}m^2\,e'\,\gamma^2\sin(2\xi-\varphi'+2\eta)$$

$$+\left(-\frac{9}{16}m-\frac{59}{32}m^2\right)e'\,\gamma^2\sin(2\xi+\varphi'-2\eta)$$

$$+\frac{11}{64}m^2\,e'\,\gamma^2\sin(2\xi+\varphi'+2\eta)$$

$$-\frac{15}{32}m\,e^2\,\gamma^2\sin(2\xi-2\varphi-2\eta)$$

$$-\frac{15}{8}m\,e^2\,\gamma^2\sin(2\xi-2\varphi+2\eta)$$

$$-\frac{45}{32}m\,e^2\,\gamma^2\sin(2\xi+2\varphi-2\eta)$$

$$+\frac{7}{8}m\,e\,e'\,\gamma^2\sin(2\xi-\varphi-\varphi'-2\eta)$$

$$-\frac{3}{8}m\,e\,e'\,\gamma^2\sin(2\xi-\varphi+\varphi'-2\eta)$$

$$-\frac{77}{32}m\,e\,e'\,\gamma^2\sin(2\xi+\varphi-\varphi'-2\eta)$$

$$+\frac{33}{32}m\,e\,e'\,\gamma^2\sin(2\xi+\varphi+\varphi'-2\eta)$$

$$-\frac{35}{16}m\,e\,e'\,\gamma^2\sin(2\xi-\varphi-\varphi'+2\eta)$$

$$+\frac{15}{16}m\,e\,e'\,\gamma^2\sin(2\xi-\varphi+\varphi'+2\eta)$$

$$+\left\{\begin{matrix}-\frac{15}{8}m-\frac{93}{8}m^2-\frac{6887}{128}m^3-\frac{137197}{512}m^4\\ -\frac{4630061}{3072}m^5-\frac{220740555}{24576}m^6\\ -\frac{15}{2}m\,e^2-\frac{15}{8}m\,e'^2+\frac{165}{32}m\,\gamma^2\end{matrix}\right\}(1-2\nu)\frac{a}{a'}\sin\xi$$

$$+\left(\begin{matrix}-\frac{165}{32}m-\frac{7317}{256}m^2-\frac{137467}{1024}m^3\\ -\frac{13194333}{16384}m^4\end{matrix}\right)(1-2\nu)\frac{a}{a'}e\sin(\xi-\varphi)$$

$$+\left(-\frac{75}{32}m-\frac{117}{8}m^2-\frac{70015}{1024}m^3-\frac{1951597}{6144}m^4\right)(1-2\nu)\frac{a}{a'}e\sin(\xi+\varphi)$$

$$+\left(\frac{15}{8}m-\frac{931}{32}m^2-\frac{37909}{768}m^3+\frac{15}{8}m\,\gamma^2\right)\frac{a}{a'}e'\sin(\xi-\varphi')$$

$$+\left(\begin{matrix}\frac{5}{2}-\frac{45}{4}m+\frac{6629}{96}m^2-\frac{128987}{768}m^3+\frac{45}{8}e^2\\ +\frac{5}{2}e'^2-\frac{15}{8}\gamma^2\end{matrix}\right)(1-2\nu)\frac{a}{a'}e'\sin(\xi+\varphi')$$

$$-\frac{435}{64}m\frac{a}{a'}e^2\sin(\xi-2\varphi)-\frac{195}{64}m\frac{a}{a'}e^2\sin(\xi+2\varphi)$$

$$-\frac{45}{64}m\frac{a}{a'}ee'\sin(\xi-\varphi-\varphi')$$

$$+\left(\frac{25}{8}-\frac{495}{16}m\right)\frac{a}{a'}ee'\sin(\xi-\varphi+\varphi')$$

$$+\frac{75}{32}m\frac{a}{a'}ee'\sin(\xi+\varphi-\varphi')$$

$$+\left(\frac{25}{8}-\frac{225}{16}m\right)\frac{a}{a'}ee'\sin(\xi+\varphi-\varphi')$$

$$+\frac{435}{64}m\frac{a}{a'}e'^2\sin(\xi-2\varphi')-\frac{255}{64}m\frac{a}{a'}e'^2\sin(\xi+2\varphi')$$

$$-\frac{75}{32}m\frac{a}{a'}\gamma^2\sin(\xi-2\eta)+\frac{15}{32}m\frac{a}{a'}\gamma^2\sin(\xi+2\eta)$$

$$+\left(\frac{15}{32}m^2-\frac{5}{8}m^3-\frac{259}{16}m^4-\frac{666249}{6144}m^5\right)\frac{a}{a'}\sin 3\xi$$

$$+\left(-\frac{2535}{256}m^2-\frac{81865}{1024}m^3-\frac{7584049}{16384}m^4\right)(1-2\nu)\frac{a}{a'}e\sin(3\xi-\varphi)$$

$$+\frac{115}{128}m^2\frac{a}{a'}e\sin(3\xi+\varphi)+\frac{75}{32}m^2\frac{a}{a'}e'\sin(3\xi-\varphi')$$

$$+\left(\frac{35}{16}m^2-\frac{1405}{256}m^3\right)\frac{a}{a'}e'\sin(3\xi+\varphi')-\frac{175}{32}m\frac{a}{a'}e^2\sin(3\xi-2\varphi)$$

$$+\frac{375}{64}m\frac{a}{a'}ee'\sin(2\xi-\varphi+\varphi')-\frac{25}{32}m\frac{a}{a'}\gamma^2\sin(3\xi-2\eta)$$

$$+\left[\begin{matrix}\frac{201}{256}m^4+\frac{649}{120}m^5+\frac{647623}{28800}m^6+\frac{31363361}{432000}m^7\\ +\left(\frac{1425}{128}m^3+\frac{40555}{512}m^4+\frac{52774867}{122880}m^5\right)e^2-\frac{33}{128}m^2\gamma^2\end{matrix}\right]\sin 4\xi$$

$$+\left[\begin{matrix}\frac{255}{64}m^3+\frac{7701}{256}m^4+\frac{631995}{4096}m^5+\frac{471066791}{737280}m^6\\ +\left(\frac{2925}{256}m^2+\frac{43395}{512}m^3\right)e^2-\frac{2465}{64}m^3e'^2-\frac{45}{64}m^2\gamma^2\end{matrix}\right]e\sin(4\xi-\varphi)$$

$$+\left(\frac{309}{128}m^4+\frac{15403}{960}m^5\right)e\sin(4\xi+\varphi)$$

$$+\left(\frac{1407}{256}m^4+\frac{19981}{384}m^5+\frac{16625}{256}m^3e^2-\frac{385}{256}m^3\gamma^2\right)e'\sin(4\xi-\varphi')$$

$$+\left(-\frac{201}{256}m^4-\frac{5611}{640}m^5-\frac{4275}{256}m^3e^2+\frac{99}{256}m^3\gamma^2\right)e'\sin(4\xi+\varphi')$$

$$+\left(\frac{1125}{256}m^2+\frac{18495}{512}m^3+\frac{1755883}{8192}m^4+\frac{66847963}{61440}m^5\right)e^2\sin(4\xi-2\varphi)$$

$$+\frac{21983}{3072}\,m^4\,e^2\sin(4\xi+2\varphi)$$

$$+\left(\frac{2975}{128}m^3+\frac{43949}{192}m^4+\frac{103321481}{73728}m^5\right)e\,e'\sin(4\xi-\varphi-\varphi')$$

$$+\left(-\frac{765}{128}m^3-\frac{10841}{256}m^4-\frac{363727}{8192}m^5\right)e\,e'\sin(4\xi-\varphi+\varphi')$$

$$+\frac{585}{256}\,m^2e^3\sin(4\xi-3\varphi)$$

$$+\frac{2625}{128}\,m^2e^2e'\sin(4\xi-2\varphi-\varphi')$$

$$-\frac{1125}{128}\,m^2e^2e'\sin(4\xi-2\varphi+\varphi')$$

$$+\frac{21335}{256}\,m^2e\,e'^2\sin(4\xi-\varphi-2\varphi')$$

$$-\frac{255}{256}\,m^2e\,e'^2\sin(4\xi-\varphi+2\varphi')$$

$$+\left(-\frac{9}{256}m^2+\frac{255}{512}m^3+\frac{5425}{8192}m^4\right)\gamma^2\sin(4\xi-2\eta)$$

$$+\frac{99}{128}\,m^2\,e\,\gamma^2\sin(4\xi-\varphi-2\eta)-\frac{9}{128}\,m^2\,e\,\gamma^2\sin(4\xi+\varphi-2\eta)$$

$$-\frac{27}{128}\,m^2\,e'\gamma^2\sin(4\xi-\varphi'-2\eta)+\frac{9}{128}\,m^2\,e'\gamma^2\sin(4\xi+\varphi'-2\eta)$$

$$+\frac{3}{32}\,m\,\gamma^4\sin(2\xi-4\eta)+\frac{3715}{6144}\,m^6\sin 6\xi$$

$$+\frac{5835}{1024}\,m^5\,e\sin(6\xi-\varphi)+\frac{27135}{2048}\,m^4\,e^2\sin(6\xi-2\varphi)$$

$$+\frac{\left(\alpha h-\frac{1}{2}q\right)\left(\frac{D}{a}\right)^2\sin 2\lambda}{m^2}\left(\frac{19}{3}+\frac{13}{8}m\right)\gamma\sin(ft-\eta)$$

$$-\frac{15\,h'\left(\frac{D}{a}\right)^2\sin^2\lambda}{128\,(3f-c-2g)}\left(\frac{9m^2}{3f-c-2g}-38\right)e\,\gamma^2\cos(3ft-\varphi-2\eta)$$

Il faut encore ajouter à cette expression les inégalités résultantes de l'action des planètes, n° 128.

134. La latitude de la Lune au-dessus du plan de l'écliptique mobile, c'est-à-dire l'arc dont le *sinus* est $\frac{z}{r}$, a pour expression

$$\text{latit.}=\frac{z}{r}+\frac{1}{6}\left(\frac{z}{r}\right)^3+\frac{3}{40}\left(\frac{z}{r}\right)^5+\text{etc.}$$

Au moyen des valeurs de $\frac{z}{r}$, nos 44 et 86, on a formé les suivantes :

$$\left(\frac{z}{r}\right)^3 = \left(\frac{3}{4} + \frac{27}{128}m^2 + \frac{549}{512}m^3 - \frac{3}{4}e^2\right)\gamma^3 \sin \eta$$
$$+\left(\frac{3}{4} - \frac{111}{32}m^2\right) e\,\gamma^3 \sin(\varphi - \eta)$$
$$+\left(\frac{3}{4} + \frac{723}{256}m^2\right) e\,\gamma^3 \sin(\varphi + \eta)$$
$$-\frac{9}{32}\,m\,e'\,\gamma^3 \sin(\varphi' - \eta)$$
$$-\frac{9}{32}\,m\,e'\,\gamma^3 \sin(\varphi' + \eta)$$
$$+\left(\frac{9}{16}m + \frac{21}{32}m^2 + \frac{2219}{1024}m^3 - \frac{45}{32}me^2 + \frac{117}{128}me'^2\right)\gamma^3 \sin(2\xi - \eta)$$
$$+\left(-\frac{9}{32}m + \frac{57}{128}m^2 + \frac{13785}{6144}m^3 + \frac{243}{128}me^2 + \frac{45}{64}me'^2\right)\gamma^3 \sin(2\xi + \eta)$$
$$+\left(\frac{27}{32}m + \frac{493}{128}m^2\right) e\,\gamma^3 \sin(2\xi - \varphi - \eta)$$
$$+\left(\frac{9}{4}m + \frac{483}{64}m^2\right) e\,\gamma^3 \sin(2\xi - \varphi + \eta)$$
$$+\left(\frac{9}{16}m + \frac{51}{64}m^2\right) e\,\gamma^3 \sin(2\xi + \varphi - \eta)$$
$$+\left(-\frac{15}{32}m + \frac{161}{128}m^2\right) e\,\gamma^3 \sin(2\xi + \varphi + \eta)$$
$$+\left(\frac{21}{16}m + \frac{267}{64}m^2\right) e'\gamma^3 \sin(2\xi - \varphi' - \eta)$$
$$+\left(-\frac{21}{32}m + \frac{105}{256}m^2\right) e'\gamma^3 \sin(2\xi - \varphi' + \eta)$$
$$+\left(-\frac{9}{16}m - \frac{39}{16}m^2\right) e'\gamma^3 \sin(2\xi + \varphi' - \eta)$$
$$+\left(\frac{9}{32}m + \frac{267}{256}m^2\right) e'\gamma^3 \sin(2\xi + \varphi' + \eta)$$
$$+\frac{63}{32}\,m\,e\,e'\,\gamma^3 \sin(2\xi - \varphi - \varphi' - \eta)$$
$$+\frac{21}{4}\,m\,e\,e'\,\gamma^3 \sin(2\xi - \varphi - \varphi' + \eta)$$
$$-\frac{3}{4}\,e\,\gamma^3 \sin(\varphi - 3\eta)$$
$$-\frac{3}{4}\,e\,\gamma^3 \sin(\varphi + 3\eta);$$

$$\left(\frac{z}{r}\right)^5 = \frac{5}{8}\gamma^5 \sin \eta + \frac{1}{16}\gamma^5 \sin 5\eta.$$

En vertu de ces valeurs et de celle de $\frac{z}{r}$ donnée nos 44 et 86, on trouve pour l'expression de la latitude de la Lune au-dessus du plan de l'écliptique vraie :

Expression de la latitude en fonction de la longitude moyenne.

$$
\begin{aligned}
\text{Latitude} = {} & \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{33}{128} m^2 + \frac{241}{512} m^4 - \frac{82495}{24576} m^5 \\ - \left(1 + \frac{31}{512} m^2 \right) e^2 + \frac{27}{8} m^2 e'^2 \\ + \left(\frac{1}{8} - \frac{55}{256} m^2 + \frac{471}{1024} m^3 \right) \gamma^2 - \frac{1}{8} e^2 \gamma^2 + \frac{3}{64} \gamma^4 \end{array} \right\} \gamma \sin \eta \\
& + \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{141}{64} m^2 - \frac{99}{16} m^3 - \frac{45611}{2048} m^4 - \frac{917143}{12288} m^5 \\ + \left(-\frac{5}{8} + \frac{135}{64} m + \frac{4551}{512} m^2 \right) e^2 - \frac{227}{64} m^2 e'^2 \\ + \left(\frac{3}{4} - \frac{135}{64} m - \frac{881}{256} m^2 \right) \gamma^2 \end{array} \right\} e \gamma \sin(\varphi - \eta) \\
& + \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{m^2}{2} - \frac{105}{64} m^3 - \frac{2655}{1024} m^4 - \frac{710431}{6144} m^5 \\ + \left(-\frac{5}{4} - \frac{8521}{512} m^2 \right) e^2 - \frac{111}{32} m^2 e'^2 \\ + \left(\frac{1}{8} - \frac{197}{512} m^2 \right) \gamma^2 \end{array} \right\} e \gamma \sin(\varphi + \eta) \\
& + \left(\begin{array}{l} -\frac{3}{8} m - \frac{9}{64} m^2 + \frac{1107}{64} m^3 + \frac{537375}{4096} m^4 \\ + \frac{195}{64} m e^2 - \frac{27}{64} m e'^2 + \frac{69}{64} m \gamma^2 \end{array} \right) e' \gamma \sin(\varphi' - \eta) \\
& + \left[\begin{array}{l} -\frac{3}{8} m - \frac{69}{64} m^2 + \frac{2369}{128} m^3 + \frac{1736297}{12288} m^4 \\ + \frac{195}{64} m e^2 - \frac{27}{64} m e'^2 + \frac{69}{64} m \gamma^2 \end{array} \right] e' \gamma \sin(\varphi' + \eta) \\
& + \left(\frac{3}{4} - \frac{135}{64} m - \frac{1449}{512} m^2 + \frac{2413}{2304} e^2 \right) e^2 \gamma \sin(2\varphi - \eta) \\
& + \left(\frac{9}{8} + \frac{37}{32} m^2 - \frac{103}{64} e^2 \right) e^2 \gamma \sin(2\varphi + \eta) \\
& + \left(\frac{9}{4} m + \frac{111}{8} m^2 + \frac{30117}{256} m^3 \right) e e' \gamma \sin(\varphi - \varphi' - \eta) \\
& + \left(3m + \frac{609}{32} m^2 + \frac{12383}{128} m^3 \right) e e' \gamma \sin(\varphi - \varphi' + \eta) \\
& + \left(-\frac{9}{4} m - \frac{123}{8} m^2 - \frac{18837}{256} m^3 \right) c c' \gamma \sin(\varphi + \varphi' - \eta)
\end{aligned}
$$

$$+\left(-3m-\frac{405}{32}m^2-\frac{4221}{128}m^3\right)ee'\gamma\sin(\varphi+\varphi'+\eta)$$
$$+\left(-\frac{9}{32}m+\frac{45}{256}m^2\right)e'^2\gamma\sin(2\varphi'-\eta)$$
$$+\left(-\frac{9}{32}m-\frac{309}{256}m^2\right)e'^2\gamma\sin(2\varphi'+\eta)$$
$$+\left(\frac{17}{24}-\frac{135}{64}m\right)e^3\gamma\sin(3\varphi-\eta)$$
$$+\frac{4}{3}e^3\gamma\sin(3\varphi+\eta)$$
$$+\frac{1251}{256}me^2e'\gamma\sin(2\varphi-\varphi'-\eta)$$
$$+\frac{405}{64}me^2e'\gamma\sin(2\varphi-\varphi'+\eta)$$
$$-\frac{801}{256}me^2e'\gamma\sin(2\varphi+\varphi'-\eta)$$
$$-\frac{405}{64}me^2e'\gamma\sin(2\varphi+\varphi'+\eta)$$
$$+\frac{27}{16}mee'^2\gamma\sin(\varphi-2\varphi'-\eta)$$
$$+\frac{9}{4}mee'^2\gamma\sin(\varphi-2\varphi'+\eta)$$
$$-\frac{27}{16}mee'^2\gamma\sin(\varphi+2\varphi'-\eta)$$
$$-\frac{9}{4}mee'^2\gamma\sin(\varphi+2\varphi'+\eta)$$
$$+\frac{99}{128}e^4\gamma\sin(4\varphi-\eta)+\frac{625}{384}e^4\gamma\sin(4\varphi+\eta)$$
$$-\frac{1}{24}\gamma^3\sin 3\eta+\left(\frac{1}{2}-\frac{135}{64}m\right)e\gamma^3\sin(\varphi-3\eta)$$
$$-\frac{1}{8}e\gamma^3\sin(\varphi+3\eta)+\frac{13}{64}me'\gamma^3\sin(\varphi'-3\eta)$$
$$+\frac{3}{64}me'\gamma^3\sin(\varphi'+3\eta)+\frac{3}{640}\gamma^5\sin 5\eta$$
$$+\left\{\begin{array}{l}\frac{3}{8}m+\frac{25}{32}m^2+\frac{2957}{1536}m^3+\frac{86485}{18432}m^4+\frac{4548169}{442368}m^5\\ +\left(\frac{27}{32}m+\frac{423}{128}m^2+\frac{202461}{16384}m^3\right)e^2\\ +\left(-\frac{15}{16}m-\frac{199}{32}m^2-\frac{56275}{3072}m^3\right)e'^2\\ +\left(\frac{3}{16}m-\frac{75}{128}m^2-\frac{1695}{4096}m^3\right)\gamma^2\\ -\frac{135}{64}me^2e'^2+\frac{207}{256}me^2\gamma^2+\frac{15}{64}me'^2\gamma^2\\ -\frac{45}{128}me^4+\frac{39}{128}me'^4+\frac{15}{64}m\frac{a^2}{a'^2}\end{array}\right\}\gamma\sin(2\xi-\eta)$$

$$+\left\{\begin{array}{l}\frac{11}{16}m^2+\frac{59}{24}m^3+\frac{7063}{1152}m^4+\frac{357745}{27648}m^5\\+\left(\frac{135}{32}m+\frac{1929}{128}m^2+\frac{126825}{2048}m^3\right)e^2\\+\left(-\frac{55}{32}m^2-\frac{1481}{96}m^3\right)e'^2\\+\left(-\frac{3}{64}m-\frac{69}{256}m^2-\frac{17271}{36864}m^3\right)\gamma^2\\-\frac{675}{64}me^2e'^2-\frac{9}{16}me^2\gamma^2+\frac{15}{128}me'^2\gamma^2\\-\frac{3375}{512}me^4\end{array}\right\}\gamma\sin(2\xi+\eta)$$

$$+\left\{\begin{array}{l}\frac{3}{2}m+\frac{105}{16}m^2+\frac{3825}{128}m^3+\frac{102835}{1024}m^4\\+\left(-\frac{3}{4}m-\frac{495}{64}m^2\right)e^2\\+\left(-\frac{15}{4}m-\frac{21}{2}m^2\right)e'^2\\+\left(-\frac{15}{64}m-\frac{3035}{768}m^2\right)\gamma^2\end{array}\right\}e\gamma\sin(2\xi-\varphi-\eta)$$

$$+\left\{\begin{array}{l}\frac{15}{8}m+\frac{241}{32}m^2+\frac{45881}{1536}m^3+\frac{1844083}{18432}m^4\\+\left(-\frac{165}{64}m-\frac{7479}{512}m^2\right)e^2\\+\left(-\frac{75}{16}m-\frac{595}{32}m^2\right)e'^2\\+\left(-\frac{51}{64}m-\frac{2349}{512}m^2\right)\gamma^2\end{array}\right\}e\gamma\sin(2\xi-\varphi+\eta)$$

$$+\left\{\begin{array}{l}\frac{3}{8}m+\frac{23}{32}m^2+\frac{2509}{1536}m^3-\frac{3547}{18432}m^4\\+\left(\frac{123}{64}m+\frac{1921}{512}m^2\right)e^2\\+\left(-\frac{15}{16}m-\frac{299}{32}m^2\right)e'^2\\+\left(-\frac{21}{64}m+\frac{299}{512}m^2\right)\gamma^2\end{array}\right\}e\gamma\sin(2\xi+\varphi-\eta)$$

$$+\left\{\begin{array}{l}\frac{7}{4}m^2+\frac{287}{48}m^3+\frac{8941}{576}m^4\\+\left(\frac{15}{2}m+\frac{397}{16}m^2\right)e^2\\-\frac{35}{8}m^2e'^2\\+\left(-\frac{5}{64}m-\frac{511}{768}m^2\right)\gamma^2\end{array}\right\}e\gamma\sin(2\xi+\varphi+\eta)$$

$$+\left\{\begin{array}{l}\frac{7}{8}m+\frac{255}{64}m^2+\frac{3509}{256}m^3+\frac{159337}{4096}m^4\\ +\left(\frac{63}{32}m+\frac{28055}{2048}m^2\right)e^2\\ +\left(-\frac{123}{64}m-\frac{7539}{512}m^2\right)e'^2\\ +\left(\frac{7}{16}m-\frac{581}{256}m^2\right)\gamma^2\end{array}\right\}e'\gamma\sin(2\xi-\varphi'-\eta)$$

$$+\left\{\begin{array}{l}\frac{77}{32}m^2+\frac{1949}{128}m^3+\frac{61091}{1024}m^4\\ +\left(\frac{315}{32}m+\frac{27711}{512}m^2\right)e^2-\frac{1353}{256}m^2e'^2\\ +\left(-\frac{7}{64}m-\frac{581}{512}m^2\right)\gamma^2\end{array}\right\}e'\gamma\sin(2\xi-\varphi'+\eta)$$

$$+\left\{\begin{array}{l}-\frac{3}{8}m-\frac{115}{64}m^2-\frac{2083}{768}m^3+\frac{138815}{36864}m^4\\ +\left(-\frac{15}{16}m+\frac{67383}{512}m^2\right)e^2\\ +\left(\frac{3}{64}m-\frac{677}{512}m^2\right)e'^2\\ +\left(-\frac{3}{16}m-\frac{311}{256}m^2\right)\gamma^2\end{array}\right\}e'\gamma\sin(2\xi+\varphi'-\eta)$$

$$+\left\{\begin{array}{l}-\frac{11}{32}m^2-\frac{1127}{384}m^3-\frac{74671}{9216}m^4\\ +\left(-\frac{135}{32}m-\frac{4359}{256}m^2\right)e^2+\frac{11}{256}m^2e'^2\\ +\left(\frac{3}{64}m+\frac{177}{512}m^2\right)\gamma^2\end{array}\right\}e'\gamma\sin(2\xi+\varphi'+\eta)$$

$$+\left(\begin{array}{l}\frac{147}{64}m+\frac{3257}{256}m^2+\frac{808711}{12288}m^3\\ +\frac{5187}{2048}me^2+\frac{105}{256}me'^2+\frac{197}{512}m\gamma^2\end{array}\right)e^2\gamma\sin(2\xi-2\varphi-\eta)$$

$$+\left(\begin{array}{l}-\frac{15}{64}m-\frac{1555}{512}m^2+\frac{33623}{12288}m^3\\ +\frac{60019}{12288}me^2+\frac{1725}{256}me'^2+\frac{11}{128}m\gamma^2\end{array}\right)e^2\gamma\sin(2\xi-2\varphi+\eta)$$

$$+\left(\begin{array}{l}\frac{27}{64}m+\frac{303}{256}m^2+\frac{7779}{4096}m^3\\ +\frac{4041}{1024}me^2-\frac{135}{128}me'^2-\frac{145}{256}m\gamma^2\end{array}\right)e^2\gamma\sin(2\xi+2\varphi-\eta)$$

$$\left(\frac{425}{128}m^2+\frac{265}{64}m^3+\frac{12305}{1024}me^2-\frac{127}{512}m\gamma^2\right)e^2\gamma\sin(2\xi+2\varphi+\eta)$$

$$+\begin{pmatrix}\frac{7}{2}m+\frac{171}{8}m^2+\frac{14659}{128}m^3\\ -\frac{123}{16}me'^2+\frac{7}{32}m\gamma^2\end{pmatrix}ee'\gamma\sin(2\xi-\varphi-\varphi'-\eta)$$

$$+\begin{pmatrix}\frac{35}{8}m+\frac{423}{16}m^2+\frac{58779}{512}m^3\\ -\frac{735}{256}me^2-\frac{615}{64}me'^2-\frac{21}{16}m\gamma^2\end{pmatrix}ee'\gamma\sin(2\xi-\varphi-\varphi'+\eta)$$

$$+\left(-\frac{3}{2}m-\frac{3}{4}m^2\right)ee'\gamma\sin(2\xi-\varphi+\varphi'-\eta)$$

$$+\left(-\frac{15}{8}m-\frac{49}{16}m^2\right)ee'\gamma\sin(2\xi-\varphi+\varphi'+\eta)$$

$$+\left(\frac{7}{8}m+\frac{19}{4}m^2\right)ee'\gamma\sin(2\xi+\varphi-\varphi'-\eta)$$

$$+\frac{49}{8}m^2ee'\gamma\sin(2\xi+\varphi-\varphi'+\eta)$$

$$+\left(-\frac{3}{8}m-\frac{11}{4}m^2\right)ee'\gamma\sin(2\xi+\varphi+\varphi'-\eta)$$

$$-\frac{7}{8}m^2ee'\gamma\sin(2\xi+\varphi+\varphi'+\eta)$$

$$+\left(\frac{51}{32}m+\frac{2729}{256}m^2\right)e'^2\gamma\sin(2\xi-2\varphi'-\eta)$$

$$+\frac{187}{32}m^2e'^2\gamma\sin(2\xi-2\varphi'+\eta)$$

$$+\frac{67}{16}me^2\gamma\sin(2\xi-3\varphi-\eta)+\frac{15}{16}me^2\gamma\sin(2\xi-3\varphi+\eta)$$

$$+\frac{m}{2}e^2\gamma\sin(2\xi+3\varphi-\eta)$$

$$+\frac{1057}{256}me^2e'\gamma\sin(2\xi-2\varphi-\varphi'-\eta)$$

$$-\frac{455}{256}me^2e'\gamma\sin(2\xi-2\varphi-\varphi'+\eta)$$

$$+\frac{357}{256}me^2e'\gamma\sin(2\xi-2\varphi+\varphi'-\eta)$$

$$+\frac{1037}{256}me^2e'\gamma\sin(2\xi-2\varphi+\varphi'+\eta)$$

$$+\frac{63}{64}me^2e'\gamma\sin(2\xi+2\varphi-\varphi'-\eta)$$

$$-\frac{27}{64}me^2e'\gamma\sin(2\xi+2\varphi+\varphi'-\eta)$$

$$+\frac{51}{8}mee'^2\gamma\sin(2\xi-\varphi-2\varphi'-\eta)$$

$$-\frac{9}{8}mee'^2\gamma\sin(2\xi-\varphi+2\varphi'-\eta)$$

$$- \frac{45}{32} m e e'^2 \gamma \sin(2\xi - \varphi + 2\varphi' + \eta)$$

$$+ \frac{51}{32} m e e'^2 \gamma \sin(2\xi + \varphi - 2\varphi' - \eta)$$

$$- \frac{9}{32} m e e'^2 \gamma \sin(2\xi + \varphi + 2\varphi' - \eta)$$

$$+ \left(\begin{array}{l} -\frac{15}{16} m - \frac{411}{128} m^2 - \frac{11215}{512} m^3 \\ -\frac{15}{16} m e^2 - \frac{45}{32} m e'^2 + \frac{75}{64} m \gamma^2 \end{array} \right) \frac{a}{a'} \gamma \sin(\xi - \eta)$$

$$+ \left(\begin{array}{l} -\frac{15}{16} m - \frac{83}{16} m^2 - \frac{38917}{1536} m^3 \\ -\frac{57}{32} m e^2 - \frac{15}{32} m e'^2 + \frac{165}{64} m \gamma^2 \end{array} \right) \frac{a}{a'} \gamma \sin(\xi + \eta)$$

$$- \frac{69}{64} m \frac{a}{a'} e \gamma \sin(\xi - \varphi - \eta) - \frac{69}{64} m \frac{a}{a'} e \gamma \sin(\xi - \varphi + \eta)$$

$$- \frac{171}{64} m \frac{a}{a'} e \gamma \sin(\xi + \varphi - \eta) - \frac{135}{64} m \frac{a}{a'} e \gamma \sin(\xi + \varphi + \eta)$$

$$+ \frac{15}{16} m \frac{a}{a'} e' \gamma \sin(\xi - \varphi' - \eta) + \frac{15}{16} m \frac{a}{a'} e' \gamma \sin(\xi - \varphi' + \eta)$$

$$+ \left(\frac{5}{4} - \frac{45}{8} m\right) \frac{a}{a'} e' \gamma \sin(\xi + \varphi' - \eta)$$

$$+ \left(\frac{5}{4} - \frac{45}{8} m\right) \frac{a}{a'} e' \gamma \sin(\xi + \varphi' + \eta)$$

$$- \frac{95}{192} m^2 \frac{a}{a'} \gamma \sin(3\xi - \eta) + \frac{15}{64} m^2 \frac{a}{a'} \gamma \sin(3\xi + \eta)$$

$$- \frac{625}{512} m \frac{a}{a'} e \gamma \sin(3\xi - \varphi - \eta) + \frac{15}{64} m \frac{a}{a'} e' \gamma \sin(3\xi + \varphi' - \eta)$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} \frac{33}{128} m^3 + \frac{621}{512} m^4 + \frac{455203}{122880} m^5 \\ + \left(\frac{405}{256} m^2 + \frac{4605}{512} m^3\right) e^2 - \frac{319}{128} m^3 e'^2 \\ - \left(\frac{9}{512} m^2 - \frac{255}{1024} m^3\right) \gamma^2 \end{array} \right\} \gamma \sin(4\xi - \eta)$$

$$+ \frac{161}{256} m^4 \gamma \sin(4\xi + \eta) + \left(\frac{45}{64} m^2 + \frac{267}{64} m^3\right) e \gamma \sin(4\xi - \varphi - \eta)$$

$$+ \frac{105}{32} m^3 e \gamma \sin(4\xi - \varphi + \eta) + \frac{21}{32} m^3 e \gamma \sin(4\xi + \varphi - \eta)$$

$$+ \frac{385}{256} m^3 e' \gamma \sin(4\xi - \varphi' - \eta) - \frac{99}{256} m^3 e' \gamma \sin(4\xi + \varphi' - \eta)$$

$$+ \frac{585}{512} m^2 e^2 \gamma \sin(4\xi - 2\varphi - \eta) + \frac{2025}{512} m^2 e^2 \gamma \sin(4\xi - 2\varphi + \eta)$$

$$+ \frac{105}{32} m^2 e e' \gamma \sin(4\xi - \varphi - \varphi' - \eta)$$

$$-\frac{45}{32}m^2 e e' \gamma \sin(4\xi - \varphi + \varphi' - \eta)$$
$$+\frac{m}{4} e \gamma^3 \sin(2\xi - \varphi - 3\eta) - \frac{27}{64} m e \gamma^3 \sin(2\xi + \varphi - 3\eta)$$
$$+\frac{35}{64} m e' \gamma^3 \sin(2\xi - \varphi' - 3\eta) - \frac{15}{64} m e' \gamma^3 \sin(2\xi + \varphi' - 3\eta)$$
$$+\frac{9}{64} m^2 \gamma^3 \sin(4\xi - 3\eta).$$
$$-\frac{\left(\alpha h - \frac{1}{2}q\right)}{m^2}\left(\frac{D}{a}\right)^2 \sin 2\lambda\left(\frac{2}{3} + \frac{m}{4} + \frac{43}{18}m^2 - e'^2 - \frac{4}{3}\gamma^2\right)\sin ft.$$

135. Pour réduire en nombres les formules précédentes, nous rassemblerons, dans le tableau suivant, les valeurs des diverses quantités dont nous ferons usage, et qu'on peut regarder comme les données fournies à la théorie par l'observation :

n, mouvement moyen sidéral de la Lune, en $365^j\frac{1}{4}$	17325593",54
T, temps de la révolution sidérale de la Lune	2360591",80
m, rapport des moyens mouvemens du Soleil et de la Lune	0,0748013o
e, excentricité de l'orbite de la Lune	0,05473o7375
e', excentricité de l'orbe solaire (en 1801)	0,0167918226
γ, tangente de l'inclinaison moyenne de l'orbite de la Lune par rapport à l'écliptique vraie	0,089673362
$\frac{a}{a'}$, rapport des demi-grands axes des orbites de la Lune et du Soleil	0,00252551
$\frac{D}{a}$, rapport du rayon moyen du globe terrestre au demi-grand axe de l'orbe lunaire	0,0165617
$\frac{m}{m+M}$, rapport de la masse de la Lune à la somme des masses de la Terre et de la Lune	$\frac{1}{75}$
fv, longit. vraie comptée du point mobile de l'équinoxe du printemps $= v + \frac{50'' v}{n} \cdots$	$(1,0000028 86)\,v$.

Les quantités e et γ résultent de la comparaison des coefficiens des *sinus* des angles $\varphi = ct + c\varepsilon - \omega$ et $\eta = gt + g\varepsilon - \theta$, déduits de l'observation avec leurs valeurs données par la théorie. Les autres quantités qui entrent dans le tableau précédent résultent, soit de l'observation directe, soit des divers phénomènes qui dépendent des mouvemens lunaires.

Au moyen des valeurs qui précèdent et des expressions analytiques des équations séculaires du mouvement moyen, des mouvemens du périgée et des nœuds, donnés n° 132, on a trouvé d'abord :

Expression numérique de l'équation séculaire du mouvement moyen.

$$[0{,}008392850\,(2) - 0{,}00004938 \text{ indét.} = 0{,}008343502] \int (e'^2 - E'^2)\,dt.$$

Expression numérique de l'équation séculaire du mouvement du périgée.

$$\left[\begin{array}{llll} -\,0{,}006294639 & (2) & -\,0{,}010790247 & (3) \\ -\,0{,}007371013 & (4) & -\,0{,}003994393 & (5) \\ -\,0{,}0035 \text{ indét.} & & =-\,0{,}03195029 & \end{array}\right] \int (e'^2 - E'^2)\,dt.$$

Expression numérique de l'équation séculaire du mouvement des nœuds.

$$\left[\begin{array}{llll} \,0{,}006294639 & (2) & -\,0{,}0004316100 & (3) \\ -\,0{,}0003863900 & (4) & -\,0{,}000194045 & (5) \\ & & =\,0{,}005282594 & \end{array}\right] \int (e'^2 - E'^2)\,dt.$$

Pour évaluer l'intégrale $\int (e'^2 - E'^2)\,dt$ qui entre dans ces expressions, nous observerons que, par le n° 98 du livre VI, on a

$$E' = e' - 0'',0903383\,t - 0'',0000032202\,t^2,$$

ou bien, en réduisant les secondes en parties du rayon pris pour unité,

$$E' = e' - 0{,}00000043797\,t - 0{,}0000000000156 12\,t^2,$$

t, dans ces formules, représentant l'intervalle de temps écoulé depuis 1800, et compté en années juliennes de 365 jours $\frac{1}{4}$.

En élevant l'expression précédente au carré, et supposant $e' = 0{,}0167918$, on en conclut

$$e'^2 - E'^2 = 0{,}00000147087 \left(\frac{t}{100}\right) + 0{,}0000000033325 \left(\frac{t}{100}\right)^2;$$

et, par suite,

$$\int (e'^2 - E'^2)\,dt = 0{,}0000735435 \left(\frac{t}{100}\right)^2 + 0{,}0000001108 \left(\frac{t}{100}\right)^3.$$

Comme nous avons supposé dans les formules relatives aux inégalités du mouvement lunaire, le moyen mouvement sidéral de la Lune en 365 jours $\frac{1}{4}$, ou n égal à l'unité, il en résulte que t, dans ces formules, représente l'arc que décrit la Lune dans le temps t, en vertu de son mouvement moyen; il faut donc multiplier par $n = 17325593'',54$ l'expression précédente, pour la rendre conforme aux suppositions de notre théorie, on aura ainsi

$$\int (e'^2 - E'^2)\,dt = 1274'',185\, i^2 + 1'',920\, i^3,$$

i étant le nombre de siècles écoulés depuis l'année que l'on a choisie pour époque.

Si l'on substitue à la place de l'intégrale $\int (e'^2 - E'^2)\,dt$ sa valeur, les équations séculaires du moyen mouvement, des mouvemens du périgée et des nœuds, deviendront respectivement

$$10'',631166\, i^2 + 0'',016019\, i^3,$$
$$-\ 40'',611456\, i^2 - 0'',061195\, i^3,$$
$$6'',731001\, i^2 + 0'',0101425\, i^3,$$

i étant le nombre de siècles écoulés depuis 1800.

En réduisant en nombres les valeurs analytiques

des deux constantes c et g, n° 132, on a trouvé

$$1-c=\left[\begin{array}{l} 0,004196426\ (2) + 0,002942794\ (3) + 0,000923699\ (4) \\ + 0,000273519\ (5) + 0,000080168\ (6) + 0,000022215\ (7) \\ + 0,000012000\,(\text{ind.}) = 0,008450821 \end{array}\right],$$

$$g-1=\left[\begin{array}{l} 0,004196426\ (2) - 0,000117712\ (3) - 0,000056729\ (4) \\ - 0,000002499\ (5) + 0,000001326\ (6) + 0,000000866\ (7) \\ \qquad = 0,004021678 \end{array}\right].$$

On aura, par conséquent, pour les quantités qui déterminent les mouvemens du périgée et des nœuds,

$$(1-c)\,nt = (0,008450821)\,nt, \qquad (g-1)\,nt = (0,004021678)\,nt.$$

Suivant les observations, le mouvement du périgée est $(0,008452)\,nt$, et celui des nœuds $(0,0040217)\,nt$; ces valeurs ne diffèrent, comme on voit, que dans la sixième décimale pour le mouvement du périgée; elles sont identiques pour le mouvement du nœud. Cet accord doit être regardé comme la vérification la plus certaine de l'exactitude de la théorie lunaire, et il montre en même temps qu'il était indispensable de porter les approximations aussi loin que nous l'avons fait.

136. Reprenons maintenant les expressions du rayon vecteur, de la longitude et de la latitude de la Lune, et occupons-nous de réduire en nombres les coefficiens des diverses inégalités qu'elles renferment.

Les astronomes, pour calculer un lieu de la Lune, emploient ordinairement, au lieu du rayon vecteur, la *parallaxe horizontale*; c'est-à-dire l'angle sous lequel le rayon terrestre correspondant à une latitude donnée serait vu du centre de la Lune; cette *parallaxe*, qui, jointe à la *longitude vraie* et à la *latitude*, forme les trois coordonnées nécessaires pour déterminer la position de l'astre, est facile à déduire de ce qui précède. En effet, si l'on nomme p la parallaxe

horizontale de la Lune, D le rayon terrestre qui lui correspond, et r la distance du centre de la Lune à celui de la Terre, on aura

$$\sin p = \frac{D}{r},$$

expression dans laquelle il suffira de substituer pour $\frac{1}{r}$ sa valeur en série de *cosinus* d'angles croissant proportionnellement au temps t, pour avoir la parallaxe exprimée dans une série semblable. Soit $\frac{1}{a}(1+k)$ le premier terme de ce développement, c'est-à-dire la partie non périodique de la valeur de la fonction $\frac{1}{r}$; a représentant d'ailleurs, comme précédemment, le demi-grand axe de l'orbite elliptique de la Lune, qui est lié au moyen mouvement donné par les observations, par la troisième loi de Képler; en ne considérant que ce terme, on aura

$$\sin p = \frac{D(1+k)}{a}. \qquad (a)$$

Cette quantité est ce qu'on nomme la *constante de la parallaxe*. Pour en déterminer la valeur par une formule facile à réduire en nombres, il faut faire disparaître le diviseur a de son expression; pour cela, nous observerons que sous le parallèle dont le *sinus* de la latitude est $\frac{1}{\sqrt{3}}$, l'attraction de la Terre sur les points placés à sa surface est la même que si sa masse entière était réunie à son centre de gravité. En désignant donc par G cette force, c'est-à-dire la pesanteur terrestre augmentée de la composante verticale de la force centrifuge, et par M la masse de la

Terre, on aura

$$G = \frac{M}{D^2};$$

mais si l'on nomme g la mesure de la pesanteur sous le parallèle dont la latitude est λ, la composante verticale de la force centrifuge sous ce parallèle sera égale à $gq \cos^2 \lambda$, n° 16, livre Ier, en représentant par q la petite fraction $\frac{1}{289}$; sous le parallèle dont le carré du sinus de la latitude est $\frac{1}{3}$, on a $\cos^2 \lambda = \frac{2}{3}$; on aura donc, pour ce parallèle,

$$G = g\left(1 + \frac{2}{3}q\right);$$

et, par conséquent,

$$\frac{M}{D^2} = g\left(1 + \frac{2}{3}q\right).$$

En nommant m la masse de la Lune, et nt son moyen mouvement dans son orbite, on a d'ailleurs, par les formules du mouvement elliptique, n° 22, livre II,

$$a^3 n^2 = M + m.$$

De ces équations, en faisant, pour abréger, $\frac{m}{M} = \nu$, et négligeant le carré de q, on tire

$$\frac{1}{a} = \sqrt[3]{\frac{n^2\left(1 - \frac{2}{3}q\right)}{(1+\nu)g\,D^2}}.$$

On déterminera, au moyen de cette formule, le demi-grand axe a de l'ellipse lunaire. On en conclut, d'ailleurs,

$$\frac{D}{a} = \sqrt[3]{\frac{n^2\,D\left(1 - \frac{2}{3}q\right)}{(1+\nu)g}}.$$

Si l'on désigne par l la longueur du pendule à secondes correspondant au parallèle que nous consi-

dérons, par π le rapport de la demi-circonférence au rayon, et par T le temps, exprimé en secondes, d'une révolution sidérale de la Lune, on a

$$g = \pi^2 l, \quad n = \frac{2\pi}{T}.$$

En substituant ces valeurs, on trouvera

$$\frac{D}{a} = \sqrt[3]{\frac{4D\left(1-\frac{2}{3}q\right)}{(1+\nu)lT^2}}.$$

L'équation (a) donne ainsi

$$\sin p = (1+k)\sqrt[3]{\frac{4D\left(1-\frac{2}{3}q\right)}{(1+\nu)lT^2}}.$$

Soient p' et D' ce que deviennent p et D relativement à l'équateur, on aura

$$\sin p' = \frac{D'}{D}\sin p;$$

mais αh désignant, comme précédemment, l'aplatissement du sphéroïde terrestre, et D et D' les rayons qui aboutissent respectivement, l'un à l'équateur, l'autre au parallèle dont le *sinus* de la latitude est $\frac{1}{\sqrt{3}}$, on a, n° 40, livre V,

$$\frac{D}{D'} = 1 - \frac{1}{3}\alpha h.$$

On aura donc ainsi

$$\sin p' = (1+k)\left(1+\frac{1}{3}\alpha h\right)\sqrt[3]{\frac{4D\left(1-\frac{2}{3}q\right)}{(1+\nu)lT^2}},$$

ou bien, en remplaçant $(1+k)$ par sa valeur, n°s 23 et 50,

$$\sin p' = \left(1+\frac{m^2}{6}-\frac{179}{288}m^4-\frac{97}{48}m^3+\frac{m^2}{4}e'^2\right)\left(1+\frac{1}{3}\alpha h\right)\sqrt[3]{\frac{4D\left(1-\frac{2}{3}q\right)}{(1+\nu)lT^2}} \quad (b)$$

Cette expression est ce qu'on nomme la *constante de la parallaxe équatoriale de la Lune*. Pour la réduire en nombres, observons que sous le parallèle dont le carré du *sinus* de la latitude est $\frac{1}{3}$, la longueur du pendule à secondes est $0^{m},992586$, et celle du rayon terrèstre 6369733 mètres. La durée d'une révolution sidérale de la Lune est de $2360591'',8$; la valeur de αh a été donnée n° 110; on aura donc ainsi

$$l = 0^{m},992586, \qquad \alpha h = \frac{1}{305},$$

$$D = 6369733^{m}, \qquad q = \frac{1}{289},$$

$$T = 2360591'',8.$$

Supposons, de plus, le rapport $\frac{m}{M}$ de la masse de la Lune à celle de la Terre, égal à $\frac{1}{75}$; en sorte qu'on ait

$$\nu = \frac{m}{M} = \frac{1}{75}.$$

En vertu de ces valeurs, on trouvera

$$\left(1 + \frac{1}{3}\alpha h\right)\sqrt{\frac{4D\left(1 - \frac{2}{3}q\right)}{(1+\nu)\,l\,T^2}} = 0,016570953.$$

Au moyen des valeurs rapportées dans le tableau, n° 135, on trouve, d'ailleurs,

$$1 + \frac{m^2}{6} - \frac{179}{288}m^4 - \frac{97}{48}m^4 + \frac{m^2 e'^2}{4} = 1,000908743.$$

En substituant ces valeurs dans l'expression de $\sin p'$, on trouve, pour la *constante de la parallaxe horizontale* à l'équateur,

$$p' = 3421'',26.$$

M. Bürg, par la discussion d'un très grand nom-

bre d'observations, a trouvé cette constante égale à 3421″,23 (*); la différence est insensible, et cet accord entre le résultat de l'observation et celui qui a été déduit de la loi des oscillations du pendule, montre que le pouvoir attractif de la Terre est le même sur les corps placés à sa surface et sur la matière de la Lune; il suffirait, en effet, de la plus légère différence pour troubler l'accord qui existe entre les valeurs de la constante de la parallaxe horizontale

(*) Il faut observer que la *constante de la parallaxe* change de valeur selon la manière dont on exprime le rayon vecteur; en supposant son expression développée en série de *cosinus* d'angles croissant proportionnellement à la *longitude vraie*, et en réduisant l'expression de la parallaxe tirée des Tables de Bürg en une série semblable, Laplace a trouvé (*Mécan. cél.*, livre VII) la constante de la parallaxe horizontale à l'équateur égale à 3432″,06; c'est de cette détermination que nous sommes parti; en convertissant ensuite la série relative à la longitude vraie en série de *cosinus* croissant proportionnellement à la *longitude moyenne*, et en n'ayant égard qu'au terme tout constant de ce développement, j'ai trouvé la valeur de la même constante égale dans ce cas à 3421″,23. Cette valeur s'écarte peu de celle que Bürg attribue à la *constante de la parallaxe* dans ses Tables, où elle est égale à 3420″,96; mais il faut remarquer que cette *constante* se rapporte à une forme particulière du développement du rayon vecteur, et, avant de la comparer à celle que nous avons trouvée par la théorie, ou qui est donnée par la formule (b), il faut, en ramenant l'expression des Tables à la forme ordinaire, prouver que la constante de la parallaxe ne subit, en effet, qu'une très légère altération. C'est une attention que ne paraît point avoir eue M. Poisson, d'après ce qu'il dit page 79 de son *Mémoire sur les mouvemens de la Lune autour de la Terre*. (*Mémoires de l'Institut*, tome X.)

de la Lune, déduite de la théorie de la gravitation universelle, et celle qui résulte de l'observation.

La valeur numérique de ν est la seule dans l'expression de p', sur laquelle il pourrait rester encore quelques doutes; cette quantité exprime le rapport de la masse de la Lune à celle de la Terre, et il est très important de la déterminer avec précision. La valeur $\frac{1}{75}$ que nous avons adoptée, est celle qui résulte des dernières recherches de Laplace sur le phénomène des marées, et qui s'écarte peu d'ailleurs de celle qu'on déduit du coefficient de la nutation suivant les plus récentes déterminations (*). En supposant, d'après les résultats de M. Lindeneau, la masse de la Lune $\frac{1}{87}$ de celle de la Terre, on trouverait 2″ de différence à peu près entre les valeurs de la constante de la parallaxe déduite du calcul et celle déterminée par Bürg; tout indique donc qu'il faut s'en tenir, pour la masse de notre satellite, à la valeur que nous avons adoptée. Au reste, c'est un point qui mérite d'être approfondi, et qu'une discussion nouvelle des observations, en fixant d'une manière incontestable la véritable valeur de la constante de la *parallaxe lunaire*, servirait sans doute à éclaircir.

137. En désignant par D′ le rayon terrestre à l'équateur, on a, par ce qui précède,

$$\frac{D'}{a} = \left(1+\frac{1}{3}\alpha h\right)\sqrt[3]{\frac{4D\left(1-\frac{2}{3}q\right)}{(1+\nu)\,l\,T^2}} = 0,016570953.$$

Ce facteur est celui par lequel on doit multiplier

(*) *Voyez* les Notes à la fin du volume.

tous les termes de l'expression de $\frac{1}{r}$, pour en déduire celle de la parallaxe équatoriale de la Lune.

Cela posé, en convertissant en nombres les coefficiens analytiques de l'expression de la fonction $\frac{1}{r}$, n° 132, au moyen des valeurs rapportées n° 135, et en réduisant en secondes les résultats, on trouve, pour la valeur de la parallaxe équatoriale de la Lune en fonction de sa longitude moyenne, l'expression suivante (*):

Expression numérique de la parallaxe équatoriale de la Lune en fonction du temps,

$$\begin{aligned}\frac{D'}{r} = & [3418'',0470\,(1) + 3'',1874\,(3) - 0'',0652\,(5) - 0'',0162\,(6) = 3421'',1530] \\ & + [187'',0700\,(2) + 0'',1044\,(3) - 0'',3945\,(4) - 0'',2264\,(5) = 186'',5535] \cos\varphi \\ & + [10'',2385\,(3) + 0'',0280\,(5) - 0'',0542\,(6) = 10'',2123] \cos 2\varphi \\ & + [0'',6304\,(4) + 0'',0030\,(6) = 0'',6334] \cos 3\varphi \\ & + 0'',0409\,(5) \cos 4\varphi + 0'',0027\,(6) \cos 5\varphi\end{aligned}$$

(*) Les numéros placés à côté des différens nombres dont la réunion forme le coefficient numérique de chaque inégalité, indique l'ordre des termes dont ces nombres dérivent. On peut juger ainsi du plus ou moins de convergence des séries qui composent chaque coefficient, et l'on pourra même, d'après les termes calculés rigoureusement, ajouter par induction et sous la forme d'indéterminés, quelques nouveaux termes à leurs expressions, qui serviront à rendre la précision plus rigoureuse, dans les cas très rares toutefois, où les approximations de l'analyse ne paraîtraient point encore suffisantes. C'est ce que nous avons fait, comme on le verra, dans l'expression de la *longitude vraie*, et cette facilité d'ajouter ainsi à l'exactitude des résultats sans augmenter le travail analytique, est un des principaux avantages de la méthode des approximations successives que nous avons employée dans la théorie précédente.

$+[-0'',4817(4)+0'',0539(6)=-0'',4278]\cos\varphi'-0'',0121(5)\cos 2\varphi'$

$+[0'',6168(4)+0'',3057(5)+0'',1303(6)=1'',0528]\cos(\varphi-\varphi')$

$+[-0'',6168(4)-0'',2299(5)-0'',0659(9)=-0'',9126]\cos(\varphi+\varphi')$

$+[0'',0675(5)+0'',0349(6)=0'',1024]\cos(2\varphi-\varphi')$

$+[-0'',0675(5)-0'',0237(6)=-0'',0912]\cos(2\varphi+\varphi')$

$+[0'',0078(5)+0'',0053(6)=0'',0131]\cos(\varphi-2\varphi')$

$+[-0'',0078(5)-0'',0023(6)=-0'',0101]\cos(\varphi+2\varphi')$

$+0'',0009(6)\cos(2\varphi-2\varphi')-0'',0009(6)\cos(2\varphi+2\varphi')$

$+0'',0062(6)\cos(3\varphi-\varphi')-0'',0062(6)\cos(3\varphi+\varphi')$

$+[-0'',0260(5)+0'',0174(6)=-0'',0087]\cos 2\eta$

$+[-0'',9402(4)+0'',2374(5)+0'',0026(6)=-0'',7002]\cos(\varphi-2\eta)$

$-0'',0008(6)\cos(\varphi+2\eta)$

$+0'',0019(6)\cos(\varphi'-2\eta)+0'',0019(6)\cos(\varphi'+2\eta)$

$-0'',0022(6)\cos(\varphi-\varphi'-2\eta)+0'',0022(6)\cos(\varphi+\varphi'-2\eta)$

$+0'',1697(4)\cos(3\varphi-2\eta)$

$+[19'',1245(3)+7'',4020(4)+0'',6731(5)+0'',2755(6)=27'',4751]\cos 2\xi$

$+[26'',2372(3)+6'',1167(4)+1'',4904(5)+0'',3312(6)$
$=34'',1755]\cos(2\xi-\varphi)$

$+[2'',1588(4)+0'',7595(5)+0'',1414(6)=3'',0597]\cos(2\xi+\varphi)$

$+[1'',1240(4)+0'',5839(5)+0'',1682(6)=1'',8761]\cos(2\xi-\varphi')$

$+[-0'',1606(4)-0'',1393(5)-0'',0276(6)=-0'',3275]\cos(2\xi+\varphi')$

$+[-0'',2148(5)-0'',0683(6)=-0'',2751]\cos(2\xi-2\varphi)$

$+[0'',2005(5)+0'',0683(6)=0'',2688]\cos(2\xi+2\varphi)$

$+[1'',0280(4)+0'',3485(5)+0'',0727(6)=1'',4492]\cos(2\xi-\varphi-\varphi')$

$+[-0'',4406(4)-0'',0266(5)+0'',0926(6)=-0'',3747]\cos(2\xi-\varphi+\varphi')$

$+[0'',1269(5)+0'',0692(6)=0'',1961]\cos(2\xi+\varphi-\varphi')$

$+[-0'',01813(5)-0'',0232(6)=-0'',0413]\cos(2\xi+\varphi+\varphi')$

$+[0'',0458(5)+0'',0303(6)=0'',0761]\cos(2\xi-2\varphi')$

$-0'',0009(6)\cos(2\xi+2\varphi')$

$+[-0'',0688(5)-0'',0314(6)=-0'',1002]\cos(2\xi-3\varphi)$

$+0'',0174(6)\cos(2\xi+3\varphi)$

$-0'',0126(6)\cos(2\xi-2\varphi-\varphi')+0'',0018(6)\cos(2\xi-2\varphi+\varphi')$

$+0'',0118(6)\cos(2\xi+2\varphi-\varphi')-0'',0017(6)\cos(2\xi+2\varphi+\varphi')$

$+[0'',0314(5)+0'',0138(6)=0'',0452]\cos(2\xi-\varphi-2\varphi')$

$+[-0'',0055(5)-0'',0072(6)=-0'',0127]\cos(2\xi-\varphi+2\varphi')$

$+0'',0052(6)\cos(2\xi+\varphi-2\varphi')-0'',0079(6)\cos(2\xi-4\varphi)$

$-0'',0027(6)\cos(2\xi-3\varphi-\varphi')+0'',0012(6)\cos(2\xi-3\varphi+\varphi')$

$+[-0'',1153(5)+0'',0080(6)=-0'',1073]\cos(2\xi-2\eta)$

$+[-0'',0738(5)-0'',0073(6)=-0'',0811]\cos(2\xi-\varphi-2\eta)$

$-0'',0108(6)\cos(2\xi-\varphi+2\eta)$

$+[-0'',0580(5)+0'',0083(6)=-0'',0498]\cos(2\xi+\varphi-2\eta)$

$-0'',0068(6)\cos(2\xi-\varphi'-2\eta)+0'',0010(6)\cos(2\xi+\varphi'-2\eta)$

$-0'',0081(6)\cos(2\xi-2\varphi-2\eta)-0'',0144(6)\cos(2\xi-2\varphi+2\eta)$

$-0'',0064(6)\cos(2\xi+2\varphi-2\eta)$

$+[-0'',6042(4)-0'',2440(5)-0'',0751(6)=-0'',9233]\cos\xi$

$+0'',0074(6)\cos(\xi-\varphi)$
$+[-0'',0661(5)-0'',0292(6)=-0'',0953]\cos(\xi+\varphi)$
$+[0'',0101(5)-0'',0123(6)=-0'',0022]\cos(\xi-\varphi')$
$+[0'',1808(4)-0'',0608(5)+0'',0292(6)=0'',1492]\cos(\xi+\varphi')$
$+0'',0066(6)\cos(\xi-2\varphi)-0'',0061(6)\cos(\xi+2\varphi)$
$+0'',0011(6)\cos(\xi+\varphi-\varphi')$
$+[0'',0198(5)-0'',0067(6)=0'',0131]\cos(\xi+\varphi+\varphi')$
$+0'',0073(6)\cos(\xi-2\eta)$
$+[0'',0188(5)-0'',0032(6)=0'',0156]\cos 3\xi$
$-0'',0196(6)\cos(3\xi-\varphi)+0'',0025(6)\cos(3\xi+\varphi)$
$+0'',0016(6)\cos(3\xi-\varphi')+0'',0018(6)\cos(3\xi+\varphi')$
$-0'',0053(6)\cos(3\xi-2\varphi)+0'',0028(6)\cos(3\xi-\varphi+\varphi')$
$+[0'',0936(5)+0'',1019(6)=0'',1955]\cos 4\xi$
$+[0'',3028(5)+0'',1942(6)=0'',4970]\cos(4\xi-\varphi)$
$+0'',0184(6)\cos(4\xi+\varphi)$
$+0'',0110(6)\cos(4\xi-\varphi')-0'',0016(6)\cos(4\xi+\varphi')$
$+[0'',2014(5)+0'',1070(6)=0'',3084]\cos(4\xi-2\varphi)$
$+0'',0297(6)\cos(4\xi-\varphi-\varphi')$
$-0'',0076(6)\cos(4\xi-\varphi+\varphi')$
$+0'',0003(7)\cos(4\xi-3\varphi)$
$+0'',0158(6)\cos(4\xi-2\varphi-\varphi')$
$-0'',0068(6)\cos(4\xi-2\varphi+\varphi')$
$+0'',0043(6)\cos(4\xi-2\eta)$
$+0'',0030(6)\cos(4\xi-\varphi-2\eta).$

138. En convertissant de même en nombres les coefficiens des différentes inégalités qui entrent dans l'expression de la *longitude vraie*, n° 133, et en les réduisant ensuite en secondes, on aura

Expression de la longitude vraie de la Lune en fonction de la longitude moyenne :

$$\begin{aligned}
v &= t+\varepsilon \\
&+\left[\begin{array}{c}22578'',04(1)+86'',29(2)-5'',54(3)-13'',37(4)-4'',84(5)\\ -0'',88(6)=22639'',70\end{array}\right]\sin\varphi \\
&+\left[\begin{array}{c}772'',321(2)+2'',569(4)-2'',608(5)-2'',040(6)-0'',709(7)\\ =769'',533\end{array}\right]\sin 2\varphi \\
&+[36'',634(3)+0'',085(5)=36'',719]\sin 3\varphi \\
&+1'',986(4)\sin 4\varphi+0'',116(5)\sin 5\varphi \\
&+\left[\begin{array}{c}-777'',237(2)+70'',756(4)+28'',307(5)+8'',055(6)\\ +1'',342(7)-0'',155(8)=-668'',932\end{array}\right]\sin\varphi' \\
&+[-9'',788(3)+1'',148(5)+0'',789(6)=-7'',851]\sin 2\varphi'
\end{aligned}$$

$$-0'',161\,(4)\sin 3\varphi'$$

$$+\left[\begin{matrix}74'',445(3)+40'',868(4)+26'',238(5)+5'',420(6)\\ +0'',72\,\text{ind.}=147'',691\end{matrix}\right]\sin(\varphi-\varphi')$$

$$+\left[\begin{matrix}-74'',445(3)-23'',765(4)-9'',875(5)-1'',301(6)\\ -0'',50\,\text{ind.}=-109'',886\end{matrix}\right]\sin(\varphi+\varphi')$$

$$+[-5'',092(4)+2'',803(5)+1'',106(6)+0'',65\,\text{ind.}=9'',651]\sin(2\varphi-\varphi')$$

$$+[-5'',092(4)-1'',664(5)-0'',59\,\text{ind.}=-7'',347]\sin(2\varphi+\varphi')$$

$$+[0'',938(4)+0'',745(5)+0'',440(6)+0'',22\,\text{ind.}=2'',343]\sin(\varphi-2\varphi')$$

$$+[-0'',938(4)-0'',173(5)-0'',056(6)=-1'',167]\sin(\varphi+2\varphi')$$

$$+0'',065(5)\sin(2\varphi-2\varphi')-0'',065(5)\sin(2\varphi+2\varphi')$$

$$+0'',362(5)\sin(3\varphi-\varphi')\quad-0'',362(5)\sin(3\varphi+\varphi')$$

$$+0'',016(5)\sin(\varphi-3\varphi')\quad-0'',016(5)\sin(\varphi+3\varphi')$$

$$+[-414'',660(2)+1'',918(4)+1'',244(5)-0'',126(6)=-411'',624]\sin 2\eta$$

$$+\left[\begin{matrix}68'',084(3)-28'',647(4)-0'',137(5)-0'',053(6)\\ +0'',18\,\text{ind.}=39'',427\end{matrix}\right]\sin(\varphi-2\eta)$$

$$+[-45'',389(3)+0'',284(5)=-45'',105]\sin(\varphi+2\eta)$$

$$+[0'',391(4)-0'',150(5)-0'',111(6)=0'',130]\sin(\varphi'-2\eta)$$

$$+[0'',391(4)+0'',245(5)=0'',636]\sin(\varphi'+2\eta)$$

$$+[-0'',621(4)-0'',784(5)=-1'',405]\sin(2\varphi-2\eta)$$

$$-4'',037(4)\sin(2\varphi+2\eta)$$

$$+0'',160(5)\sin(\varphi-\varphi'-2\eta)-0'',192(5)\sin(\varphi-\varphi'+2\eta)$$

$$-0'',160(5)\sin(\varphi+\varphi'-2\eta)+0'',192(5)\sin(\varphi+\varphi'+2\eta)$$

$$+0'',005(5)\sin(2\varphi'-2\eta)+0'',005(5)\sin(2\varphi'+2\eta)$$

$$+1'',035(5)\sin(3\varphi-2\eta)+0'',334(5)\sin(3\varphi+2\eta)$$

$$+0'',417(4)\sin 4\eta-0'',137(5)\sin(\varphi-4\eta)+0'',091(5)\sin(\varphi+4\eta)$$

$$+\left[\begin{matrix}1586'',887(2)+617'',823(3)+131'',628(4)+28'',693(5)\\ +5'',540(6)+0'',207(7)+0'',021(8)=2370'',799\end{matrix}\right]\sin 2\xi$$

$$+\left[\begin{matrix}3166'',627(2)+1038'',270(3)+297'',506(4)+68'',267(5)\\ +13'',025(6)+2'',754(7)+0'',55\,\text{ind.}=4586'',999\end{matrix}\right]\sin(2\xi-\varphi)$$

$$+\left[\begin{matrix}134'',225(3)+46'',139(4)+9'',615(5)+1'',895(6)\\ +0'',264(7)=192'',142\end{matrix}\right]\sin(2\xi+\varphi)$$

$$+\left[\begin{matrix}93'',264(3)+50'',975(4)+16'',345(5)+4'',053(6)\\ +0'',872(7)-0'',072(8)=165'',437\end{matrix}\right]\sin(2\xi-\varphi')$$

$$+\left[\begin{matrix}-13'',323(3)-11'',008(4)-2'',213(5)+0'',647(6)\\ +0'',707(7)+0'',154(8)=-25'',036\end{matrix}\right]\sin(2\xi+\varphi')$$

$$+\left[\begin{matrix}129'',983(3)+45'',806(4)+22'',512(5)+8'',213(6)\\ +3'',543(7)+1'',230(8)+0'',50\,\text{ind.}=211'',787\end{matrix}\right]\sin(2\xi-2\varphi)$$

$$+[10'',263(4)+3'',347(5)+0'',499(6)=14'',109]\sin(2\xi+2\varphi)$$

$$+\left[\begin{matrix}124'',071(3)+59'',695(4)+19'',208(5)+4'',369(6)\\ +0'',065(7)-0'',489(8)=206'',919\end{matrix}\right]\sin(2\xi-\varphi-\varphi')$$

$$+\left[\begin{matrix}-53'',174(3)-5'',734(4)+10'',933(5)+9'',396(6)\\ +5'',674(7)+2'',944(8)+1'',45\,\text{ind.}=-28''511\end{matrix}\right]\sin(2\xi-\varphi+\varphi')$$

$$+\left[\begin{matrix}7'',889(4)+4'',387(5)+1'',338(6)+0'',386(7)\\ =14'',000\end{matrix}\right]\sin(2\xi+\varphi-\varphi')$$

$$+\left[\begin{matrix}-1'',127(4)-1'',306(5)-0'',362(6)-0'',081(7)\\=-2'',876\end{matrix}\right]\sin(2\xi+\varphi+\varphi')$$
$$+\left[\begin{matrix}3'',804(4)+2'',693(5)+0'',994(6)+0'',299(7)\\=7'',790\end{matrix}\right]\sin(2\xi-2\varphi')$$
$$-0'',065(5)\sin(2\xi+2\varphi')$$
$$+[8'',299(4)+2'',962(5)+1'',138(6)+0'',5\,\text{ind.}=12'',899]\sin(2\xi-3\varphi)$$
$$+[0'',768(5)+0'',134(6)=0'',902]\sin(2\xi+3\varphi)$$
$$+\left[\begin{matrix}5'',093(4)+2'',093(5)+1'',525(6)+0'',45\,\text{ind.}\\=9'',161\end{matrix}\right]\sin(2\xi-2\varphi-\varphi')$$
$$+[-2'',183(4)+0'',350(5)+0'',556(6)=-1'',277]\sin(2\xi-2\varphi+\varphi')$$
$$+0'',604(5)\sin(2\xi+2\varphi-\varphi')-0'',086(5)\sin(2\xi+2\varphi+\varphi')$$
$$+\left[\begin{matrix}3'',792(4)+2'',389(5)+1'',008(6)+0'',293(7)\\=7'',482\end{matrix}\right]\sin(2\xi-\varphi-2\varphi')$$
$$+[-0'',669(4)-0'',865(5)-0'',495(6)=-2'',029]\sin(2\xi-\varphi+2\varphi')$$
$$+0'',321(5)\sin(2\xi+\varphi-2\varphi')$$
$$+0'',606(5)\sin(2\xi-4\varphi)$$
$$+0'',325(5)\sin(2\xi-3\varphi-\varphi')-0'',139(5)\sin(2\xi-3\varphi+\varphi')$$
$$+0'',156(5)\sin(2\xi-2\varphi-2\varphi')$$
$$+\left[\begin{matrix}69'',788(3)-12'',760(4)-1'',451(5)-0'',468(6)\\=55'',109\end{matrix}\right]\sin(2\xi-2\eta)$$
$$+[-3'',190(4)-1'',938(5)-0'',6\,\text{ind.}=-5'',728]\sin(2\xi+2\eta)$$
$$+[2'',547(4)-1'',937(5)-0'',096(6)=0'',514]\sin(2\xi-\varphi-2\eta)$$
$$+[-6'',366(4)-2'',413(5)-0'',442(6)=-9'',221]\sin(2\xi-\varphi+2\eta)$$
$$+[-7'',003(4)+0'',917(5)+0'',022(6)=-6'',065]\sin(2\xi+\varphi-2\eta)$$
$$-0'',619(5)\sin(2\xi+\varphi+2\eta)$$
$$+[2'',735(4)-0'',429(5)=2'',306]\sin(2\xi-\varphi'-2\eta)$$
$$-0'',187(5)\sin(2\xi-\varphi'+2\eta)$$
$$+[-1'',172(4)-0'',288(5)=-1'',460]\sin(2\xi+\varphi'-2\eta)$$
$$+0'',027(5)\sin(2\xi+\varphi'+2\eta)$$
$$-0'',174(5)\sin(2\xi-2\varphi-2\eta)$$
$$-0'',697(5)\sin(2\xi-2\varphi+2\eta)$$
$$-0'',523(5)\sin(2\xi+2\varphi-2\eta)$$
$$+\left\{\begin{matrix}\left[\begin{matrix}-73'',061(3)-33'',883(4)-11'',012(5)-4'',370(6)\\-1'',839(7)-0'',820(8)-0'',7\,\text{ind.}\end{matrix}\right]\\\times\left(1-\frac{1}{38}\right)=-122'',378\end{matrix}\right\}\sin\xi$$
$$+\left\{\begin{matrix}\left[\begin{matrix}-10'',996(4)-4'',559(5)-1'',602(6)-0'',719(7)\\-0'',4\,\text{ind.}\end{matrix}\right]\\\times\left(1-\frac{1}{38}\right)=-17'',795\end{matrix}\right\}\sin(\xi-\varphi)$$
$$+\left\{\begin{matrix}\left[\begin{matrix}-4'',998(4)-2'',333(5)-0'',816(6)-0'',284(7)\\-0'',16\,\text{ind.}\end{matrix}\right]\\\times\left(1-\frac{1}{38}\right)=-8'',365\end{matrix}\right\}\sin(\xi+\varphi)$$
$$+[1'',227(4)-1'',424(5)-0'',181(6)=-0'',378]\sin(\xi-\varphi')$$

$$+\left\{\begin{matrix}\left[\begin{matrix}21'',868(3)-7'',362(4)+3'',400(5)-0'',488(6)\\ +0'',3\text{ ind.}\end{matrix}\right]\\ \times\left(1-\frac{1}{38}\right)=17'',252\end{matrix}\right\}\sin(\xi+\varphi')$$

$-0'',794(5)\sin(\xi-2\varphi)-0'',356(5)\sin(\xi+2\varphi)$
$-0'',025(5)\sin(\xi-\varphi-\varphi')$
$+[1'',496(4)-1'',108(5)=0'',388]\sin(\xi-\varphi+\varphi')$
$+0'',084(5)\sin(\xi+\varphi-\varphi')$
$+[1'',496(4)-0'',505(5)=0'',991]\sin(\xi+\varphi+\varphi')$
$+0'',075(5)\sin(\xi-2\varphi')-0'',044(5)\sin(\xi+2\varphi')$
$-0'',734(5)\sin(\xi-2\eta)+0'',147(5)\sin(\xi+2\eta)$
$+[1'',366(4)-0'',082(5)-0'',264(6)-0'',133(7)=0'',887]\sin 3\xi$
$+[-1'',580(5)-0'',954(6)-0'',414(7)=-2'',948]\sin(3\xi-\varphi)$
$+0'',144(5)\sin(3\xi+\varphi)+0'',012(5)\sin(3\xi-\varphi')$
$+0'',011\sin(3\xi+\varphi')-0'',638\sin(3\xi-2\varphi)$
$+0'',210\sin(3\xi-\varphi+\varphi')-0'',245\sin(3\xi-2\eta)$

$$+\left[\begin{matrix}5'',070(4)+5'',312(5)+2'',345(6)+0'',818(7)+0'',7\text{ ind.}\\ =14'',245\end{matrix}\right]\sin 4\xi$$

$$+\left[\begin{matrix}18'',825(4)+12'',436(5)+5'',228(6)+1'',263(7)\\ +0'',5\text{ ind.}=38'',252\end{matrix}\right]\sin(4\xi-\varphi)$$

$+[0'',853(5)+0'',424(6)=1'',277]\sin(4\xi+\varphi)$
$+[0'',596(5)+0'',686(6)=1'',282]\sin(4\xi-\varphi')$
$+[-0'',085(5)-0'',139(6)=-0'',224]\sin(4\xi+\varphi')$

$$+\left[\begin{matrix}15'',192(4)+9'',341(5)+4'',146(6)+1'',574(7)\\ +0'',9\text{ ind.}=31'',153\end{matrix}\right]\sin(4\xi-2\varphi)$$

$+0'',139(6)\sin(4\xi+2\varphi)$
$+[1'',844(5)+1'',358(6)+0'',622(7)=3'',824]\sin(4\xi-\varphi-\varphi')$
$+[-0'',474(5)-0'',252(6)-0'',020(7)=-0'',746]\sin(4\xi-\varphi+\varphi')$
$+0'',432(5)\sin(4\xi-3\varphi)$
$+1'',191(5)\sin(4\xi-2\varphi-\varphi')$
$-0'',510(5)\sin(4\xi-2\varphi+\varphi')$
$+0'',111(6)\sin(4\xi-\varphi-2\varphi')$
$-0'',001(6)\sin(4\xi-\varphi+2\varphi')$
$+[-0'',327(4)+0'',346(5)+0'',035(6)=0'',054]\sin(4\xi-2\eta)$
$+0'',393(5)\sin(4\xi-\varphi-2\eta)$
$-0'',036(5)\sin(4\xi+\varphi-2\eta)$
$-0'',026(5)\sin(4\xi-\varphi'-2\eta)$
$+0'',011(5)\sin(4\xi+\varphi'-2\eta)$
$+0'',094(5)\sin(2\xi-4\eta)+0'',022(6)\sin 6\xi$
$+0'',151(6)\sin(6\xi-\varphi)+0'',256(6)\sin(6\xi-2\varphi)$
$+6'',623\sin(\mathfrak{R}-\eta)$
$-0'',971\sin(♀-♁)+0'',381\sin 2(♀-♁)$
$-0'',749\sin(♃-♁)+0'',246\sin 2(♃-♁).$

139. Parmi les inégalités périodiques du mouvement en longitude, l'une des plus remarquables est celle qui dépend de l'angle ξ, ou $t - mt + \varepsilon - \varepsilon'$, et qu'on a nommée *inégalité parallactique*, n° 6, parce que son coefficient dépend, en effet, du rapport des parallaxes du Soleil et de la Lune, et qu'il peut servir à déterminer l'une de ces deux quantités lorsque l'autre est connue.

Pour le faire voir, nommons P la parallaxe horizontale du Soleil correspondante au rayon terrestre D; en négligeant les termes simplement périodiques, on aura

$$\sin P = \frac{D}{a'} = \frac{D}{a} \cdot \frac{a}{a'}.$$

Mais, en nommant p la parallaxe horizontale de la Lune correspondante au même rayon terrestre D, nous avons trouvé, n° 136,

$$\sin p = (1 + k)\frac{D}{a}.$$

On aura donc ainsi

$$\sin P = \frac{a}{a'} \frac{\sin p}{1 + k}. \qquad (a)$$

Cela posé, le coefficient de l'inégalité de la longitude qui dépend de l'angle ξ étant, n° 29, de la forme $\frac{a}{a'} b_{10}$, si l'on suppose que la valeur numérique de ce coefficient, déduite des observations, soit N, on aura $\frac{a}{a'} = \frac{N}{b_{10}}$; et, par conséquent,

$$\sin P = \frac{N}{(1 + k) b_{10}} \sin p. \qquad (b)$$

Suivant les Tables de Bürg, ramenées à la forme de la théorie précédente, le coefficient de l'inégalité pa-

rallactique serait de 122″,378 ; on aurait donc

$$N = 122'',378.$$

Par la réduction des formules du nº 133 en nombres, nous avons trouvé

$$b_{70} = 0,234925.$$

On a, par le nº 136, $(1+k) = 1,00090874$; en substituant ces valeurs dans l'équation (b), on en conclura la parallaxe du Soleil du moment que celle de la Lune sera déterminée. La *parallaxe lunaire* peut être regardée comme suffisamment bien connue, et la théorie a donné, nº 136, pour la constante de cette parallaxe à l'équateur, $p' = 3421'',26$; au moyen de ces valeurs on trouve, en nommant P′ ce que devient P à l'équateur,

$$P' = 8'',63221.$$

La valeur de la parallaxe solaire déduite de l'observation des derniers passages de Vénus sur le disque du Soleil, se trouve comprise entre 8″,5 et 8″,7, selon les différentes observations dont on a fait usage pour la déterminer; la valeur qui résulte de la théorie de la Lune tombe donc entre ces limites : il faut toutefois observer qu'il suffirait d'un léger changement dans la valeur du coefficient de l'inégalité parallactique déduite de l'observation, pour altérer la valeur précédente de la parallaxe solaire. Or, les astronomes ne sont point parfaitement d'accord sur ce point. Selon les Tables de Burckhardt, l'équation parallactique serait de 123″,5; ce qui donnerait 8″,7 pour la valeur de la parallaxe solaire; cette valeur me paraît un peu trop forte, et c'est ce qui m'a fait donner,

pour le coefficient de cette inégalité, la préférence à la détermination de Bürg, en attendant que les astronomes, par une discussion nouvelle des observations, l'aient fixée avec toute la précision que son importance exige.

L'équation (*a*) donne

$$\frac{a}{a'} = \frac{(1+k)\sin P'}{\sin p'}.$$

En remplaçant P', p' et $1+k$ par leurs valeurs précédentes, on trouve

$$\frac{a}{a'} = 0{,}0025255\mathrm{i}.$$

C'est la valeur que nous avons adoptée, n° 135, pour le calcul des inégalités lunaires qui dépendent de la parallaxe du Soleil; mais il faut remarquer qu'une légère altération dans la valeur numérique de cette parallaxe changerait considérablement le rapport précédent.

140. Toute la théorie des mouvemens des corps célestes est fondée sur la supposition que le pouvoir attractif du Soleil est le même à distance égale sur tous les corps de la nature; l'accord qui existe entre les valeurs de la parallaxe solaire déduites de la théorie de la Lune et de l'observation directe, offre le moyen de démontrer que cette identité existe par rapport à la Terre et à la Lune, ou du moins que s'il y a une différence entre les intensités d'actions que le Soleil exerce sur ces deux astres, elle est tout-à-fait insensible.

En effet, en désignant par τ une très petite fraction qui dépend de cette cause, on verra que pour y avoir

égard, il suffit de changer m' en $m'(1+\tau)$ dans la seconde partie de la valeur de R (page 46, ligne 2); ce qui ajoute à l'expression de la fonction perturbatrice développée en série, le terme $\frac{-m'\tau r\mu}{r'^2}$.

Déterminons les termes qui en résulteront dans l'expression du coefficient de l'inégalité parallactique. En n'ayant égard qu'à cette inégalité, il suffira de supposer ici $r'^2 = a'^2$, $\mu = \cos(t - mt + \varepsilon - \varepsilon') = \cos\xi$; ce qui donne

$$R = -\frac{m'\tau a}{a'^2}\cos\xi;$$

et, par suite,

$$r\frac{dR}{dr} = a\frac{dR}{da} = R, \quad \int d'R = \frac{1}{1-m}R.$$

En substituant donc pour m' sa valeur $\frac{m^2 a'^3}{a^3}$, n° 8, et négligeant les termes de l'ordre m^3, on aura

$$r\frac{dR}{dr} = -\frac{m^2\tau a'}{a^2}\cos\xi,$$

$$\int d'R = -\frac{m^2\tau a'}{a^2}\cos\xi.$$

L'équation (2), n° 10, en supprimant les termes inutiles, donne, pour déterminer le rayon vecteur,

$$\frac{d^2.\delta\frac{1}{r}}{dt^2} + \delta\frac{1}{r} + 2\int d'R + r\frac{dR}{dr} = 0.$$

En substituant pour $\int d'R$ et $r\frac{dR}{dr}$ leurs valeurs, et intégrant ensuite, on trouve

$$\delta\frac{1}{r} = \frac{3}{2}\frac{m\tau a'}{a^2}\cos\xi.$$

Pour avoir le terme correspondant de l'expression de la longitude, il suffira de supposer

$$\frac{dv}{dt} = \frac{h^2}{r^2} = 2\delta\frac{a}{r};$$

d'où l'on conclura

$$\delta v = \frac{3m\tau a'}{a}\sin\xi.$$

Le terme que nous venons de considérer dans R augmente donc le coefficient de l'inégalité parallactique dans l'expression de la longitude de $\frac{3m\tau a'}{a}$ ou de $\frac{3m\tau\sin p'}{\sin P'}$, à très peu près. Nous avons représenté, n° 29, par $\frac{a}{a'}b_{10}$ ce coefficient, et, en nommant N sa valeur numérique, déduite des observations, nous avons fait $\frac{a}{a'}b_{10} = N$; en ayant égard à la différence d'action du Soleil sur la Terre et sur la Lune, on aura donc $\frac{a}{a'}b_{10} + \frac{3m\tau\sin p'}{\sin P'} = N$, ou bien $\frac{a}{a'}b_{10} = N\left(1 - \frac{3m\tau\sin p'}{N\sin P'}\right)$. Il suffira donc, pour avoir égard à la différence d'action du Soleil sur la Terre et sur la Lune, de changer N en $N\left(1 - \frac{3m\tau\sin p'}{N\sin P'}\right)$ dans l'équation (b), n° 139; on aura ainsi, aux quantités près de l'ordre τ^2, que nous négligerons,

$$\sin P' = \frac{N}{(1+k)\,b_{10}}\sin p' - \frac{3m\tau\sin p'}{N}.$$

En convertissant cette expression en nombres au moyen des valeurs de N, b_{10}, p', données précédemment, et en faisant $m = 0{,}0748013o$, on trouve

$$P' = 8'',63221 - 1293955''\tau.$$

En supposant donc τ égal seulement à un *millionième*, ou en faisant $\tau = 0{,}000001$, on aurait

$$P' = 8'',63221 - 1'',29396 = 7'',33825.$$

Cette valeur, qui diffère de plus d'une seconde de celle que donnent les observations des passages de Vénus, ne saurait être admise; et comme il est probable que la parallaxe solaire 8″,63221 que nous avons conclue des calculs précédens, ne diffère pas de *deux dixièmes* de seconde de sa véritable valeur, on peut affirmer que l'indéterminée τ est au-dessous de 15 *cent-millioniemes*, en sorte qu'on a $\tau < 0{,}00000015$; et comme τ exprime la différence d'intensité que nous avons supposée entre les pouvoirs attractifs du Soleil sur la matière de la Lune et sur celle de la Terre, on peut conclure de là que cette différence est tout-à-fait inappréciable. Cette vérification ingénieuse de la loi de la gravitation universelle a été indiquée, pour la première fois, par Laplace, qui a fait servir ainsi, comme il le dit lui-même, l'équation parallactique du mouvement lunaire à démontrer l'identité de l'action solaire sur la Terre et sur son satellite, comme on emploie les expériences du pendule à démontrer que la pesanteur agit également sur toutes les molécules de la matière à la surface du globe.

141. En convertissant en secondes les coefficiens de l'expression de la latitude, n° 134, après les avoir réduits en nombres au moyen des valeurs renfermées dans le tableau du n° 135, on a trouvé l'expression suivante.

Expression de la latitude en fonction des moyens mouvemens de la Lune et du Soleil.

$$\text{Latitude} = \left[\begin{array}{r} 18496'',460\,(1) - 36'',813\,(3) + 1'',996\,(4) + 0'',173\,(5) \\ - 0'',116\,(6) = 18461'',700 \end{array}\right] \sin \eta$$

$$+ \left[\begin{array}{l} 1012'',3250\,(2) - 7'',2689\,(4) - 3'',4274\,(5) \\ \qquad - 0'',7875\,(6) - 0'',1769\,(7) \\ \qquad = 1000'',6643 \end{array}\right] \sin (\varphi - \eta)$$

$$+ \left[\begin{array}{l} 1012'',3250\,(2) + 0'',0592\,(4) - 0'',6951\,(5) \\ \qquad - 0'',2170\,(6) - 0'',2741\,(7) \\ \qquad = 1011'',1980 \end{array}\right] \sin (\varphi + \eta)$$

$$+ \left[\begin{array}{r} - 8'',712\,(3) - 0'',244\,(4) + 2'',659\,(5) + 1'',276\,(6) \\ + 0'',80 \text{ ind.} = - 4'',221 \end{array}\right] \sin (\varphi' - \eta)$$

$$+ \left[\begin{array}{r} - 8'',712\,(3) - 1'',874\,(4) + 2'',817\,(5) + 1'',374\,(6) \\ + 0'',80 \text{ ind.} = - 5'',595 \end{array}\right] \sin (\varphi' + \eta)$$

$$+ [41'',554\,(3) - 8'',742\,(4) - 0'',704\,(5) = 32'',108] \sin (2\varphi - \eta)$$

$$+ [62'',331\,(3) + 0'',091\,(5) = 62'',422] \sin (2\varphi + \eta)$$

$$+ [2'',861\,(4) + 1'',320\,(5) + 0'',837\,(6) = 5'',018] \sin (\varphi - \varphi' - \eta)$$

$$+ [3'',815\,(4) + 1'',810\,(5) + 0'',688\,(6) = 6'',313] \sin (\varphi - \varphi' + \eta)$$

$$+ [- 2'',861\,(4) - 1'',462\,(5) - 0'',524\,(6) = - 4'',847] \sin (\varphi + \varphi' - \eta)$$

$$+ [- 3'',815\,(4) - 1'',204\,(5) - 0'',235\,(6) = - 5'',253] \sin (\varphi + \varphi' + \eta)$$

$$+ [- 0'',110\,(4) + 0'',005\,(5) = - 0'',105] \sin (2\varphi' - \eta)$$

$$+ [- 0'',110\,(4) - 0'',035\,(5) = - 0'',145] \sin (2\varphi' + \eta)$$

$$+ [2'',148\,(4) - 0'',479\,(5) = 1'',669] \sin (3\varphi - \eta)$$

$$+ 4'',043\,(4) \sin (3\varphi + \eta)$$

$$+ 0'',340\,(5) \sin (2\varphi - \varphi' - \eta) + 0'',440\,(5) \sin (2\varphi - \varphi' + \eta)$$

$$- 0'',218\,(5) \sin (2\varphi + \varphi' - \eta) - 0'',440\,(5) \sin (2\varphi + \varphi' + \eta)$$

$$+ 0'',036\,(5) \sin (\varphi - 2\varphi' - \eta) + 0'',048\,(5) \sin (\varphi - 2\varphi' + \eta)$$

$$- 0'',036\,(5) \sin (\varphi + 2\varphi' - \eta) - 0'',048\,(5) \sin (\varphi + 2\varphi' + \eta)$$

$$+ 0'',128\,(5) \sin (4\varphi - \eta)$$

$$+ 0'',270\,(5) \sin (4\varphi + \eta)$$

$$+ [- 6'',197\,(3) - 0'',2 \text{ ind.} = - 6'',397] \sin 3\eta$$

$$+ [4'',070\,(4) - 1'',285\,(5) = 2'',786] \sin (\varphi - 3\eta)$$

$$- 1'',018\,(4) \sin (\varphi + 3\eta)$$

$$+ 0'',009\,(5) \sin (\varphi' - 3\eta) + 0'',009\,(5) \sin (\varphi' + 3\eta)$$

$$+ 0'',006\,(5) \sin 5\eta$$

$$+ \left[\begin{array}{r} 518'',835\,(2) + 80'',853\,(3) + 20'',120\,(4) + 3'',072\,(5) \\ + 0'',689\,(6) = 623'',569 \end{array}\right] \sin (2\xi - \eta)$$

$$+ \left[\begin{array}{r} 71'',151\,(3) + 35'',992\,(4) + 7'',948\,(5) + 1'',821\,(6) \\ + 0'',6 \text{ ind.} = 117'',512 \end{array}\right] \sin (2\xi + \eta)$$

$$+ \left[\begin{array}{r} 113'',585\,(3) + 37'',171\,(4) + 12'',268\,(5) + 2'',855\,(6) \\ + 0'',5 \text{ ind.} = 166'',649 \end{array}\right] \sin (2\xi - \varphi - \eta)$$

$$+ \left[\begin{array}{r} 141'',981\,(3) + 42'',659\,(4) + 11'',486\,(5) + 2'',684\,(6) \\ = 198'',810 \end{array}\right] \sin (2\xi - \varphi + \eta)$$

$+[28'',396(3)+4'',071(4)+0'',908(5)+0'',069(6)=33'',445]\sin(2\xi+\varphi-\eta)$

$+[9'',912(4)+4'',187(5)+0'',876(6)=14'',975]\sin(2\xi+\varphi+\eta)$

$+[20'',328(3)+6'',924(4)+1'',988(5)+0'',410(6)=29'',650]\sin(2\xi-\varphi'-\eta)$

$+[4'',182(3)+2'',644(5)+0'',843(6)=7'',669]\sin(2\xi-\varphi'+\eta)$

$$+\left[\begin{matrix}-8'',712(3)-3'',123(4)-0'',453(5)+0'',704(6)\\ =-11'',584\end{matrix}\right]\sin(2\xi+\varphi'-\eta)$$

$+[-0'',597(4)-0'',666(5)-0'',163(6)=-1'',426]\sin(2\xi+\varphi'+\eta)$

$+[9'',519(4)+3'',944(5)+1'',558(6)=15'',021]\sin(2\xi-2\varphi-\eta)$

$+[-0'',971(4)-0'',942(5)+0'',063(6)=-1'',849]\sin(2\xi-2\varphi+\eta)$

$+[1'',748(4)+0'',367(5)+0'',044(6)=2'',159]\sin(2\xi+2\varphi-\eta)$

$+[1'',029(5)+0'',256(6)=1'',285]\sin(2\xi+2\varphi+\eta)$

$+[4'',450(4)+2'',033(5)+0'',827(6)+0'',5\,\text{ind.}=8'',311]\sin(2\xi-\varphi-\varphi'-\eta)$

$+[5'',563(4)+2'',515(5)+0'',797(6)=8'',875]\sin(2\xi-\varphi-\varphi'+\eta)$

$+[-1'',907(4)-0'',071(5)=-1'',978]\sin(2\xi-\varphi+\varphi'-\eta)$

$+[-2'',384(4)-0'',291(5)=-2'',675]\sin(2\xi-\varphi+\varphi'+\eta)$

$+[1'',113(4)+0'',452(5)=1'',564]\sin(2\xi+\varphi-\varphi'-\eta)$

$+0'',583(5)\sin(2\xi+\varphi-\varphi'+\eta)$

$+[-0'',477(4)-0'',262(5)=-0'',739]\sin(2\xi+\varphi+\varphi'-\eta)$

$-0'',083\sin(2\xi+\varphi+\varphi'+\eta)$

$+[0'',622(4)+0'',311(5)=0'',933]\sin(2\xi-2\varphi'-\eta)$

$+0'',171(5)\sin(2\xi-2\varphi'+\eta)$

$+[-0'',110(4)-0'',007(5)=-0'',117]\sin(2\xi+2\varphi'-\eta)$

$+0'',950(5)\sin(2\xi-3\varphi-\eta)+0'',213(5)\sin(2\xi-3\varphi+\eta)$

$+0'',113(5)\sin(2\xi+3\varphi-\eta)$

$+0'',287(5)\sin(2\xi-2\varphi-\varphi'-\eta)-0'',124(5)\sin(2\xi-2\varphi-\varphi'+\eta)$

$+0'',097(5)\sin(2\xi-2\varphi+\varphi'-\eta)+0'',282(5)\sin(2\xi-2\varphi+\varphi'+\eta)$

$+0'',069(5)\sin(2\xi+2\varphi-\varphi'-\eta)-0'',029(5)\sin(2\xi+2\varphi+\varphi'-\eta)$

$+0'',136(5)\sin(2\xi-\varphi-2\varphi'-\eta)-0'',024(5)\sin(2\xi-\varphi+2\varphi'-\eta)$

$-0'',030(5)\sin(2\xi-\varphi+2\varphi'+\eta)+0'',034(5)\sin(2\xi+\varphi-2\varphi'-\eta)$

$+[-3'',270(4)-0'',838(5)-0'',021(6)=-4'',129]\sin(\xi-\eta)$

$+[-3'',270(4)-1'',353(5)-0'',441(6)=-5'',064]\sin(\xi+\eta)$

$-0'',206(6)\sin(\xi-\varphi-\eta)-0'',206(5)\sin(\xi-\varphi+\eta)$

$-0'',510(5)\sin(\xi+\varphi-\eta)-0'',403(5)\sin(\xi+\varphi+\eta)$

$+0'',055(5)\sin(\xi-\varphi'-\eta)+0'',055(5)\sin(\xi-\varphi'+\eta)$

$+[0'',979(4)-0'',329(5)=0'',648]\sin(\xi+\varphi'-\eta)$

$+[0'',979(4)-0'',329(5)=0'',648]\sin(\xi+\varphi'+\eta)$

$-0'',194\sin(3\xi-\eta)+0'',061\sin(3\xi+\eta)$

$-0'',233\sin(3\xi-\varphi-\eta)+0'',089\sin(3\xi+\varphi'-\eta)$

$+[1'',996(4)+1'',178(5)+0'',379(6)=3'',553]\sin(4\xi-\eta)$

$+0'',364(5)\sin(4\xi+\eta)$

$+[3'',943(4)+1'',768(5)+0'',85\,\text{ind.}=6'',561]\sin(4\xi-\varphi-\eta)$

$+[1'',390(5)+0'',95\,\text{ind.}=2'',340]\sin(4\xi-\varphi+\eta)$

$+0'',278(5)\sin(4\xi+\varphi-\eta)$

$+0'',196(5)\sin(4\xi-\varphi'-\eta)-0'',050(5)\sin(4\xi+\varphi'-\eta)$

$+0'',354(5)\sin(4\xi-2\varphi-\eta)+1'',226(5)\sin(4\xi-2\varphi+\eta)$

$+0'',312(5)\sin(4\xi-\varphi-\varphi'-\eta)-0'',134(5)\sin(4\xi-\varphi+\varphi'-\eta)$
$+[2'',6141(4)-0'',2961(5)=2'',318]\sin(2\xi-3\eta)$
$+0'',2379(5)\sin(2\xi+3\eta)$
$+0'',152(5)\sin(2\xi-\varphi-3\eta)-0'',257(5)\sin(2\xi+\varphi-3\eta)$
$+0'',102(5)\sin(2\xi-\varphi'-3\eta)-0'',044(5)\sin(2\xi+\varphi'-3\eta)$
$+0'',117(5)\sin(4\xi-3\eta)-7'',867\sin ft.$

Telle est la formule qui servira à déterminer la *latitude* de la Lune par rapport à l'écliptique vraie; en la réunissant aux expressions de la *longitude vraie* et de la *parallaxe*, on aura tout ce qui est nécessaire pour calculer à un instant donné le lieu de la Lune et pour la formation des Tables. Ainsi se trouve accompli l'engagement que nous avions pris au commencement de ce livre, d'obtenir, par une méthode directe, les expressions des coordonnées qui déterminent la position de la Lune avec toute la précision que les observations comportent. Sans doute ce n'est point sans des développemens très étendus que nous sommes parvenu à atteindre ce résultat; mais la nature même du sujet ne permettait guère d'espérer qu'on les pût éviter, et notre méthode, comme nous l'avions annoncé, joint à l'avantage de conduire directement à la solution de la question qu'on se propose dans le problème des perturbations lunaires, celui de se prêter à une vérification facile, et de n'être enfin qu'une application nouvelle de la méthode générale que nous avions suivie dans la théorie des perturbations planétaires.

CHAPITRE VIII.

Comparaison de la théorie précédente avec les observations.

142. Considérons d'abord les inégalités séculaires du mouvement lunaire.

Nous avons vu que l'expression de la longitude moyenne contenait une inégalité de ce genre, que nous avons trouvée égale à

$$10'',631166\,i^2 + 0'',016019\,i^3,$$

en désignant par i le nombre de siècles écoulés depuis l'instant que l'on a pris pour époque, et que nous avons fixé au commencement de 1801. L'inégalité précédente a été indiquée aux astronomes par les observations, long-temps avant que la théorie ne fût parvenue à en assigner la véritable cause. On savait, en effet, par la comparaison d'un grand nombre d'éclipses observées par les Chaldéens, les Grecs et les Arabes, que le moyen mouvement de la Lune paraissait s'être accéléré depuis les temps anciens jusqu'à nos jours; c'est ce que Bouvard a depuis confirmé dans un beau travail couronné par l'Académie des Sciences en 1800 : il a soumis à une nouvelle discussion les observations des anciennes éclipses déjà connues et celles qu'il a extraites d'un manuscrit

arabe d'Ibn Junis; et, après avoir reconnu comme un fait hors de doute l'accélération du moyen mouvement de la Lune, il a trouvé cette accélération à très peu près égale à celle que lui assigne la formule précédente.

Le mouvement du périgée est assujetti à une inégalité séculaire que nous avons trouvée égale à

$$-40'',611456i^2 - 0'',061195i^3.$$

C'est à la théorie qu'on doit la connaissance de cette équation, en vertu de laquelle le mouvement du périgée semble se ralentir de siècle en siècle, tandis que le moyen mouvement s'accélère; ce résultat a été ensuite confirmé par la discussion des observations anciennes et modernes, et il a été mis hors de doute par les recherches auxquelles s'est livré Bouvard dans le Mémoire que nous avons cité.

Le mouvement des nœuds est également soumis à une inégalité séculaire, mais beaucoup moins considérable que l'inégalité du périgée et de signe contraire à celle-ci; elle est, n° 135, égale à

$$6'',731001\,i^2 + 0'',0101425\,i^3.$$

Cette équation, découverte d'abord par la théorie, a été encore vérifiée par la discussion des anciennes éclipses.

La comparaison des résultats que nous avons obtenus relativement aux trois équations séculaires du mouvement lunaire, à ceux qui ont été donnés par MM. Plana et Damoiseau, leur servira de vérification. Le tableau suivant présente les coefficiens numériques par lesquels on doit multiplier l'intégrale

$\int(e'^2 - E'^2)dt$, n° 135, pour avoir les équations séculaires.

	DAMOISEAU.	PLANA.	THÉORIE ACTUELLE.
Équation séculaire de la longitude moyenne......	0,00882648	0,008343502	0,008343502
Équation séculaire du périgée.....	—0,03226754	—0,03187250	—0,03195029
Équation séculaire du nœud.......	0,00540225	0,005389996	0,005282594

Les légères différences qu'on remarque entre ces résultats, doivent tenir uniquement à la nature des méthodes qu'on a employées pour les obtenir (*).

Nous avons vu, n° 135, que les quantités qui règlent

(*) Dans un Rapport sur deux Mémoires relatifs à la théorie de la Lune, couronnés par l'Académie des Sciences en 1820, Laplace ayant comparé, comme nous le faisons ici, les résultats des deux pièces par rapport aux équations séculaires du *moyen mouvement*, du *périgée* et des *nœuds*, s'exprime ainsi (*Connaissance des Temps* pour 1823) : « Quant à l'inégalité séculaire du » périgée, la différence me paraît tenir à la nature des approxi- » mations dont les auteurs de ces pièces ont fait usage. L'auteur » de la première a suivi la marche que j'ai adoptée dans la *Mé-* » *canique céleste*; seulement, il a porté plus loin les approxi- » mations. Les auteurs de la seconde pièce ont réduit leurs ex- » pressions en séries ordonnées par rapport aux puissances » ascendantes du rapport du mouvement du Soleil à celui de la » Lune, rapport moindre qu'un douzième. L'analyse ne présente » point ces expressions sous cette forme ; elle conduit à des équa- » tions dans lesquelles les quantités cherchées sont entremêlées

le mouvement moyen du périgée et des nœuds de l'orbe lunaire sur l'écliptique vraie, conclues de la théorie et comparées aux résultats fournis par l'observation, s'accordaient identiquement relativement aux nœuds et ne différaient que de la *millionième* partie relativement au déplacement du périgée. Cette admirable concordance, que Laplace lui-même ne croyait pas possible d'obtenir, doit être regardée comme l'une des

---

» et affectées de divers diviseurs. Pour les réduire à la forme de » séries, il faut éliminer ces quantités et réduire ensuite en séries » les diviseurs des divers termes de leurs expressions. On con- » çoit que cela doit conduire à des séries peu convergentes, et » qu'il faut beaucoup prolonger pour obtenir le même degré de » précision que donne la méthode employée dans la *Mécanique* » *céleste*. Cependant cette cause d'erreur, qui me semble avoir » influé sur la valeur de l'inégalité séculaire du périgée donnée » dans la seconde pièce, ne produit aucun effet sensible sur les » inégalités périodiques. » Or, l'inégalité séculaire du périgée, suivant la deuxième pièce citée par Laplace, était — 0,0311110, tandis que la première pièce la faisait égale à — 0,0229890; M. Damoiseau, auteur de ce dernier Mémoire, a depuis considérablement modifié cette valeur, et, en la portant à — 0,0326754, il s'est beaucoup rapproché de celle que donnent les formules ordinaires du développement en séries : l'objection de Laplace contre cette méthode, fondée sur le désaccord qui paraissait exister entre les résultats des deux Mémoires relativement à la variation séculaire du périgée, tombe donc d'elle-même, et l'on doit reconnaître que dans la théorie lunaire, comme dans la théorie des planètes, le développement en séries offre, pour la solution du problème, non-seulement la méthode la plus analytique et la plus simple, mais encore la plus susceptible de précision lorsqu'on a soin de porter les approximations aussi loin qu'il est nécessaire, et de vérifier avec attention les calculs compliqués qui en résultent.

preuves les plus irréfragables de la grande loi de la *gravitation universelle,* et la légère différence qui existe encore relativement au déplacement du périgée, tient sans doute uniquement à la grandeur de ce dernier mouvement, qui exige que les approximations soient poussées plus loin que nous ne l'avons fait jusqu'ici.

143. Considérons maintenant les inégalités périodiques du mouvement lunaire en longitude. Pour comparer les résultats de la théorie à ceux de l'observation, nous prendrons pour base les Tables de Burckhardt, qui sont les plus récentes que nous ayons, et qu'on doit supposer, par conséquent, les plus exactes; nous regarderons les coefficiens des diverses inégalités déduites des Tables, comme des résultats déduits de l'observation directe, et, en les rapprochant de ceux que nous avons obtenus par la théorie, il nous sera facile de reconnaître quels sont ceux des coefficiens des différentes inégalités lunaires sur l'exactitude desquels on peut compter, et quels sont ceux sur la valeur desquels les observations peuvent laisser des doutes.

Les Tables de Burckhardt ont été établies sur plus de 4000 observations, faites dans les deux derniers siècles par Halley, Bradley, Maskeline, etc.; elles sont disposées d'une manière particulière qui, en diminuant le nombre des argumens, facilite beaucoup les calculs astronomiques; mais cela oblige à leur faire subir une transformation préliminaire pour ramener les expressions de la *longitude* et de la *latitude* à la forme que nous avons adoptée dans la théorie précédente.

En désignant par

a l'anomalie du Soleil,
A l'anomalie de la Lune,
D la longitude de la Lune moins celle du Soleil,
δ la longitude de la Lune plus le supplément du nœud,

les équations fondamentales de la longitude exprimée en série de *sinus* d'angles croissant proportionnellement au temps *t*, d'après les Tables de Burckhardt, seraient :

Équat.		Équat.	
1	$-659'',3 \sin a - 7'',1 \sin 2a$	16	$+ 13'',7 \sin(D+a)$
2	$+147'',3 \sin(2D-a)$	17	$- 6'',6 \sin(2\delta-2D+A)$
3	$- 57'',7 \sin(2D+A)$	18	$+ 6'',7 \sin(2D-A-2a)$
4	$+190'',3 \sin(2D-A-a)$	19	$- 4'',6 \sin(2A-2D-a)$
5	$+109'',4 \sin(A-a)$	20	$+ 7'',4 \sin 2(\delta-A)$
6	$- 83'',8 \sin(2\delta-A)$	21	$+ 2'',8 \sin(2A-2D+a)$
7	$- 59'',2 \sin(2\delta-2D)$	22	$- 1'',8 \sin(2\delta-2D+a)$
8	$- 70'',6 \sin(A+a)$	23	$+ 2'',1 \sin(2D+A-a)$
	$- 0'',3 \sin 2(A+a)$	24	$+ 1'',1 \sin(4D-3A)$
9	$+ 23'',5 \sin(A-D)$	25	$+ 0'',9 \sin(3A-2D)$
	$+ 57'',9 \sin 2(A-D)$	26	$- 0'',9 \sin(2D-A+2a)$
10	$- 2'',3 \sin(A+D)$	27	$+ 0'',8 \sin(2A-a)$
	$- 4'',3 \sin 2(A+D)$	28	$- 0'',7 \sin(A+2a)$
11	$+ 2'',3 \sin(D-a)$	29	$+ 0'',7 \sin(A-2a)$
	$+ 7'',3 \sin 2(D-a)$	30	$- 1'',1 \sin($♀ $-$ ♂$)$
12	$- 17'',7 \sin(2D+a)$		$+ 0'',4 \sin 2($♀ $-$ ♂$)$
13	$- 18'',4 \sin(2D-A+a)$	31	$+ 0'',8 \sin($♂ $-$ ♃$)$
14	$- 12'',2 \sin(4D-A)$		$- 0'',2 \sin 2($♂ $-$ ♃$)$
15	$- 10'',0 \sin(2D-2\delta+A)$	32	$- 7'',0 \sin$ suppl. ☊

Les argumens suivans se corrigent en y ajoutant la somme des équations précédentes :

Évection... $+4825'',5 \sin(2D-A) + 35'',5 \sin(4D-2A)$

Anomalie.. $\left\{ \begin{array}{l} 22692'',4 \sin A + 777'',1 \sin 2A \\ \quad + 37'',2 \sin 3A + 1'',8 \sin 4A \end{array} \right.$

Variation.. $\left\{ \begin{array}{l} -122'',7 \sin D + 2138'',6 \sin 2D \\ + 2'',9 \sin 3D + 9'',1 \sin 4D \end{array} \right.$

Réduction.. $-412'',2 \sin 2\delta.$

Il faut ajouter ensuite la somme de toutes ces équations à la longitude moyenne, pour avoir la longitude vraie.

En désignant donc par S la somme de tous les termes renfermés dans le premier tableau, par E l'évection, par A l'anomalie, par V la variation, et par R la réduction à l'écliptique, en donnant à ces mots *évection, anomalie, variation, réduction,* la même signification que Burckhardt leur attribue, on aura, suivant la notation que nous avons adoptée :

$$
\begin{aligned}
S = & -659'',3 \sin \varphi' - 7'',1 \sin 2\varphi' \\
& + 109'',4 \sin (\varphi - \varphi') - 70'',6 \sin (\varphi + \varphi') \\
& + 0'',8 \sin (2\varphi - \varphi') + 0'',7 \sin (\varphi - 2\varphi') \\
& - 0'',7 \sin (\varphi + 2\varphi') - 0'',3 \sin (2\varphi + 2\varphi') \\
& + 83'',8 \sin (\varphi - 2\eta) - 7'',4 \sin (2\varphi - 2\eta) \\
& - 57'',7 \sin (2\xi + \varphi) + 147'',3 \sin (2\xi - \varphi') \\
& - 17'',7 \sin (2\xi + \varphi') \\
& - 57'',9 \sin (2\xi - 2\varphi) - 4'',3 \sin (2\xi + 2\varphi) \\
& + 190'',3 \sin (2\xi - \varphi - \varphi') - 18'',4 \sin (2\xi - \varphi + \varphi') \\
& + 2'',1 \sin (2\xi + \varphi - \varphi') \\
& + 7'',3 \sin (2\xi - 2\varphi') - 0'',9 \sin (2\xi - 3\varphi) \\
& - 2'',8 \sin (2\xi - 2\varphi - \varphi') + 4'',6 \sin (2\xi - 2\varphi + \varphi') \\
& + 6'',7 \sin (2\xi - \varphi - 2\varphi') - 0'',9 \sin (2\xi - \varphi + 2\varphi') \\
& + 6'',6 \sin (2\xi - \varphi - 2\eta) - 10'',0 \sin (2\xi + \varphi - 2\eta) \\
& + 59'',2 \sin (2\xi - 2\eta) + 1'',8 \sin (2\xi - \varphi' - 2\eta) \\
& - 23'',5 \sin (\xi - \varphi) - 2'',3 \sin (\xi + \varphi) \\
& + 2'',3 \sin (\xi - \varphi') - 13'',7 \sin (\xi + \varphi') \\
& - 12'',2 \sin (4\xi - \varphi) + 1'',1 \sin (4\xi - 3\varphi), \\
E = & \; 4825'',5 \sin (2\xi - \varphi + S) + 35'',5 \sin (4\xi - 2\varphi + 2S), \\
A = & \; 22692'',4 \sin (\varphi + S + E) + 777'',1 \sin (2\varphi + 2S + 2E) \\
& + 37'',2 \sin (3\varphi + 3S + 3E) + 1'',8 \sin (4\varphi + 4S + 4E), \\
V = & -122'',7 \sin (\xi + S + E + A) + 2138'',6 \sin (2\xi + 2S + 2E + 2A) \\
& + 2'',9 \sin (3\xi + 3S + 3E + 3A) + 9'',1 \sin (4\xi + 4S + 4E + 4A), \\
R = & -412'',2 \sin [2g(nt + S + E + A + V)].
\end{aligned}
$$

En désignant par v la longitude vraie rapportée à l'écliptique, on a, d'ailleurs, comme nous l'avons dit plus haut,

$$v = t + \epsilon + S + E + A + V + R \qquad (o)$$

Cela posé, en développant les valeurs des quantités représentées par S, E, A, V, R, et en les substituant dans l'équation précédente, on a trouvé, pour les inégalités périodiques de la longitude vraie développée en fonction de la longitude moyenne, l'expression suivante :

$$
\begin{aligned}
V = {} & t + \varepsilon \\
& + \left(\begin{matrix} 0'',7 + 22692'',4 - 0'',1 - 3'',1 - 0'',6 + 0'',3 - 0'',2 - 0'',6 \\ - 50'',0 + 0'',2 + 0'',9 - 0'',2 = 22639'',7 \end{matrix}\right) \sin \varphi \\
& + (-0'',7 + 777'',1 - 0'',4 - 5'',5 + 0'',6 - 0'',1 - 2'',7 = 768'',3) \sin 2\varphi \\
& + (-0'',1 + 37'',2 - 0'',3 - 0'',2 - 0'',1 - 0'',3 = 36'',2) \sin 3\varphi + 1'',8 \sin 4\varphi \\
& + \left(\begin{matrix} -659'',3 - 2'',2 - 0'',2 - 3'',9 - 6'',0 - 0'',1 + 0'',2 - 1'',5 \\ - 0'',2 - 0'',1 = -673'',3 \end{matrix}\right) \sin \varphi' \\
& + (-7'',1 - 0'',1 - 0'',1 = -7'',3) \sin 2\varphi' \\
& + \left(\begin{matrix} 109'',4 + 1'',7 - 0'',1 - 0'',1 + 36'',3 + 0'',1 + 0'',2 - 0'',2 \\ - 0'',2 + 0'',2 + 0'',1 + 0'',1 = 147'',5 \end{matrix}\right) \sin (\varphi - \varphi') \\
& + \left(\begin{matrix} -70'',6 - 0'',2 - 0'',1 - 36'',3 - 0'',1 - 0'',4 + 0'',2 \\ - 0'',2 - 2'',0 - 0'',1 - 0'',1 = -109'',9 \end{matrix}\right) \sin (\varphi + \varphi') \\
& + (0'',8 + 6'',0 + 0'',1 + 2'',5 - 0'',2 - 0'',1 = 9'',1) \sin (2\varphi - \varphi') \\
& + (-3'',9 - 2'',5 - 0'',1 = -6'',5) \sin (2\varphi + \varphi') \\
& + (0'',7 + 0'',1 + 0'',4 = 1'',2) \sin (\varphi - 2\varphi') \\
& + (-0'',7 - 0'',1 - 0'',4 = -1'',2) \sin (\varphi + 2\varphi') \\
& + 0'',4 \sin (3\varphi - \varphi') - 0'',2 \sin (3\varphi + \varphi') \\
& + (-0'',1 - 4'',6 - 0'',6 - 412'',2 + 0'',2 + 5'',0 = -412'',3) \sin 2\eta \\
& + \left(\begin{matrix} 83'',8 + 0'',7 - 0'',4 - 0'',1 - 0'',1 - 0'',3 - 45'',2 \\ + 0'',3 = 38'',7 \end{matrix}\right) \sin (\varphi - 2\eta) \\
& + (-0'',3 - 0'',1 - 0'',1 - 45'',2 + 0'',3 + 0'',3 = -45'',1) \sin (\varphi + 2\eta) \\
& + 1'',3 \sin (\varphi' - 2\eta) + 1'',3 \sin (\varphi' + 2\eta) \\
& + (-7'',4 - 0'',1 + 4'',6 + 2'',5 - 1'',5 = -1'',9) \sin (2\varphi - 2\eta) \\
& + (-2'',5 - 1'',5 = -4'',0) \sin (2\varphi + 2\eta) \\
& - 0'',3 \sin (\varphi - \varphi' - 2\eta) - 0'',3 \sin (\varphi - \varphi' + 2\eta) \\
& + (0'',2 + 0'',1 - 0'',1 = 0'',2) \sin (\varphi + \varphi' - 2\eta) \\
& + (0'',2 + 0'',1 - 0'',1 = 0'',2) \sin (\varphi + \varphi' + 2\eta) \\
& - 0'',2 \sin (\varphi - 4\eta) \\
& + \left(\begin{matrix} -0'',1 - 3'',2 + 265'',4 - 0'',2 + 2138'',6 - 1'',2 - 25'',8 \\ - 0'',1 = 2373'',4 \end{matrix}\right) \sin 2\xi \\
& + \left(\begin{matrix} 4825'',5 - 3'',2 - 0'',2 - 0'',9 - 0'',3 - 0'',1 - 235'',2 \\ + 1'',4 = 4587'',0 \end{matrix}\right) \sin (2\xi - \varphi) \\
& + \left(\begin{matrix} -57'',7 - 0'',2 + 18'',2 - 0'',9 - 0'',2 + 235'',2 - 0'',4 \\ - 1'',4 = 192'',6 \end{matrix}\right) \sin (2\xi + \varphi)
\end{aligned}
$$

$$+\left(\begin{array}{c}147'',3+1'',2+0'',4+10'',5+0'',1+0'',4+6'',8+0'',1\\ =166'',8\end{array}\right)\sin(2\xi-\varphi')$$

$$+\left(\begin{array}{c}-17'',7-0'',8-0'',4-1'',0-0'',4-0'',1-6'',8\\ -0'',1=-27'',3\end{array}\right)\sin(2\xi+\varphi')$$

$$+(-57'',9+265'',4-0'',6+12'',9+0'',4-8'',0=212'',2)\sin(2\xi-2\varphi)$$

$$+(-4'',3-3'',2+1'',2+12'',9+8'',0=14'',7)\sin(2\xi+2\varphi)$$

$$+\left(\begin{array}{c}190'',3+7'',7+8'',2-0'',2-0'',8+0'',7+0'',4\\ =206'',3\end{array}\right)\sin(2\xi-\varphi-\varphi')$$

$$+\left(\begin{array}{c}-18'',4-7'',7-1'',0+0'',2+0'',8-1'',1-0'',4\\ =-27'',6\end{array}\right)\sin(2\xi-\varphi+\varphi')$$

$$+\left(\begin{array}{c}2'',1+0'',1+8'',2+0'',7+0'',1+0'',8+1'',1\\ +0'',4=13'',5\end{array}\right)\sin(2\xi+\varphi-\varphi')$$

$$+(-1'',0-0'',8-0'',7-0'',4=-2'',9)\sin(2\xi+\varphi+\varphi')$$

$$+(7'',3+0'',4+0'',1=7'',8)\sin(2\xi-2\varphi')$$

$$-0'',1\sin(2\xi+2\varphi')$$

$$+(-0'',9-3'',2+18'',2-0'',1+0'',9-0'',4-0'',5=14'',0)\sin(2\xi-3\varphi)$$

$$+(-0'',2-0'',2+0'',9+0'',4+0'',5=1'',4)\sin(2\xi+3\varphi)$$

$$+(-2'',8+0'',8-0'',4+10'',5+0'',4+0'',5+0'',1=9'',1)\sin(2\xi-2\varphi-\varphi')$$

$$+(4'',6-1'',2+0'',4-0'',4-1'',0+0'',1-0'',1=2'',4)\sin(2\xi-2\varphi+\varphi')$$

$$+(0'',1+0'',5+0'',1+0'',1=0'',8)\sin(2\xi+2\varphi-\varphi')$$

$$+(6'',7+0'',1+0'',4=7'',2)\sin(2\xi-\varphi-2\varphi')$$

$$+(-0'',9-0'',1=-1'',0)\sin(2\xi-\varphi+2\varphi')$$

$$+0'',4\sin(2\xi+\varphi-2\varphi')$$

$$+(-0'',2+1'',3=1'',1)\sin(2\xi-4\varphi)$$

$$+(-0'',2+0'',7=0'',5)\sin(2\xi-3\varphi-\varphi')$$

$$+0'',2\sin(2\xi-3\varphi+\varphi')$$

$$+0'',4\sin(2\xi-2\varphi-2\varphi')$$

$$+(59'',2+1'',0+0'',4-0'',5-0'',1+1'',0-4'',7=56'',3)\sin(2\xi-2\eta)$$

$$+(-0'',1-1'',0-4'',7=-5'',8)\sin(2\xi+2\eta)$$

$$+(6'',6+3'',3-0'',5-9'',2+0'',1=0'',3)\sin(2\xi-\varphi-2\eta)$$

$$+(-0'',9+0'',5-9'',2+0'',1=-9'',5)\sin(2\xi-\varphi+2\eta)$$

$$+(-10'',0+0'',1+3'',3+0'',9+0'',5-0'',4=-5'',6)\sin(2\xi+\varphi-2\eta)$$

$$+(-0'',5-0'',4=-0'',9)\sin(2\xi+\varphi+2\eta)$$

$$+(1'',8-0'',3=1'',5)\sin(2\xi-\varphi'-2\eta)$$

$$-0'',3\sin(2\xi-\varphi'+2\eta)$$

$$+(0'',4+0'',2-1'',0-0'',4=-0'',8)\sin(2\xi-2\varphi-2\eta)$$

$$+(-1'',0+0'',1-0'',1+1'',0-0'',4=-0'',4)\sin(2\xi-2\varphi+2\eta)$$

$$+(-0'',5+0'',2+0'',1+0'',1=-0'',1)\sin(2\xi+2\varphi-2\eta)$$

$$+(0'',1-0'',4=-0'',3)\sin(2\xi-\varphi-\varphi'-2\eta)$$

$$-0'',4\sin(2\xi-\varphi-\varphi'+2\eta)$$

$$+(0'',2-1'',3-0'',1-122'',7+0'',4+0'',1-0'',1=-123'',5)\sin\xi$$

$$+(-23'',5-1'',4+6'',7=-18'',2)\sin(\xi-\varphi)$$

$$+(-2'',3-6'',7+0'',2=-8'',8)\sin(\xi+\varphi)$$

$$+(2'',3-0'',2-0'',1=2'',0)\sin(\xi-\varphi')$$

$$+(13'',7+0'',2=13'',9)\sin(\xi+\varphi')$$

$$+(-1'',3-0'',2-0'',1-0'',1=-1'',7)\sin(\xi-2\varphi)$$
$$+(-0'',1-0'',2=-0'',3)\sin(\xi+2\varphi)$$
$$+(-0'',2+0'',1-0'',1=-0'',2)\sin(\xi-\varphi-\varphi')$$
$$+0'',7\sin(\xi-\varphi+\varphi')+0'',1\sin(\xi+\varphi-\varphi')$$
$$+0'',7\sin(\xi+\varphi+\varphi')$$
$$+(2'',9-0'',1-0'',1=2'',7)\sin 3\xi$$
$$+(-1'',4-0'',2-0'',5=-2'',1)\sin(3\xi-\varphi)$$
$$+(0'',1+0'',5=0'',6)\sin(3\xi+\varphi)+0'',1\sin(3+\varphi')$$
$$+(-0'',2+0'',1-0'',1=-0'',2)\sin(3\xi-2\varphi)-0'',1\sin(3\xi-\varphi-\varphi')$$
$$+0'',2\sin(3\xi-\varphi+\varphi')$$
$$+(-0'',7-0'',7+0'',2+5'',5+2'',7+9'',1=16'',1)\sin 4\xi$$
$$+\left(\begin{array}{c}-12'',2+1'',5+1'',9-0'',3+0'',3+50'',0-2'',0\\ -0'',6=38'',6\end{array}\right)\sin(4\xi-\varphi)$$
$$+(-0'',1+0'',3+0'',2-0'',6+0'',2+2'',0+0'',3=2'',3)\sin(4\xi+\varphi)$$
$$+(0'',1+0'',2+1'',5+0'',1+0'',1=2'',0)\sin(4\xi-\varphi')$$
$$-0'',2\sin(4\xi+\varphi')$$
$$+(35'',5-0'',7-5'',5-0'',6+2'',7=31'',4)\sin(4\xi-2\varphi)$$
$$-0'',1\sin(4\xi+2\varphi)$$
$$+\left(\begin{array}{c}1'',7+0'',1+0'',1+0'',2-0'',2+2'',0+0'',1\\ +0'',1=4'',1\end{array}\right)\sin(4\xi-\varphi-\varphi')$$
$$+(-0'',2-0'',2-0'',2-0'',1=-0'',7)\sin(4\xi-\varphi+\varphi')$$
$$+\left(\begin{array}{c}1'',1-0'',7-1'',5+1'',9-0'',3-0'',2+0'',1+0'',3\\ =0'',7\end{array}\right)\sin(4\xi-3\varphi)$$
$$+(2'',2+0'',1+0'',1-0'',2+0'',1=2'',3)\sin(4\xi-2\varphi-\varphi')$$
$$+(-0'',2-0'',1+0'',1=-0'',2)\sin(4\xi-2\varphi+\varphi')$$
$$+(0'',1+0'',1=0'',2)\sin(4\xi-\varphi-2\varphi')$$
$$+(0'',6-0'',1=0'',5)\sin(4\xi-2\eta)$$
$$+(0'',7+0'',1-0'',1-0'',1=0'',6)\sin(4\xi-\varphi-2\eta)$$
$$-0'',1\sin(4\xi+\varphi-2\eta)$$
$$-0'',1\sin(2\xi-4\varphi)$$
$$+(-0'',1-0'',1+0'',4=0'',2)\sin(6\xi-\varphi)$$
$$+(0'',6+0'',4=1'',0)\sin(6\xi-2\varphi)+0'',1\sin(6\xi-3\varphi).$$

144. Le tableau suivant offre la comparaison des résultats précédens à ceux que MM. Damoiseau, Plana et moi, nous avons obtenus par la théorie.

Comparaison des valeurs numériques des coefficiens des principales inégalités périodiques de la longitude vraie de la Lune, d'après la théorie et l'observation.

ARGUMENT.	DAMOISEAU.	PLANA.	THÉORIE actuelle.	BURCKHARDT.	DIFFÉRENCES entre la théorie et l'observat.
φ	22639″,70	22641″,626	22639″,700 (*)	22639″,7	0″,000
2φ	768,72	769,477	769,533	768,3	1,233
3φ	36,94	36,720	36,719	36,2	0,519
4φ	1,99	2,003	1,986	1,8	0,186
φ'	— 673,70	—668,644	— 668,932	— 673,3 (b)	— 4,368
$2\varphi'$	— 7,34	— 7,872	— 7,851	— 7,3	— 0,551
$\varphi-\varphi'$	147,74	148,059 (a)	147,691	147,5	0,191
$\varphi+\varphi'$	— 109,27	—111,099 (a)	— 109,886	— 109,9	0,014
$2\varphi-\varphi'$	9,74	9 ,44	9,651	9,1	0,551
$2\varphi+\varphi'$	— 7,67	— 7,344	— 7,347	— 6,5	— 0,847
$\varphi-2\varphi'$	2,52	2,131	2,343	1,2 (b)	1,143
$\varphi+2\varphi'$	— 1,14	— 1,172	— 1,167	— 1,2	0,033
$3\varphi-\varphi'$	0,57	0,365	0,362	0,4	— 0,038
$3\varphi+\varphi'$	— 0,39	— 0,365	— 0,362	— 0,2	— 0,162
2η	— 411,67	—411,041	— 411,624	— 412,3	0,676
$\varphi-2\eta$	39,51	37,191 (a)	39,427	38,7	0,727
$\varphi+2\eta$	— 45,12	— 45,201	— 45,105	— 45,1	— 0,005
$\varphi'-2\eta$	0,04	0,130	0,130	1,3 (b)	— 1,170
$\varphi'+2\eta$	0,37	0,585	0,636	1,3 (b)	— 0,664
$2\varphi-2\eta$	— 1,30	— 1,079	— 1,405	— 1,9	0,495

(*) Ce coefficient est une des arbitraires de la théorie; nous avons cru devoir adopter le résultat de Burckhardt.

(a) Nous avons marqué d'un (a) les résultats de M. Plana que nous avons reconnus fautifs par la révision de ses formules.

(b) La lettre (b) indique les résultats dérivés des Tables de Burckhardt, qui ont évidemment besoin de correction.

ARGUMENT.	DAMOISEAU.	PLANA.	THÉORIE actuelle.	BURCKHARDT.	DIFFÉRENCES entre la théorie et l'observat.
$2\varphi+2\eta$	$-3'',97$	$-4'',089$	$-4'',037$	$-4'',0$	$-0'',037$
$\varphi-\varphi'-2\eta$	»	0,162	0,160	$-0,3$	0,460
$\varphi-\varphi'+2\eta$	»	$-0,195$	$-0,192$	$-0,3$	0,108
$\varphi+\varphi'-2\eta$	»	$-0,162$	$-0,160$	0,2	0,040
$\varphi+\varphi'+2\eta$	»	0,195	0,192	0,2	$-0,008$
$\varphi-4\eta$	»	$-0,140$	$-0,137$	$-0,2$	0,063
2ξ	2370,00	2370,320	2370,799	2373,4 (b)	$-2,601$
$2\xi-\varphi$	4589,61	4585,648	4586,999	4587,0	$-0,001$
$2\xi+\varphi$	192,22	192,146	192,142	192,6	$-0,458$
$2\xi-\varphi'$	165,56	165,850	165,437	166,8 (b)	$-1,363$
$2\xi+\varphi'$	$-24,82$	$-23,611$ (a)	$-25,036$	$-27,3$ (b)	2,264
$2\xi-2\varphi$	211,57	212,363	211,787	212,2	$-0,413$
$2\xi+2\varphi$	14,74	14,119	14,109	14,7	$-0,591$
$2\xi-\varphi-\varphi'$	207,09	209,742 (a)	206,919	206,3	0,619
$2\xi-\varphi+\varphi'$	$-28,67$	$-28,811$	$-28,511$	$-27,6$	$-0,911$
$2\xi+\varphi-\varphi'$	14,69	14,044	14,000	13,5	0,500
$2\xi+\varphi+\varphi'$	$-3,03$	$-2,884$	$-2,876$	$-2,9$	0,024
$2\xi-2\varphi'$	7,92	7,813	7,790	7,8	$-0,010$
$2\xi+2\varphi'$	$-0,33$	$-0,065$	$-0,065$	$-0,1$	0,035
$2\xi-3\varphi$	12,81	12,807 *	12,899	14,0 (b)	1,101
$2\xi+3\varphi$	1,27	3,309 (a)	0,902	1,4	0,498
$2\xi-2\varphi-\varphi'$	8,99	7,762 (a)	9,161	9,1	0,061
$2\xi-2\varphi+\varphi'$	2,55	$-1,395$	$-1,277$	2,4 (b)	1,123
$2\xi+2\varphi-\varphi'$	0,90	0,607	0,604	0,8	0,196
$2\xi-\varphi-2\varphi'$	7,52	7,527	7,482	7,2	0,282
$2\xi-\varphi-2\varphi'$	$-2,59$	$-2,014$	$-2,027$	$-1,0$ (b)	$-1,027$
$2\xi+\varphi-2\varphi'$	0,52	0,323	0,321	0,4	$-0,079$
$2\xi-4\varphi$	0,93	0,873 (a)	0,606	1,1	0,494
$2\xi-3\varphi-\varphi'$	0,48	0,328	0,325	0,5	0,175
$2\xi-3\varphi+\varphi'$	»	$-0,140$	$-0,139$	$-0,2$	$-0,061$
$2\xi-2\varphi-2\varphi'$	0,11	0,157	0,156	0,4	$-0,244$

ARGUMENT.	DAMOISEAU.	PLANA.	THÉORIE actuelle.	BURCKHARDT.	DIFFÉRENCES entre la théorie et l'observat.
$2\xi-2\eta$	54",83	54",915	55",109	56",3 [b]	− 1",191
$2\xi+2\eta$	− 5,75	− 3,376 [a]	− 5,728	− 5,8	0,072
$2\xi-\varphi-2\eta$	0,27	0,030	0,514	0,3	0,214
$2\xi-\varphi+2\eta$	− 9,65	− 9,384	− 9,221	− 9,5	0,279
$2\xi+\varphi-2\eta$	− 6,65	− 6,151	− 6,065	− 5,6	− 0,465
$2\xi+\varphi+2\eta$	− 1,00	− 0,626	− 0,619	− 0,9	0,281
$2\xi-\varphi'-2\eta$	2,92	2,329	2,306	1,5 [b]	0,806
$2\xi-\varphi'+2\eta$	− 0,17	− 0,189	− 0,187	− 0,3	0,113
$2\xi+\varphi'-2\eta$	− 1,34	− 1,475	− 1,460	»	»
$2\xi-2\varphi-2\eta$	− 0,52	− 0,177	− 0,174	− 0,8	0,626
$2\xi-2\varphi+2\eta$	− 0,60	− 0,941	− 0,697	− 0,4	− 0,297
$2\xi+2\varphi-2\eta$	− 0,52	− 0,529	− 0,523	− 0,1	− 0,423
ξ	− 122,48	− 122,110	− 122,378	− 123,5 [b]	1,122
$\xi-\varphi$	− 17,19	− 18,045	− 17,795	− 18,2	0,405
$\xi+\varphi$	− 8,40	− 8,237	− 8,365	− 8,8	0,435
$\xi-\varphi'$	− 0,48	− 0,383	− 0,378	+ 2,0 [b]	− 2,378
$\xi+\varphi'$	17,56	17,216	17,252	13,9 [b]	3,352
$\xi-2\varphi$	− 1,17	− 0,796	− 0,794	− 1,7	0,906
$\xi+2\varphi$	− 0,48	− 0,357	− 0,356	− 0,3	− 0,056
$\xi-\varphi-\varphi'$	− 0,29	− 0,025	− 0,025	− 0,2	0,175
$\xi-\varphi+\varphi'$	2,05	0,466	0,388	0,7	− 0,312
$\xi+\varphi+\varphi'$	1,25	0,994	0,991	0,7	0,291
3ξ	0,01	0,887	0,887	2,7 [b]	− 1,813
$3\xi-\varphi$	− 3,04	− 2,950	− 2,948	− 2,1	− 0,848
$3\xi+\varphi$	0,33	0,143	0,144	0,6	− 0,456
$3\xi-2\varphi$	»	− 0,640	− 0,638	− 0,2	− 0,438
$3\xi-\varphi+\varphi'$	»	0,194	0,210	0,2	0,010
4ξ	14,85	14,409	14,245	16,1	− 1,855
$4\xi-\varphi$	38,62	38,001	38,252	38,6	− 0,348
$4\xi+\varphi$	− 0,43	0,855 [a]	1,277	2,3 [b]	− 1,028
$4\xi-\varphi'$	0,82	1,210	1,282	2,0 [b]	− 0,718

ARGUMENT.	DAMOISEAU.	PLANA.	THÉORIE actuelle.	BURCKHARDT.	DIFFÉRENCES entre la théorie et l'observat.
$4\xi+\varphi'$	− 0″,09	− 0″,201	− 0″,224	− 0″,2	− 0″,024
$4\xi-2\varphi$	31,19	34,518 (a)	31,153	31,4	− 0,247
$4\xi+2\varphi$	0,73	»	0,139	− 0,1	0,239
$4\xi-\varphi-\varphi'$	3,32	3,837	3,824	4,1	− 0,276
$4\xi-\varphi+\varphi'$	− 0,49	− 0,922	− 0,746	− 0,7	− 0,046
$4\xi-3\varphi$	1,39	0,502	0,432	0,7	− 0,268
$4\xi-2\varphi-\varphi'$	3,05	1,197	1,191	2,3 (b)	− 1,109
$4\xi-2\varphi+\varphi'$	− 0,50	− 0,513	− 0,510	− 0,2	− 0,310
$4\xi-2\eta$	0,64	0,054	0,054	0,5	− 0,446
$4\xi-\varphi-2\eta$	0,39	0,397	0,393	0,6	− 0,207
$4\xi+\varphi-2\eta$	»	− 0,036	− 0,036	− 0,1	0,064
$6\xi-\varphi$	»	»	0,151	0,2	− 0,049
$6\xi-2\varphi$	0,53	»	0,256	1,0 (b)	− 0,744

On voit, par ce tableau, que les plus grandes différences entre les coefficiens des Tables de Burckhardt et ceux que nous avons obtenus par la réduction en nombres des formules de la théorie, ne dépassent guère *deux* secondes sexagésimales, exception faite du coefficient de l'équation annuelle, sur la valeur duquel nous nous proposons de revenir d'une manière particulière (*). Ces différences peuvent être attribuées, en grande partie, à l'incorrection des observations sur lesquelles les Tables de Burckhardt ont été construites; elles diminueront certainement, et disparaîtront peut-être entièrement lorsque, par les progrès continuels de l'astronomie pratique, on aura pu réunir un plus grand

(*) *Voir* les Notes à la fin du volume.

nombre de bonnes observations, et en déduire des Tables plus exactes. Quant à la comparaison mutuelle des valeurs déduites de la théorie, elle est aussi satisfaisante qu'on pouvait l'espérer de résultats obtenus par des méthodes totalement différentes entre elles, et par des calculs aussi compliqués; les petites discordances qui existent encore entre ces résultats peuvent tenir, soit à la différence des élémens employés dans la réduction des formules en nombres, soit à la différence des méthodes que nous avons adoptées, soit enfin à de légères incorrections presque inévitables dans d'aussi longs calculs (*).

145. Comparons de la même manière l'expression de la latitude déduite de la théorie, à celle qui résulte de l'observation directe des mouvemens lunaires. D'après les notations que nous avons adoptées, l'expression de

---

(*) M. Plana ayant imprimé avec détail tous les calculs sur lesquels est fondée sa théorie lunaire, nous avons pu remonter à la source des principales incorrections qui nous ont paru avoir influé sur son résultat final. Si nous avions eu à notre disposition le manuscrit des Tables de Burckhardt, sans doute il nous aurait été facile de reconnaître de même la cause des différences les plus considérables qui existent encore entre les résultats de l'observation et de la théorie; car il est évident, pour nous, que quelques-uns des résultats déduits des Tables de Burckhardt et renfermés dans le tableau précédent, sont fautifs, bien qu'il nous soit impossible d'en fournir en ce moment la correction. Ainsi, sans avoir besoin de Tables fondées sur des observations plus exactes et plus nombreuses que celles que Burckhardt a employées, on aurait pu voir, non sans quelque satisfaction sans doute, les différences entre les résultats de la théorie lunaire et ceux de l'observation réduites, dès aujourd'hui, à quelques *dixièmes* de seconde.

la latitude tirée des Tables de Burckhardt devient

$$\begin{aligned}\text{Latitude} = {} & 18518'',3 \sin(gv - \theta) - 14'',7 \sin(\varphi - \eta) - 5'',7 \sin 3\eta \\ & + 25'',9 \sin(\varphi' - \eta - S - E - A - V) \\ & + 23'',9 \sin(\varphi' + \eta + S + E + A + V) \\ & + 27'',0 \sin(2\varphi - \eta + S + E + A + V) \\ & - 16'',3 \sin(2\xi - \varphi - \eta) \\ & + 526'',2 \sin(2\xi - \eta + S + E + A + V) \\ & + 2'',5 \sin(2\xi + \varphi - \eta + S + E + A + V) \\ & + 22'',4 \sin(2\xi - \varphi' - \eta + S + E + A + V) \\ & - 10'',1 \sin(2\xi + \varphi' + \eta + S + E + A + V) \\ & - 5'',1 \sin(2\xi - 2\varphi - \eta);\end{aligned}$$

où l'on suppose, pour abréger,

$$v = t + \varepsilon + S + E + A + V.$$

Si à la place de S, E, A, V on substitue leurs valeurs précédentes, et qu'on développe ensuite l'expression résultante, on trouvera :

$$\begin{aligned}\text{Latitude} = {} & (18518'',3 - 0'',6 - 55'',8 - 2'',8 + 2'',7 - 0'',1 = 18461'',7) \sin\eta \\ & + \left(\begin{matrix} 1'',2 + 1012'',2 + 3'',8 - 1'',5 - 6'',1 - 14'',7 - 1'',5 \\ + 0'',1 = 993'',5 \end{matrix}\right) \sin(\varphi - \eta) \\ & + (-1'',2 + 1012'',2 - 1'',5 = 1009'',5) \sin(\varphi + \eta) \\ & + (-29'',9 + 25'',9 - 0'',1 - 0'',1 = -4'',2) \sin(\varphi' - \eta) \\ & + (-29'',9 + 23'',9 + 0'',1 = -5'',9) \sin(\varphi' + \eta) \\ & + (-27'',9 + 34'',5 + 0'',1 + 27'',0 = 33'',7) \sin(2\varphi - \eta) \\ & + (27'',9 + 34'',5 = 62'',4) \sin(2\varphi + \eta) \\ & + (-1'',6 + 6'',6 + 1'',3 - 0'',2 = 6'',1) \sin(\varphi - \varphi' - \eta) \\ & + (1'',6 + 6'',6 - 1'',4 + 0'',1 = 6'',9) \sin(\varphi - \varphi' + \eta) \\ & + (-1'',6 - 4'',9 - 0'',2 - 1'',4 = -8'',1) \sin(\varphi + \varphi' - \eta) \\ & + (-1'',6 - 4'',9 + 1'',3 = -5'',2) \sin(\varphi + \varphi' + \eta) \\ & - 0'',3 \sin(2\varphi' - \eta) - 0'',3 \sin(2\varphi' + \eta) \\ & + (1'',7 + 0'',5 + 1'',5 = 3'',7) \sin(3\varphi - \eta) \\ & + (1'',7 + 0'',5 = 2'',2) \sin(3\varphi + \eta) \\ & + 0'',3 \sin(2\varphi - \varphi' - \eta) + 0'',3 \sin(2\varphi - \varphi' + \eta) \\ & - 0'',3 \sin(2\varphi + \varphi' - \eta) - 0'',3 \sin(2\varphi + \varphi' + \eta) \\ & + (-11'',3 + 105'',9 + 2'',7 - 0'',3 + 526'',2 = 623'',4) \sin(2\xi - \eta) \\ & + (11'',3 + 105'',9 - 0'',3 = 116'',9) \sin(2\xi + \eta) \\ & + \left(\begin{matrix} 5'',8 + 205'',1 + 0'',4 - 0'',6 - 28'',9 + 0'',3 \\ - 16'',3 = 165'',8 \end{matrix}\right) \sin(2\xi - \varphi - \eta) \\ & + (-5'',8 + 205'',1 - 0'',6 - 0'',1 = 198'',6) \sin(2\xi - \varphi + \eta) \\ & + \left(\begin{matrix} -5'',8 + 8'',8 - 0'',2 + 0'',3 + 28'',9 + 2'',5 \\ + 0'',3 = 34'',5 \end{matrix}\right) \sin(2\xi + \varphi - \eta) \\ & + (5'',8 + 8'',8 + 0'',3 = 14'',9) \sin(2\xi + \varphi + \eta)\end{aligned}$$

$+(0'',2+7'',4+0'',9+0'',1+22'',4=31'',0)\sin(2\xi-\varphi'-\eta)$
$+(0'',2+7'',4-0'',1=7'',5)\sin(2\xi-\varphi'+\eta)$
$+(0'',2-1'',2-0'',9-10'',1=-12'',1)\sin(2\xi+\varphi'-\eta)$
$+(-0'',2-1'',2+0'',1=-1'',3)\sin(2\xi+\varphi'+\eta)$
$+(11'',3+9'',5+0'',1-1'',0-5'',1=14'',8)\sin(2\xi-2\varphi-\eta)$
$+(-11'',3+9'',5+0'',1+0'',1=-1'',6)\sin(2\xi-2\varphi+\eta)$
$+(0'',7+0'',1+1'',0+0'',1=1'',9)\sin(2\xi+2\varphi-\eta)$
$+(0'',7+0'',1=0'',8)\sin(2\xi+2\varphi+\eta)$
$+(0'',3+9'',3+0'',1+0'',3-1'',2=8'',8)\sin(2\xi-\varphi-\varphi'-\eta)$
$+(-0'',3+9'',3-0'',3=8'',7)\sin(2\xi-\varphi-\varphi'+\eta)$
$+(-0'',3-1'',2-0'',1-0'',3+0'',5=-1'',4)\sin(2\xi-\varphi+\varphi'-\eta)$
$+(0'',3-1'',2+0'',3=-0'',7)\sin(2\xi-\varphi+\varphi'+\eta)$
$+(0'',6+0'',1+1'',2=1'',9)\sin(2\xi+\varphi-\varphi'-\eta)$
$+0'',6\sin(2\xi+\varphi-\varphi'+\eta)$
$+(-0'',1-0'',5=-0'',6)\sin(2\xi+\varphi+\varphi'-\eta)$
$+0'',3\sin(2\xi-2\varphi'-\eta)+0'',3\sin(2\xi-2\varphi'+\eta)$
$+(-5'',5+0'',1=-5'',4)\sin(\xi-\eta)-5'',5\sin(\xi+\eta)$
$-0'',8\sin(\xi-\varphi-\eta)-0'',8\sin(\xi-\varphi+\eta)$
$-0'',4\sin(\xi+\varphi-\eta)-0'',4\sin(\xi+\varphi+\eta)$
$+0'',6\sin(\xi+\varphi'-\eta)+0'',6\sin(\xi+\varphi'+\eta)$
$+(-0'',3+0'',6+2'',7=3'',0)\sin(4\xi-\eta)$
$+(0'',3+0'',6=0'',9)\sin(4\xi+\eta)$
$+(-1'',2+1'',5+6'',1=6'',4)\sin(4\xi-\varphi-\eta)$
$+(1'',2+1'',5=2'',7)\sin(4\xi-\varphi+\eta)$
$+(0'',1+0'',1=0'',2)\sin(4\xi-\varphi'-\eta)+0'',1\sin(4\xi+\varphi'-\eta)$
$+(-1'',4+1'',2-0'',1-0'',1=-0'',4)\sin(4\xi-2\varphi-\eta)$.

Par le procédé inverse de celui que nous venons de suivre, on pourra faire prendre à l'expression de la latitude, n° 134, la forme que lui a donnée Burckhardt ; ce qui, en diminuant le nombre des argumens, facilite beaucoup la construction et l'usage des tables (*).

146. Le tableau suivant offre la comparaison des résultats précédens à ceux que M. Plana et moi nous avons déduits des formules de la théorie (**).

(*) *Voir* les Notes à la fin du volume.

(**) Nous n'avons pu comprendre, dans ce tableau, les résultats de M. Damoiseau relatifs à la latitude, parce que son expression n'a point été convertie en série de sinus d'angles proportionnels à la longitude moyenne de la Lune.

Comparaison des valeurs numériques des coefficiens des principales inégalités périodiques de la latitude de la Lune, en fonction de sa longitude moyenne, d'après la théorie et l'observation.

ARGUMENT.	PLANA.	THÉORIE actuelle.	BURCKHARDT.	DIFFÉRENCES entre la théorie et l'observat.
η	18465″,538	18461″,700 (*)	18461″,700	0″,000
$\varphi-\eta$	1000,509	1000,664	993,5 [a]	7,164
$\varphi+\eta$	1010,894	1011,198	1009,5	1,698
$\varphi'-\eta$	− 4,167	− 4,221	− 4,2	− 0,021
$\varphi'+\eta$	− 5,448	− 5,595	− 5,9	0,305
$2\varphi-\eta$	32,343	32,108	33,7	− 1,592
$2\varphi+\eta$	62,462	62,422	62,4	0,022
$\varphi-\varphi'-\eta$	5,183	5,018	6,1	− 1,082
$\varphi-\varphi'+\eta$	6,360	6,313	6,9	− 0,587
$\varphi+\varphi'-\eta$	− 4,864	− 4,847	− 8,1 [a]	3,253
$\varphi+\varphi'+\eta$	− 5,305	− 5,253	− 5,2	− 0,053
$2\varphi'-\eta$	− 0,106	− 0,105	− 0,3	0,195
$2\varphi'+\eta$	− 0,146	− 0,145	− 0,3	0,155
$3\varphi-\eta$	1,687	1,669	3,7 [d]	− 2,031
$3\varphi+\eta$	4,085	4,043	2,2 [a]	1,843
$2\varphi-\varphi'-\eta$	0,257	0,340	0,3	0,040
$2\varphi-\varphi'+\eta$	0,445	0,440	0,3	0,140
$2\varphi+\varphi'-\eta$	− 0,257	− 0,218	− 0,3	0,082
$2\varphi+\varphi'+\eta$	− 0,445	− 0,440	− 0,3	− 0,140
3η	− 6,424	− 6,397	− 5,7	− 0,697
$\varphi-3\eta$	2,848	2,786	3,8	− 1,014
$2\xi-\eta$	621,476	623,569	623,4	0,169
$2\xi+\eta$	101,708 [1]	117,512	116,9	0,612

(*) Ce coefficient est une des arbitraires de la théorie; nous avons cru devoir adopter le résultat de Burckhardt.

(1) Il y a une erreur dans la conversion en nombres des formules de M. Plana. Page 719, t. I, au lieu de 20″,347 (4), on doit lire 36″,219 (4); ce qui, au lieu de 101″,708, donne 117″,580 pour le coefficient de sin $(2\xi+\eta)$, résultat qui s'accorde avec le nôtre et avec celui de l'observation.

ARGUMENT.	PLANA.	THÉORIE actuelle.	BURCKHARDT.	DIFFÉRENCES entre la théorie et l'observat.
$2\xi-\varphi-\eta$	166'',615	166'',649	165'',8	0'',849
$2\xi-\varphi+\eta$	196,224	198,810	198,6	0,210
$2\xi+\varphi-\eta$	35,039 (1)	33,445	34,5	— 1,055
$2\xi+\varphi+\eta$	14,774	14,975	14,9	0,075
$2\xi-\varphi'-\eta$	29,535	29,650	31,0	1,350
$2\xi-\varphi'+\eta$	7,593	7,669	7,5	0,169
$2\xi+\varphi'-\eta$	— 12,272	— 11,584	— 12,1	0,516
$2\xi+\varphi'+\eta$	— 1,194	— 1,426	— 1,3	— 0,126
$2\xi-2\varphi-\eta$	16,217 (2)	15,021	14,8	0,221
$2\xi-2\varphi+\eta$	— 1,883	1,849	— 1,6	— 0,249
$2\xi+2\varphi-\eta$	2,377	2,159	1,9	0,259
$2\xi+2\varphi+\eta$	0,867	1,285	0,8	0,485
$2\xi-\varphi-\varphi'-\eta$	8,241	8,311	8,8	— 0,489
$2\xi-\varphi-\varphi'+\eta$	9,226	8,875	8,7	0,175
$2\xi-\varphi+\varphi'-\eta$	— 1,945	— 1,978	— 1,4	— 0,578
$2\xi-\varphi+\varphi'+\eta$	— 2,692	— 2,675	— 0,7 (a)	— 1,975
$2\xi+\varphi-\varphi'-\eta$	1,576	1,564	1,9	— 0,336
$2\xi+\varphi-\varphi'+\eta$	0,588	0,583	0,6	— 0,017
$2\xi+\varphi+\varphi'-\eta$	0,905 (3)	— 0,739	— 0,6	— 0,139
$2\xi-2\varphi'-\eta$	0,627 (4)	0,933	0,3	0,633
$2\xi-2\varphi'+\eta$	0,172	0,171	0,3	— 0,129

(1) La différence entre le résultat de M. Plana et le nôtre, tient à une faute qui existe dans sa formule analytique, et qui tombe sur les termes de l'ordre $m^2 e\gamma$.

(2) La différence de 1'' entre le résultat de M. Plana et le nôtre, tient à une erreur dans la réduction de ses formules : au lieu de 4'',879 (5) (t. I, p. 720), on doit lire 3'',879 (5) dans le coefficient de sin $(2\xi-2\varphi-\eta)$.

(3) Il y a erreur de signe dans la formule de M. Plana ; la réduction en nombres est d'ailleurs également fautive.

(4) Il y a erreur dans la réduction en nombres de la formule de M. Plana. T. I, p. 720, au lieu de 0'',313 (4), on doit lire 0'',626 (4) ; ce qui, au lieu de 0'',627, donne 0'',940 pour le coefficient de sin $(2\xi-2\varphi'-\eta)$, résultat qui concorde avec le nôtre.

ARGUMENT.	PLANA.	THÉORIE actuelle.	BURCKHARDT.	DIFFÉRENCES entre la théorie et l'observat.
$2\xi-3\varphi-\eta$	1″,075	0″,950	0″,0 (a)	0″,950
$2\xi-3\varphi+\eta$	0,215	0,213	0,6	— 0,387
$2\xi-3\eta$	2,384	2,318	2,7	— 0,382
$2\xi+3\eta$	0,241	0,238	»	»
$2\xi-\varphi-3\eta$	0,406	0,152	0,4	— 0,248
$2\xi+\varphi-3\eta$	— 0,318	— 0,257	— 0,1	— 0,157
$\xi-\eta$	— 4,618	— 4,129	— 5,4	1,271
$\xi+\eta$	— 5,016	— 5,064	— 5,5	0,436
$\xi-\varphi-\eta$	— 0,135	— 0,206	— 0,8	0,594
$\xi-\varphi+\eta$	0,135	— 0,206	— 0,8	0,594
$\xi+\varphi-\eta$	— 0,585	— 0,510	— 0,4	— 0,110
$\xi+\varphi+\eta$	— 0,405	— 0,403	— 0,4	— 0,003
$\xi+\varphi'-\eta$	0,951	0,648	0,6	0,048
$\xi+\varphi'+\eta$	0,951 (1)	0,648	0,6	0,048
$4\xi-\eta$	1,402 (2)	3,553	3,0	0,553
$4\xi+\eta$	0,366	0,364	0,9	— 0,536
$4\xi-\varphi-\eta$	6,548	6,561	6,4	0,161
$4\xi-\varphi+\eta$	1,399	2,340	2,7	— 0,360
$4\xi-\varphi'-\eta$	0,197	0,196	0,2	— 0,004
$4\xi-2\varphi-\eta$	0,357	0,354	0,4	— 0,046
$4\xi-2\varphi+\eta$	1,237	1,226	2,6 (a)	— 1,374
$4\xi-\varphi-\varphi'-\eta$	0,315	0,312	0,4	— 0,088
$4\xi-\varphi+\varphi'-\eta$	— 0,135	— 0,134	— 0,1	— 0,034
$4\xi-3\eta$	0,074	0,117	0,1	0,017

(1) Dans la réduction en nombres des formules de M. Plana (t. I, p. 722), au lieu de — 0″,033 (5), on doit lire 0″,331 (5) dans les coefficiens de sin $(\xi+\varphi'-\eta)$ et de sin $(\xi+\varphi'+\eta)$; ce qui donne, au lieu de 0″,951 pour ces coefficiens, 0″,653, résultat qui s'accorde avec le nôtre.

(2) M. Plana a omis, dans sa formule analytique, le terme principal de l'ordre $m^2\gamma$.

(a) Les résultats marqués d'un (a) dans ce tableau ont évidemment besoin de correction.

On voit, par le tableau précédent, que les différences entre les résultats obtenus par M. Plana et ceux que nous avons déduits nous-même de nos formules relatives à la latitude, sont généralement très légères : nous avons indiqué la cause des plus considérables; les autres tiennent principalement à la différence des élémens que nous avons employés dans la réduction en nombres des formules analytiques. Quant aux différences entre les résultats de la théorie et ceux de l'observation, elles sont en général beaucoup moins sensibles encore que celles qui se rapportent aux formules relatives à la longitude; ce qui tient à ce que la convergence des séries étant plus rapide, et les valeurs des coefficiens moins considérables, les approximations sont nécessairement plus exactes. Laplace, d'après cette considération, a pensé qu'il conviendrait de former les Tables lunaires relatives à la latitude avec le secours de la seule théorie; ce qui aurait, outre l'avantage de l'exactitude, celui de faire dépendre le plus possible toutes les Tables célestes de la seule loi de la gravitation universelle.

147. Il nous reste à nous occuper de l'expression de la parallaxe; le tableau suivant offre la comparaison des résultats que nous avons obtenus relativement à cette troisième coordonnée, à ceux de MM. Damoiseau et Plana.

Valeurs numériques des coefficiens des principales inégalités de la parallaxe horizontale à l'équateur, suivant MM. DAMOISEAU *et* PLANA, *comparées aux résultats de la théorie précédente.*

ARGUMENT.	DAMOISEAU.	PLANA.	THÉORIE ACTUELLE.
0	3420",89	3423",1534 [1]	3421",1530
φ	186,48	186,6545	186,5535
2φ	10,24	10,2587	10,2123
3φ	0,63	0,6340	0,6334
φ'	— 0,32	— 0,4284	— 0,4278
$\varphi-\varphi'$	1,20	1,0599	1,0528
$\varphi+\varphi'$	0,92	0,9192	— 0,9126
$2\varphi-\varphi'$	»	0,0855	0,1024
$2\varphi+\varphi'$	»	— 0,0798	— 0,0912
$\varphi-2\eta$	— 0,70	— 1,1937	— 0,7002
2ξ	28,54	27,5933	27,4751
$2\xi-\varphi$	34,43	33,9214	34,1755
$2\xi+\varphi$	3,05	3,0755	3,0597
$2\xi-\varphi'$	1,92	2,1646	1,8761
$2\xi+\varphi'$	— 0,26	— 0,5447	— 0,3275
$2\xi-2\varphi$	— 0,41	0,1670 [a]	— 0,2751
$2\xi+2\varphi$	0,14	0,2702	0,2688
$2\xi-\varphi-\varphi'$	1,45	1,4486	1,4492
$2\xi-\varphi+\varphi'$	— 0,24	— 0,3803	— 0,3747
$2\xi+\varphi-\varphi'$	0,18	0,1877	0,1961
$2\xi+\varphi+\varphi'$	»	— 0,0014 [a]	— 0,0413
ξ	— 0,98	— 0,9247	— 0,9233
$\xi+\varphi'$	0,14	— 0,1519	0,1492
4ξ	0,21	0,1365	0,1955
$4\xi-\varphi$	0,57	0,4985	0,4970
$4\xi-2\varphi$	0,40	0,3250	0,3084

(1) La valeur de ce coefficient, qu'on nomme la *constante de la parallaxe,* dépend en grande partie de la valeur qu'on adopte pour la masse de la Lune, n° 136.

(a) Il y a erreur dans la formule analytique de M. Plana, ainsi que dans sa réduction en nombres.

Nous n'avons pas rapporté dans ce tableau, comme nous l'avions fait dans les précédens, les valeurs tirées des Tables de Burckhardt, parce que cet astronome ayant annoncé qu'il a déduit les inégalités de la parallaxe de la théorie de Laplace, les coefficiens de ces inégalités sont probablement moins exacts que ceux de nos formules, où nous avons poussé les approximations plus loin que ne l'avait fait ce géomètre. Il nous a donc paru inutile de nous livrer au pénible travail qu'eût exigé la conversion de l'expression de la parallaxe tirée des Tables de Burckhardt en série de *cosinus* d'angles croissant proportionnellement au temps. Quant à la comparaison qu'offre le tableau précédent des résultats que nous avons obtenus relativement à cette parallaxe, à ceux qui ont été donnés par MM. Plana et Damoiseau, elle peut être regardée comme un point intéressant pour l'analyse, parce qu'elle sert de vérification aux formules desquelles ces résultats ont été déduits; mais les différences qui existent entre les coefficiens des inégalités de la parallaxe, quelles que soient les méthodes par lesquelles on les détermine, sont très légères, et les observations ne seront jamais assez précises pour déterminer d'aussi petites différences.

148. Nous avons donc atteint le but que nous nous étions proposé. Par les méthodes qui nous ont paru les plus directes, et par conséquent les plus simples, nous avons déterminé les coefficiens des diverses inégalités du mouvement lunaire, en portant les approximations aussi loin que semble le permettre l'état actuel de l'analyse. Nous avons ensuite comparé aux

observations les valeurs de ces coefficiens réduits en nombres, et nous avons vu qu'à quelques rares exceptions près, l'accord était aussi parfait qu'on le pouvait espérer dans une question aussi compliquée et aussi difficile. Sans doute les petites différences qui peuvent exister encore entre les deux méthodes d'investigation, disparaîtront en grande partie lorsqu'une nouvelle réduction des observations lunaires faites pendant les deux derniers siècles et dans le cours du siècle actuel, aura permis d'en déduire des Tables plus précises que celles de Burckhardt, qui semblent, sur plusieurs points importans, laisser encore beaucoup à désirer. L'analyse, certaine de ne pas s'égarer, pourra porter alors les approximations plus loin que nous ne l'avons fait nous-même relativement aux inégalités sur la grandeur desquelles il reste encore quelques doutes, et elle établira enfin un accord complet entre la théorie et l'observation.

Les premières recherches de Newton sur la théorie de la Lune avaient simplement pour but de montrer comment la cause des principales inégalités lunaires pouvait être expliquée par la grande loi de la pesanteur universelle. Clairaut, substituant l'analyse à la synthèse, calcula les valeurs des coefficiens des équations les plus considérables, et parvint, par la seule théorie, à former des Tables lunaires qui, rapprochées de celles de Halley, offraient des différences qui pouvaient s'élever à 10'. Laplace, en suivant la même marche à peu près, mais en portant plus loin les approximations, s'avança davantage vers la so-

lution du problème; toutefois ses résultats, comparés aux Tables de Mason et de Bürg, offraient des différences qui s'élevaient encore à 10″, malgré les travaux de ce grand géomètre et des savans laborieux qui lui avaient prêté leur appui. On vient de voir que, par la théorie actuelle, où nous avons poussé les approximations aussi loin au moins que les géomètres qui nous avaient précédé, les différences entre les résultats du calcul et ceux qu'on a déduits des meilleures Tables fondées sur les observations, ont été réduites à des *dixièmes* de secondes (*). C'est donc uniquement à faire disparaître ces légères différences que se borneront désormais les travaux des géomètres et des astronomes qui s'occuperont de la théorie des mouvemens lunaires.

Ce simple résumé suffit pour montrer quel est l'état avancé dans lequel se trouve aujourd'hui la plus difficile, sans doute, des questions que présente le système des corps planétaires, et ce qui reste à faire pour l'amener au dernier degré de perfectionnement.

C'est par le travail infatigable des hommes laborieux qui se vouent à l'étude de la science moins pour la gloire d'un vain renom, que pour la satisfaction d'avoir approché de la vérité d'un peu plus près que leurs devanciers, que ce résultat peut être obtenu, et tout nous fait espérer qu'ils ne lui feront pas défaut.

En effet, en étudiant la marche par laquelle les géomètres se sont progressivement avancés vers la solution complète du problème que présente la théorie

---

(*) *Voir* la note page 628.

lunaire, l'esprit humain y puisera un grand et utile enseignement. Dans la plupart des sciences naturelles, les plus brillantes découvertes ont été dues, souvent, à une heureuse inspiration ou au simple hasard. La théorie lunaire, au contraire, offre l'exemple d'un succès que l'homme n'a obtenu que par des travaux continus et par la force irrésistible de sa volonté, et c'est là qu'on trouve surtout la démonstration de cette grande vérité proclamée naguère par une voix éloquente : *La persévérance est le génie de l'homme!*

FIN DU QUATRIÈME VOLUME.

NOTES

RELATIVES AU LIVRE VII.

NOTE 1.

Sur le développement de la fonction R. (N° 95, p. 426.)

Nous avons, dans le n° 3, développé la fonction perturbatrice par la méthode ordinaire du développement en série; mais on peut déterminer directement le coefficient de chacun des termes de l'expression de R en employant la méthode des intégrales doubles. Pour en donner un exemple, nous calculerons de cette manière la partie de la fonction R indépendante des moyens mouvemens de la Lune et du Soleil.

Si l'on représente, pour abréger, par u et u' les longitudes moyennes de ces deux astres, et si l'on suppose le développement de R effectué, on aura généralement

$$R = F + \Sigma H \cos(iu - i'u') + \Sigma K \sin(iu - i'u'),$$

en représentant par F une quantité qui ne dépend que des élémens elliptiques des orbites de la Lune et du Soleil, et par le signe Σ des intégrales finies, une suite de termes périodiques où i et i' peuvent avoir toutes les valeurs entières positives et négatives y compris zéro; les valeurs simultanées $i = 0$ et $i' = 0$ étant seules exceptées, parce qu'elles sont renfermées dans le premier terme.

Si l'on multiplie par $du\,du'$ cette expression, et qu'ensuite on l'intègre successivement par rapport à u et u', depuis $u = 0$ jusqu'à $u = 2\pi$, et depuis $u' = 0$ jusqu'à $u' = 2\pi$, il est aisé de s'assurer que tous les termes du second membre, le premier excepté, disparaîtront dans l'intégrale définie, en sorte qu'on

aura

$$F = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} R\, du\, du'.$$

Substituons dans cette expression pour R, du et du' leurs valeurs. En ne considérant que le premier terme de l'expression de R (page 46), on aura

$$R = -\frac{m'r^2}{2r'^3}(1 - 3\mu^2).$$

u et u' représentant les longitudes moyennes $nt + \varepsilon$, $n't + \varepsilon'$ de la Lune et du Soleil, d'après les formules du mouvement elliptique, on a

$$du = \frac{r^2 dv}{a^2\sqrt{1-e^2}}, \quad du' = \frac{r'^2 dv'}{a'^2\sqrt{1-e'^2}}.$$

On aura donc

$$F = -\frac{m'}{8\pi^2 a^2 a'^2\sqrt{1-e^2}\sqrt{1-c'^2}}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r^4}{r'}(1 - 3\mu^2)\, dv\, dv'.$$

Pour aller plus loin il faut, à la place de r^4, r' et de μ^2, substituer leurs valeurs en fonction des variables v et v'. Or, pour déterminer μ, on a

$$xx' + yy' + zz' = rr'\mu.$$

Prenons pour plan des xy le plan de l'écliptique vraie, et la ligne des nœuds de l'orbe lunaire sur ce plan pour l'axe des x; en nommant i l'inclinaison de l'orbe lunaire sur l'écliptique vraie, on aura

$$x = r\cos v, \quad y = r\sin v\cos i, \quad z = r\sin v\sin i;$$
$$x' = r'\cos v', \quad y' = r'\sin v';$$

et, par conséquent,

$$xx' + yy' + zz' = rr'(\cos v\cos v' + \sin v\sin v'\cos i).$$

En observant qu'on a

$$\sin^2\frac{i}{2} = \frac{1 - \cos i}{2}, \quad \cos^2\frac{i}{2} = \frac{1 + \cos i}{2},$$

on en conclut

$$\mu = \left[\cos^2\frac{i}{2}\cos(v - v') + \sin^2\frac{i}{2}\cos(v + v')\right].$$

Si l'on substitue cette valeur sous le signe intégral dans l'expression de F, qu'à la place de $\frac{1}{r'}$ on mette sa valeur

$$\frac{1}{r'} = \frac{1 + e' \cos(v' - \omega')}{a'(1 - e'^2)},$$

et qu'on intègre ensuite par rapport à v', il est aisé de voir que, comme dans les limites assignées aux intégrales, on a, quel que soit i', $\int \sin i'v'\, dv' = 0$, $\int \cos i'v'\, dv' = 0$, cette intégration fera disparaître le terme dépendant de l'angle v' et de ses multiples : il suffira donc de substituer pour μ^2 les termes de sa valeur qui sont indépendans de v'; or, en observant que l'on a

$$\cos^4 \frac{i}{2} + \sin^4 \frac{i}{2} = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 i, \quad 2\sin^2 \frac{i}{2} \cos^2 \frac{i}{2} = \frac{1}{2}\sin^2 i,$$

on trouve

$$\mu^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sin^2 i\,(1 - \cos 2v).$$

En substituant cette valeur sous le signe intégral, on aura

$$F = \frac{m'}{8\pi a^2 a'^2 \sqrt{1 - e^2}\,(1 - e'^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} r^4\, dv \left[1 - \frac{3}{2}\sin^2 i\,(1 - \cos 2v)\right].$$

Pour opérer l'intégration qui reste à effectuer, il faut substituer pour r^4 sa valeur en fonction de v; or, en supposant cette valeur développée en une série de *cosinus* de l'angle v et de ses multiples, il est aisé de voir qu'en substituant cette valeur dans la fonction F, l'intégration fera disparaître tous les termes de la suite qui en résultera, excepté le terme indépendant de l'angle v et celui qui dépend du double de cet angle; on peut donc supposer simplement

$$\frac{r^4}{a^4(1 - e^2)^4} = A + Be^2 \cos(2v - 2\omega + 2\theta),$$

et, en opérant la substitution et l'intégration, on aura

$$\frac{1}{2\pi a^4 (1 - e^2)^4} \int_0^{2\pi} r^4 dv \left[1 - \frac{3}{2}\sin^2 i\,(1 - \cos 2v)\right] = A\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2 i\right)$$
$$+ \frac{3}{4} Be^2 \sin^2 i \cos(2\omega - 2\theta).$$

Il ne restera donc qu'à déterminer les deux coefficiens A et B; ce qui pourra se faire, soit en développant la valeur de r^4 tirée de l'équation de l'ellipse, soit par la méthode ordinaire des quadratures. En effet, en multipliant successivement la valeur précédente de r^4 par dv et par $\cos 2(v - \omega + \theta)\, dv$, et en intégrant les expressions résultantes, on trouvera, pour déterminer A et B,

$$A = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega-\theta}^{2\pi+\omega-\theta} \frac{dv}{[1 + e\cos(v - \omega + \theta)]^4},$$

$$B = \frac{1}{\pi}\int_{\omega-\theta}^{2\pi+\omega-\theta} \frac{\cos 2(v - \omega + \theta)\, dv}{[1 + e\cos(v - \omega + \theta)]^4}.$$

Ces deux intégrales peuvent s'obtenir sous forme finie, en substituant à la longitude vraie v sa valeur en fonction de l'anomalie moyenne φ, et en intégrant ensuite dans les limites correspondantes, c'est-à-dire depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = 2\pi$. Nous avons trouvé ainsi :

$$A = \frac{1 + \frac{3}{2}e^2}{(1 - e^2)^{\frac{7}{2}}}, \quad B = \frac{5}{(1 - e^2)^{\frac{7}{2}}}.$$

En observant que γ représentant la tangente de l'inclinaison moyenne de l'orbe lunaire à l'écliptique, on peut supposer $\gamma^2 = \sin^2 i$ dans les termes déjà multipliés par e^2, et qu'on a d'ailleurs, $m^2 = \frac{m' a^3}{a'^3}$, n° 8, et $a = 1$, n° 94, on en conclut

$$F = \frac{m^2\left(1 + \frac{3}{2}e^2\right)}{4(1 - e'^2)^{\frac{3}{2}}}\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2 i\right) + \frac{15}{16} m^2 e^2 \gamma^2 \cos(2\omega - 2\theta).$$

Cette valeur est conforme à celle que nous avons supposée, n° 96, à la partie non périodique de la fonction perturbatrice; elle s'accorde d'ailleurs avec la valeur de R obtenue, n° 6, par la méthode ordinaire du développement en série dans l'ordre des quantités auxquelles nous avons eu égard dans ce numéro.

NOTE 2.

Sur l'équation séculaire de la Lune. (Page 420.)

1. Les équations séculaires dont le mouvement de la Lune est affecté, demandent à être déterminées avec une extrême précision, puisque ce n'est que dans plusieurs siècles qu'on pourra en fixer, par l'observation, la vraie valeur. Cependant nous n'avons eu égard, dans la détermination de l'équation séculaire de la longitude moyenne, qu'à la première puissance de la force perturbatrice; approximation qui serait évidemment insuffisante, sans une espèce de compensation qui s'établit entre les quantités dépendantes des approximations suivantes, et qui réduit à peu près à zéro la correction qui résulterait de leur considération. En développant la formule (8) du n° 93, on parviendrait sans doute, par des approximations successives, à vérifier ce résultat; mais la méthode de la variation des constantes arbitraires, qui donne aisément le premier terme des équations séculaires, ne paraît pas d'une application facile à la recherche des termes suivans. Au reste, nous nous contenterons de donner ici le résultat que M. Plana a obtenu par une méthode plus expéditive, et que, d'après les soins que ce géomètre apporte ordinairement dans tous ses calculs, nous avons tout lieu de regarder comme exact.

En supposant, d'après ce qui a été dit n° 94, à l'intégrale $\int d\varepsilon$ ou à l'équation séculaire de la longitude moyenne de la Lune cette forme $H\int(e'^2 - E'^2)\,dt$, et en portant les approximations jusqu'aux quantités de l'ordre m^7, on a trouvé

$$\begin{aligned} H = {} & \left(\frac{3}{2}m^2 - \frac{2187}{128}m^4 - \frac{4455}{64}m^5 - \frac{716779}{512}m^6 + \frac{49929}{128}m^7\right) \\ & + e^2\left(\frac{1461}{128}m^2 + \frac{106335}{512}m^3 + \frac{2479419}{1024}m^4 + \frac{7344621}{256}m^5\right) \\ & + \gamma^2\left(\frac{525}{128}m^2 + \frac{1083}{512}m^3 - \frac{41181}{1024}m^4\right) \\ & - \frac{8367}{128}m^2e^4 - \frac{9}{4}m^4e'^2 - \frac{2709}{256}m^2e^2\gamma^2 - \frac{2229}{256}m^2\gamma^4 \\ & + \frac{a^2}{a'^2}\left(\frac{75}{32} - \frac{675}{32}m + \frac{98415}{512}m^2 + \frac{75}{8}e^2 - \frac{225}{64}\gamma^2\right). \end{aligned}$$

Pour réduire en nombres cette formule, on a supposé $e = 0{,}0548476$, $\gamma = 0{,}09005900$, les autres quantités qu'elle renferme conservant les mêmes valeurs numériques qui ont été rapportées dans le tableau, n° 135; on a trouvé ainsi :

Équation séculaire de la longitude moyenne.

$$\int d\varepsilon = \left[\begin{array}{l} 0{,}008392850(2) - 0{,}000141759(4) \\ +0{,}000095632(5) - 0{,}000028553(6) \\ +0{,}000025332(7) = 0{,}008343502 \end{array}\right] \int (e'^2 - E'^2)\, dt.$$

On voit, par cette valeur, que les termes du quatrième ordre, dans l'expression du coefficient de l'inégalité séculaire de la longitude moyenne, sont à très peu près détruits par les termes des ordres suivans, en sorte qu'on peut, sans erreur sensible, se dispenser d'en tenir compte, et se borner à considérer les termes de l'ordre m^2, ainsi que nous l'avions fait n° 94.

2. L'équation séculaire, que nous venons de déterminer, a pour cause la variation séculaire de l'excentricité de l'orbe solaire; l'inclinaison de l'écliptique vraie sur une écliptique fixe étant également soumise à une variation séculaire, on a dû penser que cette cause pouvait produire, par un effet semblable, une seconde équation séculaire dans l'expression de la longitude moyenne de la Lune, et il était nécessaire, par conséquent, d'examiner les termes qui en résultent, pour s'assurer qu'ils n'altèrent pas, d'une manière sensible, l'équation séculaire proprement dite.

Pour cela, reprenons la formule (8), n° 93. En négligeant les termes de l'ordre du carré des excentricités et des inclinaisons, et en supposant $an = 1$, on a

$$d\varepsilon = -2dt\left(a\frac{dR}{da}\right) + \frac{1}{2}dt\left(e\frac{dR}{de}\right) + \frac{1}{2}dt\left(\gamma\frac{dR}{d\gamma}\right). \qquad (a)$$

En conservant dans le développement de la fonction R les termes dépendans de l'inclinaison de l'écliptique vraie sur l'écliptique fixe, et en omettant les termes d'un ordre supérieur au carré de s^2 et de s'^2, ainsi que ceux qui dépendent de la parallaxe

du Soleil, on trouve :

$$R = \frac{m'r^2}{4r'^3}[1 + 3(1 - s^2)(1 - s'^2)\cos 2(v - v') + 12ss'\cos(v - v') - 3s^2 - 3s'^2].$$

Si dans cette expression on fait $s = \gamma\cos(v - \theta)$, $s' = \gamma'\cos(v' - \theta')$, qu'on remplace r^2 et r'^3 par leurs valeurs, n° 5, qu'on ne conserve que les termes non périodiques provenant de cette substitution, et qu'on néglige les puissances des excentricités et des inclinaisons supérieures au carré, on aura

$$R = \frac{m'a^2}{4a'^3}\left[1 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{3}{2}e'^2 + 3\gamma\gamma'\cos(\theta - \theta') - \frac{3}{2}\gamma^2 - \frac{3}{2}\gamma'^2\right].$$

En différentiant cette expression, on formera les trois quantités $\left(a\frac{dR}{da}\right)$, $\left(e\frac{dR}{de}\right)$ et $\left(\gamma\frac{dR}{d\gamma}\right)$; en les substituant ensuite dans l'équation différentielle (a), et en observant que $\frac{m'a^2}{a'^3} = m^2$, on trouvera

$$d\epsilon = -m^2 dt\left[1 + \frac{9}{8}e^2 + \frac{3}{2}e'^2\right] + \frac{3m^2dt}{8}[3\gamma^2 + 4\gamma'^2 - 7\gamma\gamma'\cos(\theta - \theta')].$$

Le premier terme de cette expression est celui qui produit l'équation séculaire proprement dite; il a été examiné n° 94; nous pouvons donc nous dispenser d'y avoir égard ici, et nous borner à considérer le second terme de la valeur précédente.

L'inclinaison de l'écliptique vraie sur l'écliptique fixe variant de siècle en siècle, si l'on substitue pour γ'^2 sa valeur développée en fonction du temps, et qu'on intègre l'expression résultante, il s'introduira dans l'expression finie de ϵ des termes proportionnels au carré du temps, analogues à ceux que produit la variation de l'excentricité e' de l'orbe terrestre; il serait par conséquent nécessaire de démontrer que ces termes sont insensibles, pour qu'on puisse affirmer qu'ils n'altèrent pas l'équation séculaire; mais nous allons faire voir que les termes de cette espèce disparaissent d'eux-mêmes de l'expression de ϵ, lorsqu'on substitue pour γ' et θ' leurs valeurs, en tenant compte des variations de l'écliptique vraie par rapport à l'écliptique fixe.

En effet, si dans les formules (5) et (6), n° 87, on substitue pour R sa valeur donnée plus haut, on trouvera, aux quantités près que nous négligeons,

$$d\theta = -\frac{3m^2dt}{4} + \frac{3m^2dt}{4\gamma}\gamma'\cos(\theta-\theta'),$$

$$d\gamma = \frac{3m^2dt}{4}\gamma'\sin(\theta-\theta').$$

Si dans la valeur de $d\theta$ on néglige le cube de γ', il suffira d'avoir égard aux termes dépendans de cette quantité dans la valeur de θ, et aux termes dépendans de son carré dans celle de γ ; en négligeant γ' dans une première approximation, et en désignant par $\gamma_{,}$ et $\theta_{,}$ deux constantes arbitraires, on aura

$$\theta = \theta_{,} - \frac{3}{4}m^2t; \quad \gamma = \gamma_{,}.$$

Faisons, pour abréger, $h = -\frac{3}{4}m^2$; en ayant égard dans la valeur de $d\theta$ à la première puissance de γ', on aura

$$d\theta = hdt - \frac{hdt}{\gamma_{,}}[\gamma'\cos\theta'\cos(ht+\theta_{,}) + \gamma'\sin\theta'\sin(ht+\theta_{,})].$$

Pour intégrer cette expression, il faut considérer $\gamma'\cos\theta'$ et $\gamma'\sin\theta'$ comme des quantités variables ; mais comme leurs variations sont très lentes, nous négligerons les différentielles d'un ordre supérieur à la première ; et, pour simplifier le calcul, nous ferons

$$\frac{d.\gamma'\sin\theta'}{dt} = \gamma''\cos\theta'', \quad \frac{d.\gamma'\cos\theta'}{dt} = -\gamma''\sin\theta'',$$

γ'' et θ'' étant des quantités que l'on considérera désormais comme des constantes. En intégrant par parties, on aura ainsi

$$\int dt[\gamma'\cos\theta'\cos(ht+\theta_{,}) + \gamma'\sin\theta'\sin(ht+\theta_{,})$$
$$= \frac{\gamma'}{h}\sin(ht+\theta_{,}-\theta') + \frac{\gamma''}{h^2}\sin(ht+\theta_{,}-\theta'');$$

et, par conséquent,

$$\theta = \theta_{,} + ht - \frac{\gamma'}{\gamma_{,}}\sin(ht+\theta_{,}-\theta') - \frac{\gamma''}{4\gamma_{,}}\sin(ht+\theta_{,}-\theta'').$$

En substituant cette valeur dans l'expression de $d\gamma$ et en négligeant les termes du troisième ordre par rapport à γ' et γ'', on aura

$$d\gamma = -h\gamma'\, dt \sin(ht + \theta_{,} - \theta') + \frac{h\gamma'^2}{2\gamma_{,}} dt \sin 2(ht + \theta_{,} - \theta') + \frac{\gamma'\gamma''}{2\gamma_{,}} dt \sin(2ht + 2\theta_{,} - \theta' - \theta'') + \frac{\gamma'\gamma''}{2\gamma_{,}} dt \sin(\theta' - \theta'').$$

Pour intégrer cette expression, observons que, d'après la forme que l'on a supposée aux différentielles de $\gamma' \sin\theta'$ et de $\gamma' \cos\theta'$, on a

$$\int \gamma' \sin(ht + \theta_{,} - \theta') = -\frac{\gamma'}{h}\cos(ht + \theta_{,} - \theta') + \frac{\gamma''}{h^2}\cos(ht + \theta_{,} - \theta''),$$

$$\int \gamma'\gamma'' \sin(2ht + 2\theta_{,} - \theta' - \theta'') = -\frac{\gamma'\gamma''}{2h}\cos(2ht + 2\theta_{,} - \theta' - \theta'') - \frac{\gamma''^2}{4h^2}\cos(2ht + 2\theta_{,} - 2\theta'').$$

On a d'ailleurs

$$\frac{d.\gamma'^2 \sin 2\theta'}{dt} = 2\frac{d.\gamma'^2 \sin\theta' \cos\theta'}{dt} = 2\gamma'\gamma'' \cos(\theta' + \theta''),$$

$$\frac{d.\gamma'^2 \cos 2\theta'}{dt} = \frac{d.\gamma'^2 \cos^2\theta' - d.\gamma'^2 \sin^2\theta'}{dt} = -2\gamma'\gamma'' \sin(\theta' + \theta'');$$

d'où l'on conclut

$$\int \gamma'^2 \sin 2(ht + \theta_{,} - \theta') = -\frac{\gamma'^2}{2h}\cos(2ht + 2\theta_{,} - 2\theta') - \frac{\gamma'\gamma''}{2h^2}\cos(2ht + 2\theta_{,} - \theta' - \theta'').$$

On a enfin

$$\gamma'\gamma'' \sin(\theta' - \theta'') = \gamma' \sin\theta' \frac{d.\gamma' \sin\theta'}{dt} + \gamma' \cos\theta' \frac{d.\gamma' \cos\theta'}{dt} = \frac{d.\gamma'^2 (\sin^2\theta' + \cos^2\theta')}{2\,dt} = \frac{1}{2}\frac{d\gamma'^2}{dt};$$

et, par suite,

$$\int \gamma'\gamma'' \, dt \sin(\theta' - \theta'') = \frac{1}{2}\gamma'^2.$$

Si l'on substitue ces diverses intégrales dans l'expression de γ, qu'on néglige les termes qui ont $\frac{\gamma''}{4}$ pour facteur, ce qu'on peut faire maintenant sans erreur sensible, puisqu'on est assuré qu'ils n'augmentent pas par l'intégration, on aura

$$\gamma = \gamma_{,} + \gamma' \cos(ht + \theta_{,} - \theta') - \frac{\gamma'^2}{4\gamma_{,}} \cos(2ht + 2\theta_{,} - 2\theta') + \frac{1}{4}\frac{\gamma'^2}{\gamma_{,}},$$

et la valeur de θ deviendra

$$\theta = \theta_{,} + ht - \frac{\gamma'}{\gamma_{,}} \sin(ht + \theta_{,} - \theta').$$

En négligeant le cube de γ', on déduit de là

$$\gamma^2 = \gamma_{,}^2 + 2\gamma\gamma' \cos(ht + \theta_{,} - \theta') + \gamma'^2,$$

$$\gamma\gamma' \cos(\theta - \theta') = \gamma\gamma' \cos(ht + \theta_{,} - \theta') + \gamma'^2;$$

et, par suite,

$$3\gamma^2 + 4\gamma'^2 - 7\gamma\gamma' \cos(\theta - \theta') = 3\gamma_{,}^2 - \gamma\gamma' \cos(ht + \theta_{,} - \theta').$$

Le terme en γ'^2 disparaît donc de la valeur de ds, et le second terme de cette expression, après son développement, ne renferme, comme on voit, qu'un terme constant et un terme périodique; il ne produit donc aucun terme proportionnel au carré du temps dans l'expression de la longitude moyenne de la Lune, et, par conséquent, l'équation séculaire de cette longitude n'en est pas altérée.

NOTE 3.

Sur la masse de la Lune. (Page 598.)

Il existe, dans la théorie du système du monde, trois phénomènes qui peuvent servir à déterminer le rapport de la masse de la Lune à celle de la Terre. On peut le déduire, 1° de l'inégalité que produit l'action de la Lune dans le mouvement de la Terre autour du Soleil, en comparant l'expression du coefficient de cette inégalité déterminée par la théorie à sa valeur donnée par l'observation; 2° du phénomène des marées, en comparant les marées lunaires aux marées qui résultent de la seule action du Soleil; 3° enfin, du phénomème de la nutation de l'axe terrestre, en comparant les formules de la théorie au coefficient déduit de l'observation. Il ne sera pas inutile de présenter ici succinctement les résultats de ces trois méthodes, pour en faciliter la comparaison.

1°. Désignons par m la masse de la Lune, par M celle de la Terre, et par ν le rapport de ces deux masses, en sorte qu'on ait $\nu = \frac{m}{M}$. Soient X, Y, Z les coordonnées rectangulaires du centre commun de gravité de la Terre et de la Lune, rapportées à trois axes rectangulaires passant par le centre du Soleil. Soient X_1, Y_1, Z_1 les coordonnées du centre de gravité de la Terre, et x_1, y_1, z_1 les coordonnées du centre de gravité de la Lune relatives aux mêmes axes et à la même origine; d'après ce qui a été dit n° 126, on aura

$$X_1 = X - \nu x_1, \quad Y_1 = Y - \nu y_1, \quad Z_1 = Z - \nu z_1.$$

Il suffira donc, pour avoir égard à l'action de la Lune sur la Terre, de substituer dans les formules qui déterminent le mouvement de la Terre autour du Soleil, les trois quantités $X - \nu x_1$, $Y - \nu y_1$, $Z - \nu z_1$, à la place des coordonnées X, Y et Z, et les formules résultantes feront connaître les perturbations causées dans le mouvement de la Terre par l'aotion de la Lune.

Cela posé, désignons par V la longitude du centre commun de gravité de la Terre et de la Lune, et par $V + \delta v$ la longitude de la

Terre, comptées l'une et l'autre dans le plan de l'écliptique vraie, à partir de son intersection commune avec le plan des X et Y, que nous prendrons pour l'axe des X; on aura

$$\cos V = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},$$

$$\cos (V + \delta v) = \frac{X - \nu x_1}{\sqrt{(X - \nu x_1)^2 + (Y - \nu y_1)^2 + (Z - \nu z_1)^2}};$$

on tire de là, en négligeant le carré de ν,

$$\sin V \delta v = \frac{\nu x_1}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} - \frac{\nu X (X x_1 + Y y_1 + Z z_1)}{(X^2 + Y^2 + Z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

On peut, dans cette formule, dont tous les termes sont déjà multipliés par ν, substituer les coordonnées x, y, z du centre de la Lune relatives au centre de la Terre aux coordonnées x_1, y_1, z_1 du centre de la Lune rapporté au centre commun de gravité de la Terre et de la Lune. On peut aussi supposer que X, Y et Z représentent les coordonnées elliptiques du centre de la Terre, et, en désignant, comme dans le n° 1, par x', y', z' les coordonnées elliptiques du centre du Soleil rapportées au centre de la Terre, on aura

$$X = -x', \quad Y = -y', \quad Z = -z';$$

on a d'ailleurs $r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$; d'où l'on conclura

$$\sin V \delta v = \frac{\nu x' (x x' + y y' + z z')}{r'^3} - \frac{\nu x}{r'}.$$

Si l'on néglige la latitude du Soleil et le carré de l'inclinaison γ de l'orbe lunaire à l'écliptique, que l'on nomme respectivement v et v' les longitudes de la Lune et du Soleil, comptées l'une et l'autre sur le plan de l'écliptique vraie, à partir de l'axe des x, on aura, n° 1,

$$x = r \cos v, \quad y = r \sin v;$$

$$x' = r' \cos v', \quad y' = r' \sin v', \quad z' = 0.$$

On a d'ailleurs $V = v' + 180°$, et par conséquent $\delta v = \delta v'$; on

trouvera ainsi

$$\sin \nu' \delta \nu' = \frac{\nu r}{r'} [\cos(\nu - \nu') \cos \nu' - \cos \nu];$$

d'où l'on conclut

$$\delta \nu' = \frac{\nu r}{r'} \sin(\nu - \nu').$$

Delambre a trouvé 7″,50 pour la valeur du coefficient de cette inégalité, déduite des observations. On peut d'ailleurs supposer ici, n° 139,

$$\frac{r}{r'} = \frac{a}{a'} = 0,00252551;$$

d'où l'on conclura

$$\nu = \frac{1}{69,456},$$

valeur qui surpasse celle que nous avons attribuée à la quantité ν dans le n° 136, et que l'on a déduite du phénomène des marées.

2°. En effet, les actions du Soleil et de la Lune, soit pour soulever les eaux de la mer, soit pour faire tourner la Terre autour de son centre de gravité, sont entre elles en raison directe des masses de ces deux astres, et en raison inverse des cubes de leurs distances au centre de la Terre, n° 34, livre IV. En appelant donc σ ce rapport, on a $\sigma = \dfrac{\frac{m}{r^3}}{\frac{M'}{r'^3}}$, en nommant M′ la masse du Soleil, r et r' les distances moyennes de la Lune et du Soleil au centre de la Terre. Si l'on nomme p et P les parallaxes de ces deux astres, on a d'ailleurs $\dfrac{\sin P}{\sin p} = \dfrac{r}{r'}$; on aura donc

$$\sigma = \frac{M \nu \sin^3 P}{M' \sin^3 p}.$$

En conservant aux quantités l, g, π, T la signification que nous leur avons attribuée, n° 28, livre II, on a, par la formule (n) de ce numéro,

$$\frac{M}{M'} = \frac{g T^2 \sin^3 P}{4 \pi^2 l}.$$

On conclura de là

$$\nu = \frac{4\pi^2 l \sigma}{g T^2 \sin^2 p}, \qquad (a)$$

formule indépendante de la parallaxe du Soleil. Pour la réduire en nombres, observons qu'on a, n° 136,

$$\sin p = \frac{D}{D'} \sin p' = \frac{914}{915} \sin 3421'',$$

et que, par les n°s 28, livre Ier, et 87, livre VI, on a, d'ailleurs,

$$l = 6364551^{m}, \quad g = 9^{m},81645, \quad T = 31558152, \quad \pi = 3,14159265;$$

d'où l'on conclut

$$\nu = (0,0056526)\,\sigma.$$

Il ne reste plus qu'à substituer pour σ sa valeur. Or, par la discussion d'une longue série d'observations des marées, on a trouvé

$$\sigma = 2,35333;$$

ce qui donne

$$\nu = \frac{1}{75,173}.$$

3°. En troisième lieu, si l'on désigne par N le coefficient de la nutation en latitude, par ψ la précession annuelle des équinoxes, et si l'on conserve à la lettre σ sa signification précédente, en observant que les quantités que nous avons désignées par B' et c', n° 34, livre IV, ont été représentées par γ et $(1-g)n$ dans le n° 5 du livre VII, on aura

$$N = -\frac{\psi\gamma\sigma}{(1+\sigma)(1-g)n}.$$

Selon M. Bessel, au commencement de ce siècle, on avait $\psi = 50'',363541$; on a d'ailleurs, d'après les observations, n° 135,

$$1-g = -0,0040217, \quad n = 17325593'',54, \quad \gamma = 0,0896734;$$

au moyen de ces valeurs, on trouve

$$N = \frac{(13'',36926)\,\sigma}{1+\sigma}$$

pour la valeur de N ou du coefficient de la nutation exprimé en secondes. Les astronomes ne sont point encore parfaitement d'accord sur la valeur de cette quantité déduite des observations; d'après le docteur Brinckley, on a

$$N = 9'',25;$$

ce qui donne $\sigma = 2,24555$; et, par suite, au moyen de l'équation (a),

$$\nu = \frac{1}{78,782},$$

valeur qui diffère peu de celle que nous avons déduite de la théorie des marées. La différence serait plus considérable en supposant, d'après M. Lindenau, le coefficient de la nutation égal à 8″,977; en adoptant cette valeur, on trouve que la masse de la Lune serait alors $\frac{1}{87}$ à peu près de celle de la Terre. Bradley avait trouvé ce même coefficient de 9″,00; Mayer le supposait de 9″,65; M. Plana, en le déduisant d'une série d'observations de la polaire, faites par lui-même avec le plus grand soin, l'a trouvé de 8″,925; enfin, dans ces derniers temps, le docteur Robinson, d'Armagh, par la comparaison de 8000 observations d'étoiles différentes, a trouvé ce même facteur égal à 9″,234. Cette valeur, qui se rapproche beaucoup de celle donnée par le docteur Brinckley, a l'avantage de donner, pour la masse de la Lune, une valeur beaucoup plus concordante avec celle qu'on déduit des autres phénomènes célestes, que celle de M. Lindenau; elle mérite donc, sous ce rapport, de lui être préférée. Au reste, c'est là un point qui a besoin d'être éclairci, et sur lequel il est bon d'appeler de nouveau l'attention des astronomes.

NOTE 4.

Sur la formation de Tables lunaires calculées d'après le seul principe de la gravitation universelle. (Page 613.)

Pour déterminer à chaque instant la position de la Lune par rapport à l'écliptique, il suffit de substituer dans les formules d'où dépendent les trois coordonnées astronomiques, c'est-à-dire sa *longitude*, sa *latitude* et sa *parallaxe équatoriale*, à la place des moyens mouvemens de la Lune et du Soleil, leurs valeurs correspondantes à l'instant que l'on considère.

Pour cela on formera d'abord, d'après les observations les plus récentes, les valeurs de la *longitude moyenne* et de l'*anomalie moyenne* de la Lune, ainsi que celle de la longitude du nœud ascendant de son orbite, correspondantes à l'instant que l'on a choisi pour époque.

Ensuite, d'après le moyen mouvement de la Lune dans son orbite, donné également par la discussion des observations les plus exactes et les moyens mouvemens du périgée et des nœuds, déterminés soit par la théorie, nº 135, soit par l'observation, on formera les valeurs des accroissemens de la longitude moyenne, de l'anomalie moyenne et de la longitude du nœud ascendant, dans l'intervalle de temps que l'on a pris pour unité.

Enfin, au moyen des formules du nº 135, on formera les équations séculaires de ces accroissemens.

Au moyen de ces données, on pourra calculer avec une grande facilité les valeurs de la *longitude moyenne*, de l'*anomalie moyenne* et de la *longitude du nœud*, après un temps quelconque t. En effet, on peut décomposer chacune de ces valeurs en trois parties distinctes : 1° la partie constante ou l'époque; 2° la partie proportionnelle au temps; 3° la partie séculaire ou proportionnelle au carré et aux puissances supérieures du temps : or, chacune de ces parties pourra se calculer séparément, d'après les données précédentes fournies par la théorie et l'observation.

On répétera une opération analogue relativement au Soleil, et l'on aura ainsi toutes les quantités nécessaires pour la réduction en nombres des formules qui déterminent le lieu de la Lune par rapport à l'écliptique, et pour la construction des Tables.

Nous avons donné, dans les nos 137 et 138, les expressions finales de la *longitude* et de la *parallaxe équatoriale* de la Lune, sous la forme la plus convenable à leur réduction en nombres; mais, comme nous l'avons observé no 145, pour faciliter la construction des Tables lunaires, et pour diminuer autant que possible le nombre des argumens, il sera bon de substituer dans l'expression de la latitude, no 141, à la place du moyen mouvement de la Lune, son mouvement vrai, conformément à l'usage adopté par les astronomes qui ont construit les Tables lunaires les plus récentes.

Soit donc S la somme des équations de la longitude vraie, de manière que l'on ait $v = nt + \varepsilon + S$; nommons $\bar{\xi}$, $\bar{\varphi}$, $\bar{\eta}$ ce que deviennent les trois quantités ξ, φ, η, no 132, augmentées de la somme des équations de la longitude, en sorte qu'on ait

$$\bar{\xi} = \xi + S, \quad \bar{\varphi} = \varphi + S, \quad \bar{\eta} = \eta + S.$$

En introduisant les trois quantités $\bar{\xi}$, $\bar{\varphi}$, $\bar{\eta}$ dans la formule du no 141, par une analyse inverse de celle que nous avons suivie no 145, on trouvera, pour l'expression de la latitude,

$$\begin{aligned}
& \ 18522'',1 \sin \bar{\eta} \\
& -\ 6'',4 \sin 3\bar{\eta} \\
& -\ 12'',0 \sin(\bar{\varphi} - \bar{\eta}) \\
& -\ 1'',2 \sin(\bar{\varphi} + \bar{\eta}) \\
& +\ 25'',9 \sin(\varphi' - \bar{\eta}) \\
& +\ 24'',5 \sin(\bar{\varphi}' + \bar{\eta}) \\
& +\ 25'',6 \sin(2\bar{\varphi} - \bar{\eta}) \\
& +\ 523'',8 \sin(2\bar{\xi} - \bar{\eta}) \\
& +\ 0'',9 \sin(2\bar{\xi} + \bar{\eta}) \\
& -\ 16'',7 \sin(2\bar{\xi} - \bar{\varphi} - \bar{\eta}) \\
& +\ 3'',1 \sin(2\bar{\xi} + \bar{\varphi} - \bar{\eta}) \\
& +\ 20'',9 \sin(2\bar{\xi} - \varphi' - \bar{\eta})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \; 10'',3 \sin(2\bar{\xi} + \varphi' - \bar{\eta}) \\
&- \; 4'',8 \sin(2\bar{\xi} - 2\bar{\varphi} - \bar{\eta}) \\
&- \; 8'',0 \sin \nu.
\end{aligned}
$$

En réunissant cette expression à celles qui déterminent la *longitude vraie* et la *parallaxe équatoriale*, nos 137 et 138, on aura les formules les plus simples et les plus correctes dans l'état actuel de la science, qu'on puisse employer pour la construction des Tables lunaires.

NOTE 5.

Sur l'évaluation du coefficient de l'équation annuelle. (Page 628.)

Nous avons présenté, dans le tableau n° 141, la comparaison des résultats de la théorie à ceux de l'observation, relativement aux inégalités de la longitude. La différence la plus sensible qu'offre le rapprochement de ces résultats, est celle qui tombe sur le coefficient de l'équation annuelle ou de l'inégalité du mouvement de la Lune en longitude, qui dépend de l'argument φ'. En effet, ce coefficient, selon les Tables de Burckhardt, serait de 673″,3, tandis que, par la conversion en nombres de nos formules, nous l'avons trouvé de 668″,932, valeur qui s'écarte peu de celle que lui a assignée M. Plana dans son ouvrage sur la théorie de la Lune. Cette différence, beaucoup trop considérable pour ne pas tenir à quelque cause particulière, avait déjà été signalée par M. Poisson lorsqu'il s'occupait de comparer les résultats obtenus par MM. Plana et Damoiseau, et cette circonstance nous a engagé à déterminer, avec un soin tout particulier, la valeur analytique du coefficient de l'inégalité dont il s'agit. Nous avons été amené ainsi, par une marche très-différente de celle qu'a suivie M. Plana, à un résultat à peu près identique avec le sien ; dès lors il semble que c'est uniquement à quelque incorrection dans les observations, qu'il faut attribuer la différence de près de *cinq* secondes qui existe entre les résultats de la théorie et de l'observation ; mais il reste-

rait encore à expliquer le singulier accord qui se rencontre, au contraire, entre le résultat obtenu par M. Damoiseau et celui qui a été tiré des Tables de Burckhardt (*). Ce point de la théorie lunaire nous a paru assez digne d'attention pour en faire l'objet d'un examen particulier.

Nous supposerons qu'on a sous les yeux le Mémoire de M. Damoiseau (*Mémoires de l'Institut, Savants étrangers*, tome Ier, page 42). En supposant la *longitude moyenne* de la Lune développée en une série de sinus d'angles proportionnels à sa *longitude vraie* et à celle du Soleil, et en représentant par $C^{(16)} e' \sin(v' - \omega')$ le terme de cette série qui dépend de l'angle v' ou de la *longitude vraie* du Soleil, M. Damoiseau trouve, pour déterminer le coefficient $C^{(16)}$, l'expression suivante, dans laquelle nous avons négligé seulement, pour simplifier la formule, les termes dépendans des excentricités des orbites de la Lune et du Soleil :

$$\begin{aligned}
mC^{(16)} = {} & \frac{27}{8} r_2^{(0)} \frac{x_4^{(30)}}{2-2m} \left[\frac{x_4^{(33)}}{2-3m} + \frac{x_4^{(34)}}{2-m} \right] \\
& - 2r_3^{(0)} A^{(16)} + 3r_4^{(0)} A^{(30)} \left[A^{(33)} + A^{(34)} \right] \\
& + \frac{3}{2} \left\{ \frac{r_3^{(0)} x_4^{(33)}}{2-3m} + \frac{r_3^{(0)} x_4^{(34)}}{2-m} - \frac{2r_2^{(0)}}{m} \left[x_5^{(33)} - x_5^{(34)} \right] \right\} A^{(30)} \\
& + \frac{3}{2} \left[\frac{r_3^{(0)} x_4^{(30)}}{2-2m} + \frac{2r_2^{(0)} x_5^{(30)}}{m} \right] A^{(33)} \\
& + \frac{3}{2} \left[\frac{r_3^{(0)} x_4^{(30)}}{2-2m} - \frac{2r_2^{(0)} x_5^{(30)}}{m} \right] A^{(34)} \\
& + \frac{3}{2} r_2^{(0)} \left[x_4^{(33)} - x_4^{(34)} + \frac{3}{2} x_4^{(30)} \right] C^{(30)} \\
& - \frac{3}{2} r_2^{(0)} x_4^{(30)} \left[C^{(33)} - C^{(34)} \right] \\
& - 6 r_5^{(0)} A^{(30)^2} A^{(16)} - 6 r_2^{(0)} x_5^{(30)} A^{(30)} A^{(16)} \\
& - \left[\frac{9 r_4^{(0)} x_4^{(30)}}{4(1-m)} + \frac{12(1-m) r_3^{(0)} x_5^{(30)}}{(2-m)(2-3m)} \right] A^{(30)} A^{(16)}.
\end{aligned}$$

D'après la notation de M. Damoiseau, en négligeant, comme

(*) Voyez page 624.

nous le faisons, les excentricités des orbites de la Lune et du Soleil, on trouve

$$r_3^{(0)} = 1, \quad r_4^{(0)} = 1, \quad r_2^{(0)} = 1;$$

$$r_2^{(0)}\, x_4^{(30)} = m^2, \quad x_4^{(33)} = \frac{7}{2} m^2, \quad x_4^{(34)} = -\frac{1}{2} m^2, \quad r_3^{(0)}\, x_4^{(33)} = \frac{7}{2} m^2;$$

$$r_3^{(0)}\, x_4^{(34)} = -\frac{1}{2} m^2, \quad x_5^{(33)} - x_5^{(34)} = 4m^2, \quad r_3^{(0)}\, x_4^{(30)} = m^2;$$

$$r_2^{(0)}\, x_5^{(30)} = m^2, \quad x_4^{(33)} - x_4^{(34)} + \frac{3}{2}\, x_4^{(30)} = \frac{11}{2} m^2;$$

$$r_5^{(0)} = 1, \quad r_4^{(0)}\, x_4^{(30)} = m^2, \quad r_3^{(0)}\, x_5^{(30)} = m^2.$$

L'expression précédente, en y substituant ces valeurs, devient, aux quantités près que nous négligeons,

$$\left.\begin{aligned}
mC^{(16)} = {} & \frac{27}{32}\,\frac{m^2}{1-m}\left(\frac{7m^2}{2-3m} - \frac{m^2}{2-m}\right) \\
& - 2A^{(16)} + 3A^{(30)}\left[A^{(33)} + A^{(34)}\right] \\
& + \frac{3}{4}\left(\frac{7m^2}{2-3m} - \frac{m^2}{2-m} - 16m\right)A^{(30)} \\
& + \frac{3}{4}\left(\frac{m^2}{1-m} + 4m\right)A^{(33)} \\
& + \frac{3}{4}\left(\frac{m^2}{1-m} - 4m\right)A^{(34)} \\
& + \frac{3}{4}m^2\left[11\,C^{(30)} - 2C^{(33)} + 2C^{(34)}\right] \\
& - 6A^{(30)2}A^{(16)} - 6m^2A^{(30)}C^{(16)} - \frac{21}{4}m^2A^{(30)}A^{(16)}.
\end{aligned}\right\}\ (a).$$

Cette valeur coïncide avec celle du même coefficient donnée *Mécanique céleste*, tome III, page 229, dans l'ordre d'approximation où s'est restreint l'illustre auteur de cet ouvrage.

On trouve, dans l'ouvrage de M. Plana, les valeurs des coefficiens indéterminés $A^{(16)}$, $A^{(30)}$, $A^{(33)}$, etc., qui se rapportent à l'expression du rayon vecteur de la Lune, développée en série d'angles proportionnels à la longitude vraie, ainsi que celles des coefficiens $C^{(30)}$, $C^{(33)}$, $C^{(34)}$ qui se rapportent à l'expression de la longitude moyenne développée de la même manière. Ces valeurs, exprimées en suites ordonnées par rapport aux puissances croissantes de la quantité m, qui désigne le rapport des moyens

mouvemens du Soleil et de la Lune, donnent

$$A^{(16)} = -\frac{3}{2}m^3 + \frac{585}{16}m^4 + \frac{1543}{6}m^5 + \frac{235421}{192}m^6 + \frac{8109311}{1728}m^7 + \frac{80780389}{55296}m^8,$$

$$A^{(30)} = m^2 + \frac{19}{6}m^3 + \frac{64}{9}m^4 + \frac{1475}{108}m^5 + \frac{59717}{2592}m^6 + \frac{498599}{15552}m^7,$$

$$A^{(33)} = \frac{7}{2}m^2 + \frac{133}{8}m^3 + \frac{1003}{16}m^4 + \frac{3203}{16}m^5 + \frac{24589}{48}m^6 + \frac{1750331}{2304}m^7.$$

$$A^{(34)} = -\frac{m^2}{2} - \frac{19}{24}m^3 - \frac{317}{144}m^4 - \frac{2171}{432}m^5 + \frac{4183}{1296}m^6 + \frac{7058371}{62208}m^7;$$

$$C^{(30)} = -\frac{11}{8}m^2 - \frac{59}{12}m^3 - \frac{893}{72}m^4 - \frac{2855}{108}m^5 - \frac{4133959}{82944}m^6,$$

$$C^{(33)} = -\frac{77}{16}m^2 - \frac{413}{16}m^3 - \frac{7003}{64}m^4 - \frac{6077}{16}m^5 - \frac{6303041}{6144}m^6,$$

$$C^{(34)} = \frac{11}{16}m^2 + \frac{59}{48}m^3 + \frac{29}{576}m^4 - \frac{1129}{432}m^5 + \frac{4777597}{165888}m^6.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (a), et remplaçant dans le second membre $C^{(16)}$, qui est déjà multiplié par un coefficient de l'ordre m^4, par la quantité $3m - \frac{735}{16}m^3 - \frac{1261}{4}m^4$, qui résulte des premières approximations, on trouve, toute réduction faite,

$$C^{(16)} = 3m - \frac{735}{16}m^3 - \frac{1261}{4}m^4 - \frac{566957}{384}m^5 - \frac{1753499}{432}m^6 - \frac{1962795817}{110592}m^7.$$

Le dernier terme de cette valeur est susceptible d'une légère correction qui tient à ce que, dans les expressions des quantités que M. Damoiseau nomme $x_i^{(0)}$, $x_i^{(1)}$, etc., $r_i^{(0)}$, $r_i^{(1)}$, etc., la quantité désignée par $\overline{m}^2$ diffère, aux quantités près de l'ordre m^4, de celle que nous avons nommée m^2, n° 8 (*Mécanique céleste*, tome III, page 227); en ayant égard à cette différence, nous nous sommes assuré qu'il n'en résultait qu'une correction portant sur les termes de l'ordre m^7, dans la valeur du coefficient $C^{(16)}$, correction d'ailleurs dont l'effet est tout-à-fait insensible.

M. Plana, pour la valeur du même coefficient, a trouvé

$$C^{(16)} = 3m - \frac{735}{16}m^3 - \frac{1261}{4}m^4 - \frac{572357}{384}m^5 - \frac{3273241}{576}m^6 - \frac{9733066967}{55296}m^7.$$

Cette valeur coïncide avec celle donnée par M. Damoiseau, jusqu'aux termes de l'ordre m^4 inclusivement; or, les différences qui peuvent exister entre des quantités de l'ordre m^5 et des ordres supérieurs, sont trop peu importantes pour expliquer la différence de 5″ qu'on remarque entre la valeur que M. Damoiseau attribue au coefficient de l'équation annuelle, et celle que M. Plana et moi nous avons trouvée par des méthodes différentes : le désaccord ne peut provenir non plus des termes de la valeur du coefficient $C^{(16)}$, qui dépendent des excentricités e et e' des orbites de la Lune et du Soleil; il faut donc supposer que, puisque les formules analytiques de M. Damoiseau paraissent suffisamment correctes, quelque erreur s'est glissée dans les calculs numériques qu'a occasionnés la réduction de ses formules.

On voit, par ce qui précède, que malgré tout le soin pris par M. Damoiseau pour la vérification de ses calculs, le coefficient de l'équation annuelle se trouve déjà en défaut dans les termes de l'ordre m^5. Cela tient sans doute à l'omission de quelqu'une des combinaisons qui devaient entrer dans la formation de ce coefficient, combinaisons qui vont en se multipliant à mesure que l'on s'avance dans l'ordre des approximations. L'application de la méthode de Laplace semble, sous ce rapport, présenter de grandes difficultés, puisque M. Damoiseau, qui en a été le laborieux continuateur, n'a pu même parvenir à les surmonter. En effet, en soumettant à une vérification analogue à celle que nous avons fait subir à l'*équation annuelle* plusieurs des inégalités déterminées par cet astronome, nous sommes parvenu à des résultats à peu près semblables. Nous n'en citerons, pour abréger, que deux nouveaux exemples.

En désignant, comme dans le n° 5, par c et g les vitesses moyennes du périgée et des nœuds de l'orbite lunaire, et en substituant à la place des quantités $x_2^{(1)}$, $x_3^{(1)}$, etc., leurs valeurs dans les formules données par M. Damoiseau, en faisant de plus, pour abréger, abstraction des termes dépendans des excentricités des orbites du Soleil et de la Lune, on trouve (*Mémoires de l'Institut, Savants étrangers*, tome Ier, pages 355 et 435)

$$c^2 - 1 = -\frac{3}{2}m^2 + (15m^2 - 24m^3)\,A^{(30)} + \frac{3}{2}m^2\,A^{(32)}$$
$$- \left(\frac{15}{2}m^2 - \frac{3}{2}m^3 + \frac{81}{16}m^4\right) A^{(31)}$$
$$- \frac{9}{2}m^2\,C^{(30)} + \frac{9}{2}m^2\,C^{(31)} - \frac{3}{2}m^2\,C^{(32)};$$

$$g^2 - 1 = \frac{3}{2}m^2 - \left(\frac{3}{2}m^2 + \frac{3}{2}m^3 + \frac{9}{16}m^4 - \frac{171}{128}m^5\right) B^{(0)} - 3m^2\,A^{(0)}$$
$$- 3m^2\,B^{(1)} + \frac{3}{2}m^2\,C^{(30)} + \frac{15}{2}m^2\,A^{(30)^2} + 3m^2\,A^{(30)}\,B^{(0)}.$$

D'après M. Plana on a, d'ailleurs,

$$A^{(31)} = \frac{15}{8}m + \frac{273}{32}m^2 + \frac{13875}{512}m^3,$$
$$A^{(32)} = -\frac{5}{8}m^2;$$
$$B^{(0)} = \frac{3}{8}m + \frac{3}{32}m^2 - \frac{273}{512}m^3 - \frac{4147}{2048}m^4,$$
$$B^{(1)} = -\frac{75}{128}m^4;$$
$$C^{(31)} = -\frac{15}{4}m - \frac{285}{16}m^2,$$
$$C^{(32)} = 2m^2.$$

Les valeurs de $A^{(30)}$ et $C^{(30)}$ ont été données précédemment ; la substitution de ces valeurs donnera

$$c^2 - 1 = -\frac{3}{2}m^2 - \frac{225}{16}m^3 - \frac{4035}{64}m^4 - \frac{260413}{1024}m^5,$$
$$g^2 - 1 = \frac{3}{2}m^2 - \frac{9}{16}m^3 - \frac{237}{64}m^4 - \frac{10229}{1024}m^5 - \frac{139117}{12288}m^6.$$

Si l'on compare ces valeurs à celles des mêmes quantités trouvées nos 24 et 31, on verra que la première n'est exacte que jusqu'aux quantités de l'ordre m^4 inclusivement, et que la seconde cesse de l'être au delà de l'ordre m^5.

On peut conclure de là que, dans la théorie de la Lune, la méthode du développement en série par les approximations successives, en même temps qu'elle est la plus complète sous le rapport analytique, puisqu'elle conduit directement à exprimer

toutes les inconnues du problème au moyen d'un petit nombre de données fournies par l'observation, ce qui est, en définitive, le vrai but de toute l'astronomie théorique; cette méthode, dis-je, a encore l'avantage d'être la plus exacte, parce que seule elle offre le moyen de saisir, sans confusion, le nombre effrayant de combinaisons auxquelles il est nécessaire d'avoir égard pour former les différens termes dont se compose chaque coefficient lorsqu'on porte, comme nous l'avons fait, les approximations assez loin pour atteindre, par la théorie, la même précision qu'on peut attendre de l'observation. La méthode imaginée par Clairaut, et perfectionnée par Laplace dans la *Mécanique céleste*, a pu suffire aux premiers géomètres qui s'occupèrent du mouvement de la Lune, et qui ne voulaient que montrer comment on pouvait expliquer ses principales inégalités par la loi de la gravitation universelle; elle peut encore donner du problème une solution numérique satisfaisante, lorsqu'on pousse les développemens aussi loin que l'a fait M. Damoiseau, parce que beaucoup de quantités qui ont été omises par lui, n'ont souvent aucune valeur appréciable dans l'ordre des quantités sensibles, ou qu'il s'établit entre elles une espèce de compensation; mais, d'après les exemples précédens, que nous aurions pu multiplier encore, on doit reconnaître que, par un vice sans doute inhérent à la méthode qu'il a employée, la solution même de M. Damoiseau, malgré tout le soin qu'a pu y apporter ce consciencieux astronome, ne satisfait point aux principes d'une théorie rigoureuse, qui veut que l'on ait égard, dans chacune des approximations successives, à toutes les quantités d'un même ordre, abstraction faite de leur grandeur relative (*).

(*) M. Damoiseau, en parlant de son Mémoire sur la théorie lunaire, dit, dans la préface de ses Tables : « Depuis sa publication on a eu égard à plusieurs » termes omis dans les développemens de certaines fonctions lunaires. Les » changemens qui s'ensuivent, quoique peu sensibles sous le rapport numé- » rique, ne peuvent cependant être négligés pour l'exactitude de l'analyse. » Ces assertions sont beaucoup trop vagues pour qu'on puisse s'en contenter; elles ne font, d'ailleurs, que confirmer la justesse de nos observations.

FIN DES NOTES.

THÉORIE ANALYTIQUE

DU

SYSTÈME DU MONDE.

SUPPLÉMENT AU LIVRE VII.

Sur l'équation séculaire de la Lune.

Dans le n° 94 du VII[e] Livre de la *Théorie du Système du Monde*, j'ai donné l'expression analytique de l'*équation séculaire* de la longitude moyenne de la Lune en n'ayant égard qu'à la première puissance de la force perturbatrice du Soleil ; je me suis dispensé de prendre en considération les quantités dépendantes du carré et des puissances supérieures de cette force, parce que, d'après une remarque de M. Plana, qui a porté l'approximation jusqu'aux termes du 7[e] ordre par rapport à la très-petite quantité m qui exprime le rapport des moyens mouvements du Soleil et de la Lune (*), les inégalités qui en résultent, sans être absolument insensibles, se compensent de telle manière, qu'elles n'apportent qu'une correction à peu près insignifiante à la valeur de l'*équation séculaire* déterminée par la première approximation. Cependant j'ai

(*) *Voir* la note II du VII[e] Livre.

senti qu'un résultat aussi important dans la théorie de la Lune ne pouvait être adopté *de confiance*, quelque garantie que pût présenter l'habileté de l'astronome qui l'avait le premier énoncé; je me suis donc décidé à reprendre en entier le calcul du coefficient de l'*équation séculaire* en poussant les approximations aussi loin que l'avaient fait MM. Damoiseau et Plana, l'un dans son beau Mémoire couronné par l'Académie des Sciences en 1820, l'autre dans son grand ouvrage publié en 1830, de manière à lever désormais toute incertitude sur un point encore mal connu de la théorie des perturbations lunaires. C'est l'objet que je me suis proposé dans ce Supplément; une discussion récente, qui s'est élevée au sein de plusieurs sociétés savantes, sur la véritable valeur que la théorie assigne au coefficient de cette inégalité et sur les formules les plus convenables à employer pour le déterminer avec exactitude, n'a fait que me confirmer davantage dans le dessein que j'avais formé, et je n'ai pas hésité à entreprendre le travail long et pénible que cette recherche exigeait, du moment que j'ai été assuré que ses résultats pourraient être de quelque utilité à la fois pour l'astronomie théorique et pratique. En effet, les astronomes ne sont guère plus d'accord que les géomètres sur l'évaluation exacte du coefficient de l'*équation séculaire* de la Lune. Dunthorne, qui, après que Halley eut reconnu pour la première fois l'existence de cette équation, tenta de le déterminer par la comparaison des observations, le trouva de 9″,63. Mayer, dans ses premières Tables, le réduisit à 6″,67; il l'a élevé ensuite à 8″,58 dans les dernières. Lalande, par ses

propres investigations, confirma le résultat de Dunthorne. Bouvard, comme on l'a vu dans le Chapitre VII, par une nouvelle discussion des anciennes éclipses déjà connues, et de celles qu'il avait extraites d'un manuscrit arabe d'Ibn Junis, trouva un résultat peu différent de 9″,69, c'est-à-dire du coefficient que Laplace avait déterminé par la théorie en n'ayant égard qu'à la première puissance de la force perturbatrice : c'est ce résultat que Mason a adopté dans ses Tables. Enfin, des travaux récents faits par M. Airy, le savant directeur de l'observatoire de Greenwich, tendent à montrer que toutes ces évaluations sont de quelques secondes au-dessous de la vérité, et que pour représenter les anciennes observations qu'il a eu à considérer, il devrait être élevé à 12″ au moins et peut-être encore au delà. Il était donc d'un grand intérêt de savoir avec précision ce que déciderait la théorie sur une question où sans doute pendant longtemps encore elle doit devancer la pratique en exactitude, soit à cause de l'incertitude des observations anciennes, soit à raison du trop court intervalle que les nouvelles embrassent ; mais les méthodes suivies jusqu'à présent pour déterminer le coefficient de l'équation séculaire de la Lune par l'analyse m'ont paru peu propres à atteindre ce but. En effet, tous les géomètres et les astronomes qui se sont occupés de le déterminer de cette manière en portant plus ou moins loin les approximations, se sont invariablement astreints à développer la formule donnée par Laplace dans la *Mécanique céleste*, et dont ce grand géomètre s'est borné à calculer le premier terme, ou celui qui

est donné par l'approximation dans laquelle on ne considère que la première puissance de la force perturbatrice. Or cette formule, fondée sur les équations différentielles du mouvement troublé où l'on prend la longitude vraie de l'astre troublé pour la variable indépendante du problème, ne donne point directement l'*équation séculaire* du moyen mouvement lunaire; ce qu'elle offre véritablement au géomètre qui l'emploie, c'est l'*équation séculaire* de la longitude vraie dans l'expression de la longitude moyenne développée en fonction de la première longitude. On parvient, il est vrai, en changeant la formule de signe et en substituant, sous le signe intégral qu'elle renferme, le moyen mouvement lunaire à la place de la longitude vraie, à en conclure l'*équation séculaire* sous la forme qu'il convient de lui donner pour l'usage des Tables; on suppose d'ailleurs que cette transformation est permise sans qu'il puisse en résulter aucune erreur sensible sur le résultat final : mais ce sont là de ces hypothèses purement gratuites qui laissent toujours quelques doutes dans l'esprit et dont un calcul exact et rigoureux pourrait seul prouver d'une manière irréfragable la légitimité. J'ai donc pensé que le moment était venu de faire cesser l'espèce d'anarchie qui règne encore aujourd'hui dans les deux camps de l'astronomie théorique et pratique sur un point aussi essentiel au perfectionnement de la théorie lunaire, et que la plus belle des découvertes de Laplace méritait bien qu'on prît la peine de s'assurer d'une manière évidente que les puissances supérieures de la force perturbatrice n'altèrent pas l'accord,

presque complet, que par un merveilleux hasard il avait rencontré entre les résultats de la théorie et de l'observation, en ne tenant compte que de la première puissance de cette force; hasard ou bonheur, il faut le dire, d'autant plus étonnant, que les termes de cet ordre altèrent si sensiblement la plupart des autres inégalités lunaires, qu'il faut pousser très-loin les approximations pour parvenir à les représenter par l'analyse : c'est ainsi que la considération des termes dépendant du carré de la force perturbatrice donne exactement la valeur du moyen mouvement du périgée dont la première puissance n'avait fourni que la moitié, et qu'elle altère dans un rapport beaucoup plus grand encore l'*équation séculaire* dont ce mouvement est affecté. Je ne pouvais non plus hésiter sur le choix des formules à employer dans cette recherche, celles que j'ai données dans le n° 1 du VIIe Livre, et par lesquelles j'ai le premier ramené la détermination de toutes les inégalités *périodiques* ou *séculaires* du mouvement lunaire, aux équations différentielles employées pour déterminer les mouvements des corps planétaires, étaient évidemment celles qui devaient les premières se présenter à ma pensée. En effet, ces formules donnent directement les coordonnées de l'astre troublé en fonction de sa longitude moyenne, ou, ce qui revient au même, en fonction du temps, c'est-à-dire sous la forme même qu'on est obligé de faire prendre à ces expressions pour la construction des Tables astronomiques; elles n'ont besoin ni de préparations préliminaires dans les expressions elliptiques qu'on emploie, ni de pénibles conversions pour ramener, par le retour des suites, à

la forme ordinaire les longs développements des séries auxquelles on est conduit par l'analyse; enfin, cette méthode doit donner évidemment la véritable expression de l'équation séculaire sous la forme qui lui convient pour la comparaison des observations anciennes et modernes, sans qu'il soit besoin d'altérer la formule ou de lui faire subir aucune transformation dans laquelle on doit toujours craindre qu'il ne se perde quelque partie de la valeur cherchée (partie précieuse sur un élément qui ne s'élève pas à 10″), comme il arrive, par une comparaison grossière, mais exacte, à un liquide qu'on verse d'un vase dans un autre. On verra d'ailleurs que la méthode dont il s'agit, en même temps qu'elle est sans doute la plus exacte et la plus directe, est aussi la plus avantageuse qu'on puisse appliquer à la détermination de l'*équation séculaire;* elle donne avec une grande facilité, comparativement du moins à la méthode ordinaire, et par des opérations symétriques, toutes les parties qui doivent concourir à former son coefficient; la combinaison des formules présentées dans les Chapitres II et III du Livre VII, suffisent pour les obtenir sans même qu'il soit besoin, excepté dans quelques occasions particulières, de pousser le développement de ces formules plus loin que nous ne l'avons fait dans les Chapitres cités; elles donnent ainsi, sans exception, par l'analyse la plus directe et la plus uniforme, toutes les inégalités séculaires et périodiques du mouvement de notre satellite, comme elles ont donné celles des mouvements planétaires, et l'on pourrait dire de cette méthode, que M. Lubbock et moi nous avons introduite *pour la*

première fois dans la théorie de la Lune (*voir* le préambule du Livre VII), ce que Laplace a dit de la cause qui produit son *équation séculaire* : « On serait sans doute étonné des efforts dans lesquels se sont consumés les géomètres pour en imaginer d'autres, si l'on ne savait que les idées les plus simples sont toujours les dernières qui s'offrent à l'esprit humain. »

1. La détermination de l'*équation séculaire* qui affecte la longitude moyenne de la Lune exige que l'on connaisse le rapport qui existe entre le moyen mouvement dans l'orbite troublée et celui qui aurait lieu dans l'orbite elliptique, c'est-à-dire dans l'orbite que la Lune décrirait autour de la Terre sans l'action du Soleil. Nous allons donc nous occuper de déterminer ce rapport avec toute l'exactitude que commande un élément aussi important dans la théorie du mouvement lunaire.

Pour cela, désignons par n le moyen mouvement pendant l'unité de temps dans l'orbite troublée, c'est-à-dire celui qui se déduit naturellement des observations, et par n_1 la même quantité relative au mouvement dans l'ellipse ; nommons respectivement a et a_1 les demi grands axes qui répondent à n et n_1 ou qui s'en déduisent, dans le cas où l'on suppose, comme nous le faisons (n° 1, Livre VII,), la somme des masses de la Terre et de la Lune égale à l'unité, au moyen des équations $a^3 n^2 = 1$ et $a_1^3 n_1^2 = 1$; c'est la fonction qui exprime le rapport de n à n_1, ou, ce qui revient au même, celui de a à a_1 que nous nous proposons de déterminer, en portant les développements jusqu'au même ordre de quantités que nous avons considérées

dans l'expression des principales inégalités du mouvement troublé de la Lune.

Reprenons d'abord l'équation qui détermine les perturbations du rayon vecteur. On a, n° 10, Livre VII,

$$\frac{d^2 r^2}{2\,dt^2} - \frac{1}{r} + \frac{1}{a_1} = 2\int d'\mathrm{R} + r\frac{d\mathrm{R}}{dr}. \tag{1}$$

La constante a_1, dans cette équation, est supposée représenter ici le demi grand axe de l'ellipse que la Lune décrirait sans l'intervention des forces perturbatrices; désignons par a ce que devient a_1 quand on a égard à ces forces, en négligeant simplement dans l'équation (1) les termes périodiques, on aura

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{a_1} - r\frac{d\mathrm{R}}{dr} = \frac{1}{a_1} - 2\,\mathrm{R}_0,$$

en observant qu'on a généralement

$$r\frac{d\mathrm{R}}{dr} = 2\mathrm{R}.$$

De cette équation on tire

$$\frac{a}{a_1} = 1 + 2a\mathrm{R}_0 = 1 + p, \tag{2}$$

en désignant par p une certaine fonction des éléments des orbites de la Lune et du Soleil qui sera déterminée par l'équation

$$p = 2a\,\mathrm{R}_0. \tag{3}$$

Considérons maintenant l'équation qui détermine les perturbations de la longitude. On a, n° 27, livre VII,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{h}{r^2} + \frac{1}{r^2}\int\left(\frac{d\mathrm{R}}{dv}\right)dt. \tag{4}$$

Cette équation, lorsqu'on fait abstraction des forces

perturbatrices, donne simplement

$$\frac{dv}{dt} = \frac{h}{r^2}.$$

La constante a représentant la distance moyenne de la Lune à la Terre et n le moyen mouvement qui lui correspond, nous supposerons qu'on ait introduit ces quantités dans les formules mêmes du mouvement elliptique, en désignant alors par $\frac{1}{a^2}(1+\beta)$ la partie constante de la fonction $\frac{1}{r^2}$ et faisant abstraction des termes simplement périodiques, ce qui donne $\frac{dv}{dt} = n$; on aura dans ce cas

$$n = \frac{h(1+\beta)}{a^2}, \tag{5}$$

où $(1+\beta)$ désigne une certaine fonction de l'excentricité e de l'orbite lunaire, qui, multipliée par h, doit, d'après les règles du mouvement elliptique, se réduire à l'unité lorsqu'on aura substitué pour h sa valeur.

Supposons maintenant qu'on ait développé l'équation (4) en faisant abstraction, comme nous l'avons dit, des termes périodiques, et qu'on désigne généralement par $\frac{h(1+\beta)\mathrm{P}}{a^2}$ ce que les forces perturbatrices auront ajouté à la formule (5), en observant que, dans le cas du mouvement troublé, on a supposé $\frac{dv}{dt} = \mathrm{n}$; on aura

$$\mathrm{n} = \frac{h(1+\beta)}{a^2}(1+\mathrm{P}),$$

ou bien, faisant pour simplifier $(1+\beta)(1+\mathrm{P}) = 1+\Pi$

et remplaçant a par sa valeur tirée de l'équation (2),

$$n = \frac{h(1+\text{n})}{a_1^{\frac{1}{2}}(1+p)^2}. \qquad (6)$$

Dans le cas du mouvement elliptique, on sait que l'on a $h = \sqrt{a_1(1-e^2)}$, et l'on peut représenter en général cette quantité par une fonction de la forme $\sqrt{a_1(1-e^2)}(1+Q)$, où Q désigne une quantité dépendante des forces perturbatrices, qui se réduit à zéro quand on fait abstraction de ces forces. En substituant donc cette valeur dans l'équation (6) et en observant que l'on a, d'après ce qui précède, $a_1^{-\frac{3}{2}} = n_1$, cette formule fera connaître le rapport cherché de n à n_1.

Il ne s'agira donc que de développer l'équation (6) pour obtenir le principal élément nécessaire à la détermination de l'*équation séculaire ;* il faudra seulement se rappeler, en opérant ce développement, ainsi que celui de l'équation (2), que nous avons supposé que l'on avait introduit dans les formules mêmes du mouvement elliptique, et par conséquent dans celles du mouvement troublé, qui s'en déduisent, la constante a qui sert à lier entre elles les constantes a et a_1, et qui facilite la recherche de la fonction qui exprime leur rapport. Telle serait par conséquent la marche la plus naturelle qu'il conviendrait de suivre, si l'on voulait déterminer directement l'*équation séculaire* de la Lune, indépendamment de ses autres inégalités; mais lorsqu'on a déjà déterminé, comme nous l'avons fait dans les Chapitres II et III du Livre VII, l'expression du rayon vecteur dans l'orbite troublée, on peut obtenir, immédiatement et presque sans calcul, ce rap-

port au moyen des quantités déjà connues, ce qui évite une suite longue et pénible d'opérations laborieuses, et offre l'un des avantages les plus précieux de la méthode que nous avons suivie.

En effet, la constante auxiliaire a désignant, comme nous l'avons supposé, la distance moyenne de la Lune à la Terre, il est évident que si l'on introduit cette quantité dans les formules mêmes du mouvement elliptique, et qu'on détermine ensuite les perturbations du rayon vecteur au moyen des formules ordinaires du mouvement troublé, on obtiendra une expression de la forme

$$\frac{a}{r} = 1 + \mathrm{H},$$

en représentant par H une suite de termes périodiques; dans les formules des Chapitres II et III, nous avons introduit immédiatement le demi grand axe a de l'orbite troublée dans les expressions relatives au mouvement elliptique, et nous avons trouvé (n° 15, Livre VII) pour déterminer les perturbations du rayon vecteur une expression de la forme

$$\frac{\mathrm{a}}{r} = 1 + a_0 + \mathrm{K},$$

en représentant par K une nouvelle suite de termes simplement périodiques : la comparaison de ces deux expressions donne évidemment

$$\frac{\mathrm{a}}{a} = 1 + a_0, \qquad (7)$$

équation qui détermine immédiatement le rapport de a à a et où tout est connu, puisque a_0, qui représente

le premier terme ou la partie non périodique de la fonction $\delta\frac{1}{r}$, n° 5, Livre cité, a été supposée calculée par les approximations successives. L'équation

$$\frac{a}{a_1} = 1 + p$$

fait connaître d'ailleurs le rapport de a à a_1; en multipliant ces deux équations l'une par l'autre, on aura par conséquent

$$\frac{\mathrm{a}}{a_1} = (1 + a_0)(1 + p), \tag{8}$$

équation qui fera connaître le rapport cherché de a à a_1, et où il n'y aura d'inconnu que la fonction p, qui se déduira du reste d'une manière très-simple des quantités que nous avons déjà déterminées dans les recherches antérieures.

La détermination du rapport de a à a_1, ou de celui de n à n_1, qui s'en déduit sans peine, ne présenterait donc aucune difficulté si les quantités a_0 et p, qui entrent dans l'équation (8), avaient été calculées avec une exactitude suffisante au degré d'approximation que nous voulons obtenir dans l'évaluation du coefficient de l'*équation séculaire ;* mais, pour ne rien laisser à désirer sur cet objet, nous nous proposons de poursuivre les développements au delà même des termes qui paraissent généralement pouvoir présenter des résultats appréciables dans l'évaluation des coefficients des autres inégalités, et nous serons obligé par conséquent de porter la précision, pour quelques-uns d'entre eux, plus loin que nous ne l'avions fait dans les Chapitres II et III du Livre VII, où nous nous

sommes arrêté à ce qui semblait suffisant pour l'objet que nous nous proposions alors ; nous allons donc reprendre d'abord la détermination de la valeur du coefficient a_0, en suivant la marche que nous avons tracée dans les nos 23, 50 et 69 du Livre cité.

2. Pour cela, reprenons l'équation (14) du no 23, Livre VII ; en observant qu'en n'ayant égard qu'aux termes non périodiques on a $\frac{rd^2r}{dt^2} = -\frac{dr^2}{dt^2}$, elle pourra s'écrire ainsi :

$$\frac{h^2}{r^2} = -\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{1}{r} - r\left(\frac{dR}{dr}\right) - \frac{2dv}{dt}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt + \frac{1}{r^2}\left[\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt\right]^2. \qquad (9)$$

Les termes dont nous nous proposons de poursuivre le développement dans l'expression du coefficient indéterminé a_0, sont ceux qui s'y trouvent multipliés par les facteurs e'^2 et $e^2e'^2$ et qui, à raison de leur variation, ont la plus grande influence sur la valeur du coefficient de l'équation séculaire. Il faut donc nous occuper d'abord de porter relativement à ces termes le développement de la fonction perturbatrice, qui entre dans la formule précédente, beaucoup plus loin que nous ne l'avons fait dans le no 45, Livre VII. En poursuivant la marche indiquée dans le no 13 et en conservant les termes du 4e ordre dans l'expression de la fonction δR, qui devient ainsi

$$\begin{aligned}\delta R = &-\left(r\frac{dR}{dr}\right)\left(r\delta\frac{1}{r}\right) + \left(\frac{dR}{dv}\right)\delta v \\ &+ 3R\left(r_1\delta\frac{1}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{dR}{dv}\right)\left(r_1\delta\frac{1}{r}\right)\delta v + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2R}{dv^2}\right)\delta v^2 \\ &- 4R\left(r\delta\frac{1}{r}\right)^3 + 3\left(\frac{dR}{dv}\right)\left(r\delta\frac{1}{r}\right)^2\delta v - \left(\frac{d^2R}{dv^2}\right)\left(r\delta\frac{1}{r}\right)\delta v^2 \\ &- \frac{2}{3}\left(\frac{dR}{dv}\right)\delta v^3,\end{aligned}$$

j'ai trouvé

$$\delta R = \left(\frac{3}{8} m^2 - \frac{799}{64} m^4 - \frac{2619}{32} m^5 - \frac{302389}{768} m^6 - \frac{830085}{576} m^7\right) e'^2$$
$$+ \left(\frac{9}{16} m^2 + \frac{825}{64} m^3 + \frac{241719}{512} m^4 + \frac{926499}{256} m^5\right) e^2 e'^2.$$

En négligeant l'excentricité de l'orbe lunaire, on a, n° 50, Livre VII,

$$r = 1 - \delta \frac{1}{r} + \left(\delta \frac{1}{r}\right)^2 - \left(\delta \frac{1}{r}\right)^3 + \text{etc.},$$

d'où l'on a conclu, n°s 31 et 50,

$$r = \frac{3}{2} m^2 e' \cos \varphi'$$
$$- \left[m^2 + \frac{19}{6} m^3 + \frac{125}{18} m^4 + \frac{709}{54} m^5 - \left(\frac{5}{2} m^2 + \frac{230}{12} m^3 + \frac{1271}{18} m^4\right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1205}{108} m^5\right) e'^2\right] \cos 2\xi$$
$$- \left(\frac{7}{2} m^2 + \frac{157}{8} m^3 + \frac{3365}{48} m^4 + \frac{16185}{96} m^5\right) e' \cos (2\xi - \varphi')$$
$$+ \left(\frac{m^2}{2} + \frac{91}{24} m^3 + \frac{1025}{144} m^4 - \frac{28883}{864} m^5\right) e' \cos (2\xi + \varphi').$$

En différentiant cette quantité, en l'élevant ensuite au carré, et en négligeant dans le résultat tous les termes périodiques, on a formé la suivante :

$$\frac{dr^2}{dt^2} = \left(15 m^4 + \frac{351}{3} m^5 + \frac{90399}{144} m^6 + \frac{72897}{27} m^7\right) e'^2. \qquad (a)$$

L'expression précédente de δR, en observant que l'on a $r \frac{dR}{dr} = 2R$, donne

$$r \frac{dR}{dr} = \left(\frac{3}{4} m^2 - \frac{799}{32} m^4 - \frac{2619}{16} m^5 - \frac{302389}{384} m^6 - \frac{830085}{288} m^7\right) e'^2, \qquad (b)$$

d'après la valeur de v, n° 133, Livre VII, on a

$$\frac{dv}{\delta t} = -3m^2 e' \cos \varphi'$$
$$+ \left[\frac{11}{4} m^2 + \frac{85}{12} m^3 + \frac{539}{36} m^4 + \frac{3031}{108} m^5 - \left(\frac{55}{8} m^2 + \frac{1217}{24} m^3 + \frac{12433}{72} m^4 - \frac{8345}{432} m^5\right) e'^2\right] \cos 2\xi$$
$$+ \left(\frac{77}{8} m^2 + \frac{727}{16} m^3 + \frac{4677}{32} m^4 + \frac{29713}{96} m^5\right) e' \cos (2\xi - \varphi')$$
$$- \left(\frac{11}{8} m^2 + \frac{481}{48} m^3 + \frac{5795}{288} m^4 - \frac{73117}{864} m^5\right) e' \cos (2\xi + \varphi').$$

On a d'ailleurs, nos 18 et 46 :

$$-\int \left(\frac{dR}{dv}\right) dt = \left(\frac{291}{16} m^4 + \frac{1477}{12} m^5\right) e' \cos \varphi'$$
$$- \left[\left(\frac{3}{4} m^2 + \frac{3}{4} m^3 + \frac{1}{2} m^4 + \frac{1}{2} m^5\right) - \left(\frac{15}{8} m^2 + \frac{87}{8} m^3 + 14 m^4 - \frac{2029}{16} m^5\right) e'^2\right] \cos 2\xi$$
$$- \left(\frac{21}{8} m^2 + \frac{99}{16} m^3 + \frac{305}{32} m^4 - \frac{669}{32} m^5\right) e' \cos (2\xi - \varphi')$$
$$+ \left(\frac{3}{8} m^2 + \frac{39}{16} m^3 - \frac{1}{32} m^4 - \frac{1127}{32} m^5\right) e' \cos (2\xi + \varphi').$$

En combinant ces valeurs et négligeant les termes périodiques, on a conclu

$$-\frac{2\,dv}{dt} \int \left(\frac{dR}{dv}\right) dt = \left(-\frac{495}{32} m^4 - \frac{1593}{16} m^5 - \frac{188957}{384} m^6 - \frac{156729}{72} m^7\right) e'^2. \qquad (c)$$

On a trouvé, nos 28 et 55,

$$\frac{1}{r^2} \int \left(\frac{dR}{dv}\right) dt = \left[\frac{3}{4} m^2 + \frac{3}{4} m^3 + \frac{3}{4} m^4 + \frac{3}{4} m^5 - \left(\frac{15}{8} m^2 + \frac{87}{8} m^3 + \frac{141}{8} m^4 - \frac{1887}{16} m^5\right) e'^2\right] \cos 2\xi$$
$$+ \left(\frac{21}{8} m^2 + \frac{99}{16} m^3 + \frac{297}{32} m^4 - \frac{639}{32} m^5\right) e' \cos (2\xi - \varphi')$$
$$- \left(\frac{3}{8} m^2 + \frac{39}{16} m^3 + \frac{39}{32} m^4 - \frac{1065}{32} m^5\right) e' \cos (2\xi + \varphi').$$

En combinant cette valeur avec la valeur précédente de $-\int\left(\frac{d\mathrm{R}}{dv}\right)dt$ et en rejetant les termes d'un ordre supérieur à ceux que nous considérons, on a trouvé

$$\frac{1}{r^2}\int\left[\left(\frac{d\mathrm{R}}{dv}\right)dt\right]^2 = \left(\frac{135}{64}m^4 + \frac{243}{32}m^5 + \frac{6615}{256}m^6 + \frac{4167}{64}m^7\right)e'^2. \quad (d)$$

Si l'on substitue les différentes valeurs marquées (a), (b), (c) et (d) dans la formule (9), et qu'on suppose de plus $\frac{1}{r} = \alpha_0 e'^2$, on trouvera la suivante :

$$\frac{h^2}{r^2} = \left(\alpha_0 - \frac{3}{4}m^2 - \frac{217}{64}m^4 - \frac{1449}{32}m^5 - \frac{78473}{256}m^6 - \frac{1111295}{576}m^7\right)e'^2. \quad (\alpha)$$

Déterminons de la même manière les termes de l'expression de $\frac{h^2}{r^2}$ qui seront multipliés par le facteur $e^2 e'^2$.

On aura dans ce cas, n° 35, pour déterminer r la formule

$$r = r_1 - r_1^2\,\delta\frac{1}{r} + r_1^3\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2 - r_1^4\left(\delta\frac{1}{r}\right)^3 + \text{etc.},$$

et en substituant dans cette expression pour r_1, r_1^2, r_1^3, etc., leurs valeurs elliptiques et pour $\delta\frac{1}{r}$, $\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2$, $\left(\delta\frac{1}{r}\right)^3$, etc., leurs valeurs développées n°s 21, 26, 48 et 53, on a formé la suivante (*) :

$$r = -\left[1 - \frac{m^2}{6} - \frac{885}{128}m^3 - \left(\frac{47}{8}m^2 + \frac{9095}{128}m^3 + \frac{13131}{192}m^4\right)e'^2\right]e\cos\varphi$$
$$-\left(\frac{21}{8}m + \frac{1209}{64}m^2 + \frac{1577}{16}m^3 + \frac{2072593}{4096}m^4\right)ee'\cos(\varphi - \varphi')$$

(*) *Voir* le n° 58, Livre VII, où la plupart des termes de r ont été déjà calculés.

$$+\left(\frac{21}{8}m+\frac{741}{64}m^2+\frac{7591}{128}m^3+\frac{3518023}{12288}m^4\right)ee'\cos(\varphi+\varphi')$$

$$-\left[m^2+\frac{19}{6}m^3+\frac{125}{18}m^4+\left(\frac{15}{8}m+\frac{173}{32}m^2+\frac{36505}{1536}m^3\right)e^2\right.$$

$$-\left(\frac{5}{2}m^2+\frac{239}{12}m^3+\frac{1271}{18}m^4\right)e'^2$$

$$\left.-\left(\frac{75}{16}m+\frac{755}{32}m^2+\frac{101903}{3072}m^3\right)e^2e'^2\right]\cos 2\xi$$

$$-\left[\frac{15}{8}m+\frac{155}{52}m^2+\frac{25849}{1536}m^3+\frac{1058591}{18432}m^4-\left(\frac{75}{16}m\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{305}{32}m^2-\frac{454009}{3072}m^3-\frac{34747033}{18432}m^4\right)e'^2\right]e\cos(2\xi-\varphi)$$

$$-\left[\frac{17}{16}m^2+\frac{151}{48}m^3-\left(\frac{85}{32}m^2+\frac{1525}{48}m^3\right)e'^2\right]e\cos(2\xi+\varphi)$$

$$-\left[\frac{7}{2}m^2+\frac{157}{8}m^3+\frac{3365}{48}m^4+\left(\frac{35}{8}m+\frac{243}{32}m^2\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{201893}{1536}m^3\right)e^2\right]e'\cos(2\xi-\varphi')$$

$$+\left[\frac{m^2}{2}+\frac{91}{24}m^3+\frac{1025}{144}m^4+\left(\frac{15}{8}m+\frac{197}{32}m^2\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{43751}{1536}m^3\right)e^2\right]e'\cos(2\xi+\varphi')$$

$$-\left(\frac{35}{8}m+\frac{1045}{64}m^2+\frac{35239}{768}m^3+\frac{280489}{12288}m^4\right)ee'\cos(2\xi-\varphi-\varphi')$$

$$+\left(\frac{15}{8}m+\frac{65}{64}m^2-\frac{53533}{768}m^3-\frac{26976037}{36864}m^4\right)ee'\cos(2\xi-\varphi+\varphi')$$

$$-\left(\frac{119}{32}m^2+\frac{2879}{128}m^3\right)ee'\cos(2\xi+\varphi-\varphi')$$

$$+\left(\frac{17}{32}m^2+\frac{2597}{384}m^3\right)ee'\cos(2\xi+\varphi+\varphi').$$

Si l'on élève au carré la différentielle de cette expression, en rejetant les termes périodiques et en n'ayant égard qu'à ceux qui sont multipliés par le facteur $e^2e'^2$, on trouvera la formule suivante :

$$\frac{dr^2}{dt^2}=\left(\frac{311}{128}m^2+\frac{9025}{512}m^3+\frac{1518767}{2048}m^4+\frac{109519041}{12288}m^5\right)\cdot e^2e'^2. \qquad (a')$$

D'après l'expression précédente de R et en vertu de

l'équation $r\frac{dR}{dr} = 2R$, on aura

$$r\frac{dR}{dr} = \left(\frac{9}{8}m^2 + \frac{825}{32}m^3 + \frac{241719}{256}m^4 + \frac{926491}{128}m^5\right)e^2 e'^2. \qquad (b')$$

En différentiant la valeur de v donnée n° 133, on forme la suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{dt} = & \left(2 + \frac{3}{2}m^2 - \frac{45}{4}m^2 e'^2\right) e\cos\varphi \\
& - 3m^2 e'\cos\varphi' \\
& + \left(\frac{21}{4}m + \frac{1065}{32}m^2\right) ee'\cos(\varphi - \varphi') \\
& - \left(\frac{21}{4}m + \frac{885}{32}m^2\right) ee'\cos(\varphi + \varphi') \\
& + \left[\frac{11}{4}m^2 + \frac{85}{12}m^3 + \left(\frac{75}{8}m + \frac{801}{32}m^2 + \frac{53855}{512}m^3\right)e^2 \right. \\
& \qquad - \left(\frac{55}{8}m^2 + \frac{1217}{24}m^3\right)e'^2 \\
& \qquad \left. - \left(\frac{375}{16}m + \frac{4215}{32}m^2 + \frac{105145}{1024}m^3\right)e^2 e'^2\right]\cos 2\xi \\
& + \left[\frac{15}{4}m + \frac{143}{16}m^2 + \frac{27289}{768}m^3 - \left(\frac{75}{8}m + \frac{275}{16}m^2 \right.\right. \\
& \qquad \left.\left. - \frac{432697}{1536}m^3\right)e'^2\right] e\cos(2\xi - \varphi) \\
& + \left[\frac{51}{8}m^2 + \frac{135}{8}m^3 - \left(\frac{255}{16}m^2 + \frac{1485}{8}m^3\right)e'^2\right] e\cos(2\xi + \varphi) \\
& + \left[\frac{77}{8}m^2 + \frac{727}{16}m^3 + \left(\frac{175}{8}m + \frac{3401}{32}m^2 \right.\right. \\
& \qquad \left.\left. + \frac{283795}{512}m^3\right)e^2\right] e'\cos(2\xi - \varphi') \\
& - \left[\frac{11}{8}m^2 + \frac{481}{48}m^3 + \left(\frac{75}{8}m + \frac{963}{32}m^2 - \frac{68065}{512}m^3\right)e^2\right] e'\cos(2\xi + \varphi') \\
& + \left[\frac{35}{4}m + \frac{961}{32}m^2 + \frac{11657}{128}m^3\right] ee'\cos(2\xi - \varphi - \varphi') \\
& - \left[\frac{15}{4}m + \frac{53}{32}m^2 - \frac{50041}{384}m^3\right] ee'\cos(2\xi - \varphi + \varphi') \\
& + \left[\frac{357}{16}m^2 + \frac{7965}{64}m^3\right] ee'\cos(2\xi + \varphi - \varphi') \\
& - \left[\frac{51}{16}m^2 + \frac{2565}{64}m^3\right] ee'\cos(2\xi + \varphi + \varphi').
\end{aligned}$$

On a d'ailleurs, nos 18 et 46 (Livre VII) :

$$-\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt = \left[\frac{135}{16}m^2 + \left(\frac{495}{16}m^3 + \frac{37395}{128}m^4 + \frac{722487}{512}m^5\,{}^{(*)}\right)e'^2\right]e\cos\varphi$$

$$+\left(\frac{675}{32}m^3 + \frac{5661}{32}m^4\right)ee'\cos(\varphi-\varphi')$$

$$+\left(\frac{405}{32}m^3 + \frac{5157}{64}m^4\right)ee'\cos(\varphi+\varphi')$$

$$-\left[\frac{3}{4}m^2 + \frac{3}{4}m^3 + \frac{1}{2}m^4 - \left(\frac{15}{8}m^2 + \frac{15}{8}m^3\right)e^2 - \left(\frac{15}{8}m^2 + \frac{87}{8}m^3 + 14m^4\right)e'^2 + \left(\frac{75}{16}m^2 + \frac{273}{16}m^3\right)e^2e'^2\right]\cos 2\xi$$

$$+\left[\frac{9}{2}m^2 + 9m^3 + \frac{123}{8}m^4 - \left(\frac{45}{4}m^2 + \frac{117}{4}m^3 - \frac{18753}{64}m^4\right)e'^2\right]e\cos(2\xi-\varphi)$$

$$-\left[\frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{3}m^3 - \left(\frac{5}{4}m^2 + \frac{145}{12}m^3\right)e'^2\right]e\cos(2\xi+\varphi)$$

$$-\left[\frac{21}{8}m^2 + \frac{99}{16}m^3 + \frac{305}{32}m^4 - \left(\frac{105}{16}m^2 + \frac{207}{16}m^3\right)e^2\right]e'\cos(2\xi-\varphi')$$

$$+\left[\frac{3}{8}m^2 + \frac{39}{16}m^3 - \frac{1}{32}m^4 - \left(\frac{15}{16}m^2 + \frac{57}{16}m^3\right)e^2\right]e'\cos(2\xi+\varphi')$$

$$+\left(\frac{63}{4}m^2 + \frac{783}{16}m^3 + \frac{11811}{128}m^4\right)ee'\cos(2\xi-\varphi-\varphi')$$

$$-\left(\frac{9}{4}m^2 + \frac{63}{16}m^3 - \frac{11409}{128}m^4\right)ee'\cos(2\xi-\varphi+\varphi')$$

$$-\left(\frac{7}{4}m^2 + \frac{73}{16}m^3\right)ee'\cos(2\xi+\varphi-\varphi')$$

$$+\left(\frac{1}{4}m^2 + \frac{139}{48}m^3\right)ee'\cos(2\xi+\varphi+\varphi').$$

En combinant ces valeurs entre elles, et n'ayant égard qu'aux termes non périodiques multipliés par le facteur $e^2e'^2$, on a trouvé

$$\frac{2dv}{dt}\int\frac{dR}{dv} = -\left(\frac{3135}{32}m^3 + \frac{245145}{256}m^4 + \frac{38086729}{4096}m^5\right)e^2e'^2. \qquad (c')$$

(*) *Voir* pour ce terme ce qui sera dit page 25.

Par les nos 28 et 55, on a

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{r^2}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt = &-\Big[\frac{3}{4}m^2+\frac{3}{4}m^3-\left(\frac{11}{2}m^2+\frac{61}{6}m^3\right)e \\
&\qquad -\left(\frac{15}{8}m^2+\frac{87}{8}m^3\right)e'^2 \\
&\qquad +\left(\frac{55}{4}m^2+\frac{1951}{24}m^3\right)e^2e'^2\Big]\cos 2\xi \\
&+\Big[\frac{15}{4}m^2+\frac{33}{4}m^3-\left(\frac{75}{8}m^2+\frac{105}{4}m^3\right)e'^2\Big]e\cos(2\xi-\varphi) \\
&-\Big[\frac{5}{4}m^2+\frac{13}{12}m^3-\left(\frac{25}{8}m^2+\frac{185}{6}m^3\right)e'^2\Big]e\cos(2\xi+\varphi) \\
&-\Big[\frac{21}{8}m^2+\frac{99}{16}m^3-\left(\frac{77}{4}m^2+\frac{2155}{32}m^3\right)e^2\Big]e'\cos(2\xi-\varphi') \\
&+\Big[\frac{3}{8}m^2+\frac{39}{16}m^3-\left(\frac{11}{4}m^2+\frac{1585}{96}m^3\right)e^2\Big]e'\cos(2\xi+\varphi') \\
&+\left(\frac{105}{8}m^2+\frac{1431}{32}m^3\right)ee'\cos(2\xi-\varphi-\varphi') \\
&-\left(\frac{15}{8}m^2+\frac{111}{32}m^3\right)ee'\cos(2\xi-\varphi+\varphi') \\
&-\left(\frac{35}{8}m^2+\frac{407}{32}m^3\right)ee'\cos(2\xi+\varphi-\varphi') \\
&+\left(\frac{5}{8}m^2+\frac{701}{96}m^3\right)ee'\cos(2\xi+\varphi+\varphi').
\end{aligned}
$$

Cette valeur combinée avec celle de la fonction $-\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt$ donnée plus haut, en n'ayant égard qu'aux termes dont nous nous occupons, a produit la suivante :

$$\frac{1}{r^2}\left[\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt\right]^2=\left(\frac{5745}{128}m^4+\frac{85923}{256}m^5\right)e^2e'^2. \qquad (d')$$

En substituant les différentes valeurs (a') (b') (c') et (d') dans l'équation (9) et en supposant de plus $\delta\frac{1}{r}=\alpha_0 e^2 e'^2$, on obtient

$$\frac{h^2}{r^2}=\left(\alpha'_0-\frac{455}{128}m^2+\frac{27935}{512}m^3-\frac{432563}{2048}m^4-\frac{13346409}{2048}m^5\right)e^2e'^2. \qquad (2)$$

Nous avons trouvé n° 50, Livre VII :

$$\left.\begin{aligned}\frac{h^2}{r^2} = 1 - \frac{m^2}{3} - \frac{97}{144}m^4 - \frac{43}{8}m^5 \\ - \left(\frac{1}{2} + \frac{611}{384}m^2 - \frac{4365}{256}m^3\right)e^2\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

En réunissant les trois parties (1), (2) et (3) de la fonction $\frac{h^2}{r^2}$, on aura donc

$$\begin{aligned}\frac{h^2}{r^2} = 1 - \frac{m^2}{3} - \frac{97}{144}m^4 - \frac{43}{8}m^5 \\ - \left(\frac{1}{2} + \frac{611}{384}m^2 - \frac{4365}{256}m^3\right)e^2 \\ + \left(\alpha_0 - \frac{3}{4}m^2 - \frac{217}{64}m^4 - \frac{1449}{32}m^5 - \frac{78473}{256}m^6 - \frac{1111295}{576}m^7\right)e'^2 \\ + \left(\alpha'_0 - \frac{455}{128}m^2 + \frac{27935}{512}m^3 - \frac{432563}{2048}m^4 - \frac{13346409}{2048}m^5\right)e^2 e'^2.\end{aligned}$$

En poursuivant le développement de la fonction $\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2$ commencé n°s 21 et 48, Livre VII, en observant que par une première approximation on a obtenu, n° 50, dans le coefficient a_0 les termes

$$a_0 = \left(\frac{m^2}{4} - \frac{799}{192}m^4 - \frac{873}{32}m^5\right)e'^2$$

et que a_0 ne renferme, comme on le verra plus bas, aucun terme multiplié par le facteur $e^2 e'^2$ dans l'ordre m^2, on a trouvé

$$\begin{aligned}\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2 = \frac{19}{36}m^4 + \frac{19}{6}m^5 + \left(\frac{225}{128}m^4 + \frac{3765}{256}m^5\right)e^2 \\ + \left(\frac{119}{24}m^4 + \frac{171}{4}m^5 - \frac{2413}{192}m^6 + \frac{352747}{288}m^7\right)e'^2 \\ + \left(\frac{1207}{128}m^2 + \frac{68285}{512}m^3 + \frac{981913}{768}m^4 + \frac{119863039}{12288}m^5\right)e^2 e'^2.\end{aligned}$$

On a d'ailleurs, nos 23 et 51,

$$\delta\frac{1}{r}=\frac{m^2}{6}-\frac{179}{288}m^4-\frac{97}{48}m^5$$
$$+\left[\frac{m^2}{6}-\frac{645}{128}m^3-\left(\frac{43}{8}m^2+\frac{8215}{128}m^3\right)e'^2\right]e\cos\varphi.$$

Si dans l'équation

$$\frac{1}{r^2}=\frac{1}{r_1^2}+\frac{2}{r_1}\delta\frac{1}{r}+\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2$$

on substitue ces valeurs, qu'on remplace $\frac{1}{r_1^2}$, $\frac{1}{r_1}$ par leurs valeurs elliptiques, et qu'on observe que nous avons supposé que $\delta\frac{1}{r}$ contenait les deux termes $\alpha_0 e'^2+\alpha_1 e^2 e'^2$ dans sa partie constante, en rejetant toutes les quantités périodiques, on trouvera

$$\frac{1}{r^2}=1+\frac{m^2}{3}-\frac{103}{144}m^4-\frac{7}{8}m^5$$
$$+\left(\frac{1}{2}+\frac{739}{384}m^2+\frac{2475}{256}m^3\right)e^2$$
$$+\left(2\alpha_0+\frac{119}{24}m^4+\frac{171}{4}m^5-\frac{2413}{192}m^6+\frac{352747}{288}m^7\right)e'^2$$
$$+\left(2\alpha'+\frac{519}{128}m^2+\frac{35425}{512}m^3+\frac{981943}{768}m^4+\frac{119863039}{12288}m^5\right)e^2e'^2.$$

En divisant par cette valeur l'expression précédente de $\frac{h^2}{r^2}$, on a formé la suivante :

$$h^2 = \left\{ \frac{\begin{array}{l} 1 - \frac{m^2}{3} - \frac{97}{144} m^4 - \frac{43}{8} m^5 \\ - \left(\frac{1}{2} + \frac{611}{384} m^2 - \frac{4365}{256} m^3 \right) e^2 \\ + \left(\alpha_0 - \frac{3}{4} m^2 - \frac{217}{64} m^4 - \frac{1449}{32} m^5 - \frac{78473}{256} m^6 - \frac{1111295}{576} m^7 \right) e'^2 \\ + \left(\alpha'_0 - \frac{455}{128} m^2 + \frac{27935}{512} m^3 - \frac{432563}{2048} m^4 - \frac{13346409}{2048} m^5 \right) e^2 e'^2 \end{array}}{\begin{array}{l} 1 + \frac{m^2}{3} - \frac{103}{144} m^3 - \frac{7}{8} m^4 \\ + \left(\frac{1}{2} + \frac{739}{384} m^2 + \frac{2475}{256} m^3 \right) e^2 \\ + \left(2\alpha_0 + \frac{119}{24} m^4 + \frac{171}{4} m^5 - \frac{2413}{192} m^6 + \frac{352747}{288} m^7 \right) e'^2 \\ + \left(2\alpha'_0 + \frac{519}{128} m^2 + \frac{35425}{512} m^3 + \frac{981943}{768} m^4 + \frac{119863039}{12288} m^5 \right) e^2 e'^2. \end{array}} \right\}$$

De cette équation, en observant que l'on a obtenu par une première approximation, comme nous l'avons dit plus haut,

$$\alpha_0 = \frac{m^2}{4} - \frac{799}{192} m^4 - \frac{873}{32} m^5,$$

et qu'en se bornant aux termes de l'ordre m^3, on a, comme on le verra plus loin :

$$\alpha'_0 = (0)\, m^2 - \frac{275}{32} m^3,$$

en substituant ces valeurs dans les termes où α_0 et α'_0 se trouveraient multipliés par m^2, m^3, etc., n° 50, on déduira, soit par la division ordinaire, soit en employant la méthode des coefficients indéterminés,

la valeur suivante :

$$h^2 = 1 - \frac{2}{3}m^2 + \frac{19}{72}m^4 - \frac{9}{2}m^5$$
$$- \left(1 + \frac{547}{192}m^2 - \frac{945}{128}m^3\right)e^2$$
$$- \left(\alpha_0 + \frac{3}{4}m^2 + \frac{1475}{192}m^4 + \frac{2817}{32}m^5 + \frac{227239}{768}m^6 + \frac{1808869}{576}m^7\right)e'^2$$
$$- \left(\alpha'_0 + \frac{423}{64}m^2 + \frac{3745}{256}m^3 + \frac{9112369}{6144}m^4 + \frac{199565365}{12288}m^5\right)e^2 e'^2,$$

d'où l'on conclura, par l'extraction de la racine,

$$h = 1 - \frac{m^2}{3} + \frac{11}{144}m^4 - \frac{9}{4}m^5$$
$$- \left(\frac{1}{2} + \frac{611}{384}m^2 - \frac{945}{256}m^3\right)e^2$$
$$- \left(\frac{1}{2}\alpha_0 + \frac{3}{8}m^2 + \frac{513}{128}m^4 + \frac{2817}{64}m^5 + \frac{228467}{1536}m^6 + \frac{1821829}{1152}m^7\right)e'^2$$
$$- \left(\frac{1}{2}\alpha'_0 + \frac{455}{128}m^2 + \frac{3745}{512}m^3 + \frac{9168545}{12288}m^4 + \frac{199917973}{24576}m^5\right)e^2 e'^2.$$

En multipliant cette quantité par la valeur de $\frac{1}{r^2}$ donnée plus haut, on formera la suivante :

$$\frac{h}{r^2} = 1 - \frac{3}{4}m^4 - \frac{25}{8}m^5$$
$$+ \frac{855}{64}m^3 e^2$$
$$+ \left(\frac{3}{2}\alpha_0 - \frac{3}{8}m^2 + \frac{79}{128}m^4 - \frac{81}{64}m^5 - \frac{246427}{1536}m^6 - \frac{46529}{128}m^7\right)e'^2$$
$$+ \left(\frac{3}{2}\alpha'_0 + \frac{405}{8}m^2 + \frac{6518607}{12288}m^4 + \frac{13099587}{8192}m^5\right)e^2 e'^2.$$

En combinant entre elles les valeurs de $\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt$, n°s 18 et 46, Livre VII, avec celles de $\frac{1}{r^2}$ rapportées n°s 27 et 54, et rejetant les termes périodiques, nous

avons formé la suivante :

$$\frac{1}{r^2}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt=\left(\frac{45}{8}m^4+\frac{675}{16}m^5+\frac{23101}{96}m^6+\frac{598413}{576}m^7\right)e'^2.$$

Avant de combiner entre elles ces mêmes expressions pour en déduire le terme de la fonction $\frac{1}{r^2}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt$, qui est multiplié par le facteur $e^2 e'^2$, il faut observer que le coefficient du terme dépendant de $\cos\varphi$ dans l'expression de $\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt$, n° 46, ne serait pas suffisamment exact pour déterminer tous les termes de l'ordre m^5, il faut donc compléter ce coefficient avant de procéder à cette recherche ; en poussant jusqu'aux quantités de l'ordre m^5 les appróximations, nous avons trouvé ainsi

$$\frac{dR}{dv}=\left(\frac{495}{16}m^3+\frac{37395}{128}m^4+\frac{705747}{512}m^5\right)e'^2\,e\sin\varphi,$$

d'où, en multipliant par dt, intégrant ensuite en observant qu'on a $\varphi=ct+\varepsilon-\omega$, et que l'on peut supposer ici $\frac{1}{c}=1+\frac{3}{4}m^2+\frac{9}{8}m^2e'^2$, on a conclu

$$-\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt=\left(\frac{495}{16}m^3+\frac{37395}{128}m^4+\frac{721487}{512}m^5\right)e'^2\,e\cos\varphi.$$

En substituant cette valeur à celle qui lui correspond dans l'expression générale de $-\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt$, n° 46, et en opérant ensuite la combinaison indiquée, on a trouvé

$$\frac{1}{r^2}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt=\left(-\frac{3135}{64}m^3-\frac{266685}{512}m^4-\frac{1917003}{1024}m^5\right)e^2e'^2.$$

En joignant les valeurs précédentes à celles déjà

trouvées nos 23 et 50, en n'ayant égard qu'à la partie non périodique de la fonction $\frac{1}{r^2}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt$, on aura enfin

$$\frac{1}{r^2}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt = \frac{3}{4}m^4 + \frac{25}{8}m^5 - \frac{855}{64}m^2e^2$$
$$+\left(\frac{45}{8}m^4 + \frac{675}{16}m^5 + \frac{23101}{96}m^6 + \frac{598413}{576}m^7\right)e'^2$$
$$-\left(\frac{3135}{64}m^3 + \frac{266685}{512}m^4 + \frac{1917009}{1024}m^5\right)e^2e'^2.$$

Si l'on substitue cette valeur ainsi que celle de $\frac{h}{r^2}$ dans l'équation de la longitude

$$\frac{dv}{dt} = \frac{h}{r^2} + \frac{1}{r^2}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt, \qquad (n)$$

et qu'on observe que le premier membre devant se réduire à l'unité, no 23, lorsqu'on ne considère, comme nous le faisons ici, que les termes non périodiques, on pourra égaler séparément à zéro les coefficients des termes multipliés par e'^2 et $e^2e'^2$, et l'on aura, pour déterminer les coefficients arbitraires α_0 et α'_0, les deux équations de condition suivantes :

$$\frac{3}{2}\alpha_0 - \frac{3}{8}m^2 + \left(\frac{79}{128} + \frac{45}{8} = \frac{799}{128}\right)m^4 + \left(-\frac{81}{64} + \frac{675}{16} = \frac{2619}{64}\right)m^5$$
$$+\left(-\frac{246427}{1536} + \frac{23101}{96} = \frac{123189}{1536}\right)m^6$$
$$+\left(-\frac{418761}{1152} + \frac{598413}{576} = \frac{778065}{1152}\right)m^7 = 0,$$

$$\frac{3}{2}\alpha'_0 + \left(\frac{495}{8} - \frac{3135}{64} = \frac{825}{64}\right)m^3 + \left(\frac{6518607}{12288} - \frac{266685}{512} = \frac{118167}{12288}\right)m^4$$
$$+\left(\frac{13099587}{8192} - \frac{1917009}{1024} = -\frac{2236485}{8192}\right)m^5,$$

d'où l'on conclura

$$\alpha_0 = \frac{m^2}{4} - \frac{799}{192} m^4 - \frac{873}{32} m^5 - \frac{41063}{768} m^6 - \frac{259355}{576} m^7,$$

$$\alpha'_0 = -\frac{275}{32} m^3 - \frac{39389}{6144} m^4 + \frac{745495}{4096} m^5.$$

Les trois premiers termes de la valeur de α_0 avaient déjà été déterminés n° 50, Livre VII, et la conformité des résultats confirme la justesse de nos calculs.

Nous avons supposé plus haut $\delta \frac{1}{r} = \alpha_0 e'^2 + \alpha'_0 e^2 e'^2$, il faudra donc, pour compléter la valeur du coefficient arbitraire a_0, n° 23, lui ajouter les deux termes suivants :

$$a_0 = \left(\frac{m^2}{4} - \frac{799}{192} m^4 - \frac{873}{32} m^5 - \frac{41063}{768} m^6 - \frac{259355}{576} m^7\right) e'^2$$
$$+ \left(-\frac{275}{32} m^3 - \frac{39389}{6144} m^4 + \frac{745495}{4096} m^5\right) e^2 e'^2.$$

Si l'on substitue pour α_0 et α'_0 leurs valeurs dans l'expression de h, on trouvera, en n'ayant égard qu'aux termes que nous venons de déterminer,

$$h = \sqrt{a} \left\{ \begin{array}{l} -\left(\frac{m^2}{2} + \frac{185}{96} m^4 + \frac{243}{8} m^5 + \frac{1517}{128} m^6 + \frac{781237}{576} m^7\right) e'^2 \\ -\left(\frac{455}{128} m^2 + \frac{4545}{512} m^3 + \frac{760763}{1024} m^4 + \frac{101077229}{24576} m^5\right) e^2 e'^2. \end{array} \right\}$$

Déterminons les termes de a_0 multipliés par e^4 et e'^4. Commençons par considérer le premier de ces termes.

On pourra supposer dans ce cas, en négligeant les quantités d'un ordre supérieur à $m^3 e^4$,

$$r = r_1 - r_1^2 \delta \frac{1}{r} + r_1^3 \left(\delta \frac{1}{r}\right)^2.$$

En substituant pour r_1, r_1^2, r_1^3, leurs valeurs elliptiques, et pour $\left(\delta \frac{1}{r}\right)$ et $\left(\delta \frac{1}{r}\right)^2$ leurs valeurs données n°s 21, 26, 48 et 52, Livre VII, on trouve

$$
\begin{aligned}
r = - & \left[1 - \frac{3}{8}e^2 - \frac{m^2}{6} - \frac{885}{128}m^3 - \left(\frac{4023}{384}m^2 + \frac{11745}{256}m^3\right)e^2\right] e\cos\varphi \\
& - \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{12}m^2 - \frac{555}{64}m^3\right) e^2 \cos 2\varphi \\
& - \left(m^2 + \frac{15}{8}me^2 + \frac{173}{32}m^2e^2 - \frac{45}{64}me^4\right) \cos 2\xi \\
& - \left(\frac{15}{8}m + \frac{155}{32}m^2 - \frac{15}{16}me^2 - \frac{423}{128}m^2e^2\right) e\cos(2\xi - \varphi) \\
& - \left(\frac{17}{16}m^2 + \frac{135}{64}me^2\right) e\cos(2\xi + \varphi), \\
& - \left(-\frac{15}{8}m - \frac{315}{32}m^2\right) e^2\cos(2\xi - 2\varphi);
\end{aligned}
$$

d'où, en différentiant, on a conclu

$$
\begin{aligned}
\frac{dr}{dt} = & \left[1 - \frac{11}{12}m^2 - \frac{1785}{128}m^3 - \left(\frac{3}{8} + \frac{3771}{384}m^2 + \frac{4185}{128}m^3\right)e^2\right] e\sin\varphi \\
& + \left(1 + \frac{1}{12}m^2 - \frac{195}{8}m^3\right) e^2 \sin 2\varphi \\
& + \left(2m^2 + \frac{15}{4}me^2 + \frac{113}{16}m^2e^2 - \frac{45}{32}me^4\right) \sin 2\xi \\
& + \left(\frac{15}{8}m + \frac{35}{32}m^2 - \frac{15}{16}me^2 - \frac{183}{128}m^2e^2\right) e\sin(2\xi - \varphi) \\
& + \left(\frac{51}{16}m^2 + \frac{405}{64}me^2\right) e\sin(2\xi + \varphi).
\end{aligned}
$$

En élevant au carré cette différentielle, négligeant les termes périodiques, et n'ayant égard dans le résultat qu'à ceux qui sont multipliés par e^4, on aura

$$
\frac{dr^2}{dt^2} = \left(\frac{1}{8} - \frac{791}{192}m^2 - \frac{11985}{1024}m^3\right)e^4. \qquad (a)
$$

Par le développement de la fonction R, n° 6, en

observant que cette fonction ne renferme dans sa partie non périodique aucun terme en e^4 de l'ordre m^2, n° 96, on trouve

$$R_0 = -\frac{225}{64} m^3 e^4;$$

d'où, en vertu de l'équation $r\frac{dR}{dr} = 2R$, on a conclu

$$r\frac{dR}{dr} = -\frac{225}{32} m^3 e^4. \qquad (b)$$

L'expression générale de la longitude vraie, n° 133, donne

$$\begin{aligned} v = {} & 2\left(1 - \frac{1}{8}e^2\right) e \sin\varphi + \frac{5}{4} e^2 \sin 2\varphi \\ & + \left(\frac{75}{16} me^2 - \frac{45}{32} me^4\right) \sin 2\xi \\ & + \frac{15}{4} me \sin(2\xi - \varphi) \\ & + \frac{195}{32} me^3 \sin(2\xi + \varphi) \\ & + \frac{45}{16} me^2 \sin(2\xi - 2\varphi). \end{aligned}$$

En combinant les différents termes de cette valeur avec ceux de la fonction $\frac{dR}{dv}$ qui ont mêmes arguments, et qu'on trouve rapportés n°s 17 et 46, on a formé la suivante :

$$2v\left(\frac{dR}{dv}\right) = -\frac{2655}{64} m^3 e^4. \qquad (c')$$

On a, nos 28 et 55,

$$\frac{1}{r^2}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt = -\frac{75}{32}me^4\cos 2\xi$$
$$-\frac{15}{8}me^3\cos(2\xi-\varphi)$$
$$+\left(-\frac{15}{8}m-\frac{159}{32}m^2\right)e^2\cos(2\xi-2\varphi).$$

En combinant cette valeur avec la suivante, n° 18,

$$-\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt = -\frac{3}{4}m^2\cos 2\xi$$
$$+\frac{9}{2}m^2 e\cos(2\xi-\varphi)$$
$$+\left(\frac{15}{8}m+\frac{45}{32}m^2\right)e^2\cos(2\xi-2\varphi),$$

on trouve

$$\frac{1}{r^2}\left[\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt\right]^2 = \left(\frac{225}{128}m^2+\frac{2385}{256}m^3\right)e^4. \qquad (d)$$

Si l'on substitue les différentes valeurs (a), (b), (c), (d) dans la formule (9), n° 2, en observant qu'on a $\frac{rd^2r}{dt^2} = -\frac{dr^2}{dt^2}$; et $\frac{dv}{dt}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt = -v\left(\frac{dR}{dv}\right)$, et en supposant ici $\frac{1}{r} = \alpha_0 e^4$, on aura

$$\frac{h^2}{r^2} = \left(\alpha_0 - \frac{1}{8} + \frac{2257}{384}m^2 - \frac{13755}{1024}m^3\right)e^4.$$

La fonction $\frac{r}{r^2}$ est déterminée par l'équation

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{r_1^2} + \frac{2}{r_1}\delta\frac{1}{r} + \left(\delta\frac{1}{r}\right)^2.$$

Si l'on substitue pour $\frac{1}{r_1^2}$, $\frac{1}{r_1}$ leurs valeurs elliptiques,

et pour $\left(\delta \frac{1}{r}\right)$ sa valeur nos 51 et 53, en observant que cette valeur, élevée au carré, a donné

$$\left(\delta \frac{1}{r}\right)^2 = \left(\frac{225}{32} m^2 + \frac{12705}{128} m^3\right) e^4,$$

et que nous supposons de plus $\delta \frac{1}{r} = \alpha_0 e^4$, on trouvera

$$\frac{1}{r^2} = \left(2\alpha_0 + \frac{3}{8} - \frac{5}{8} m^2 - \frac{8025}{1024} m^3\right) e^4.$$

En complétant la valeur précédente de $\frac{h^2}{r^2}$, par l'adjonction des termes en e^2, déjà déterminés n° 50, et en substituant dans l'expression résultante à la place de $\frac{1}{r^2}$ sa valeur complétée de la même manière, on obtiendra la suivante :

$$h^2 = \frac{1 - \frac{m^2}{3} - \left(\frac{1}{2} + \frac{611}{384} m^2 - \frac{4365}{256} m^3\right) e^2 - \left(\frac{1}{8} - \frac{2257}{384} m^2 + \frac{13755}{1024} m^3 - \alpha_0\right) e'^2}{1 + \frac{m^2}{3} + \left(\frac{1}{2} + \frac{739}{384} m^2 + \frac{2475}{256} m^3\right) e^2 + \left(\frac{3}{8} - \frac{5}{8} m^2 - \frac{8025}{1024} m^3 + 2\alpha_0\right) e'^2}$$

On en déduit

$$h^2 = 1 - \frac{2}{3} m^2 - \left(1 + \frac{547}{192} m^2 - \frac{945}{128} m^3\right) e^2 - \left(\alpha_0 - \frac{1293}{128} m^2 - \frac{195}{512} m^3\right) e^4,$$

et, par suite,

$$h = 1 - \frac{1}{3} m^2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{611}{384} m^2 - \frac{945}{256} m^3\right) e^2 - \left(\frac{1}{2}\alpha_0 + \frac{1}{8} - \frac{809}{192} m^2 - \frac{2085}{1024} m^3\right) e^4.$$

En multipliant cette valeur par celle de $\frac{1}{r^2}$ qui forme le dénominateur de l'expression précédente de h^2, en

n'ayant égard qu'aux termes dont nous nous occupons, on trouvera

$$\frac{h}{r^2} = \left(\frac{3}{2}\alpha_0 + \frac{213}{128}m^2 - \frac{1125}{128}m^3\right)e^4.$$

En combinant entre elles les valeurs de $\frac{1}{r^2}$ et de $\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt$, données nos 54 et 46, on formera la suivante :

$$\frac{1}{r^2}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt = \left(-\frac{225}{128}m^2 + \frac{1215}{256}m^3\right)e^4.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation (n), et qu'on égale à zéro le coefficient des termes en e^4, on trouvera, pour déterminer l'arbitraire α_0, l'équation suivante,

$$0 = \frac{3}{2}\alpha_0 + \left(\frac{213}{128} - \frac{225}{128} = -\frac{3}{32}\right)m^2 + \left(-\frac{1125}{128} + \frac{1215}{256} = -\frac{1035}{256}\right)m^3,$$

d'où l'on conclut enfin

$$\alpha_0 = \frac{1}{16}m^2 + \frac{345}{128}m^3.$$

Déterminons de la même manière le terme du coefficient a_0, multiplié par e'^4. Comme ce terme est beaucoup moins compliqué que le précédent, une indication sommaire des combinaisons qui servent à le former suffira pour le retrouver.

On aura d'abord, pour déterminer la valeur de r, dans ce cas,

$$r = 1 - \delta\frac{1}{r} + \left(\delta\frac{1}{r}\right)^2.$$

En substituant pour $\delta \frac{1}{r}$, $\left(\delta \frac{1}{r}\right)^2$ leurs valeurs, on a trouvé

$$r = -\left(m^2 - \frac{5}{2} m^2 e'^2 + \frac{13}{16} m^2 e'^4\right) \cos 2\xi$$
$$-\left(\frac{7}{2} m^2 - \frac{123}{16} m^2 e'^2\right) e' \cos(2\xi - \varphi')$$
$$-\left(-\frac{m^2}{2} + \frac{1}{16} m^2 e'^2\right) e' \cos(2\xi + \varphi')$$
$$-\frac{17}{2} m^2 e'^2 \cos(2\xi - 2\varphi').$$

En élevant au carré la différentielle de cette quantité, on en a conclu

$$\frac{dr^2}{dt^2} = \frac{105}{2} m^4 e'^4. \qquad (a')$$

Le développement de la fonction R, en observant que par une première approximation, comme on le verra plus loin, on a, dans a_0 le terme $\frac{5}{16} m^2 e'^4$, a donné

$$R_0 = \left(\frac{15}{32} m^2 - \frac{5401}{128} m^4\right) e'^4;$$

d'où, en vertu de la relation $r\frac{dR}{dr} = 2R$, on a conclu

$$r\frac{dR}{dr} = \left(\frac{15}{16} m^2 - \frac{5401}{64} m^4\right) e'^4. \qquad (b')$$

L'expression de R, n° 6, Livre VII, étant différentiée,

donnera dans $\frac{dR}{dv}$, les termes suivants :

$$\begin{aligned}\frac{dR}{dv} = & -\frac{3}{2}m^2\left(1-\frac{5}{2}e'^2+\frac{13}{16}e'^4\right)\sin 2\xi \\ & -\frac{21}{4}m^2\left(1-\frac{123}{56}e'^2\right)e'\sin(2\xi-\varphi') \\ & +\frac{3}{4}m^2\left(1-\frac{1}{8}e'^2\right)e'\sin(2\xi+\varphi') \\ & -\frac{51}{4}m^2e'^2\sin(2\xi-2\varphi').\end{aligned}$$

Les différents termes de cette valeur étant combinés avec ceux de l'expression de v, n° 133, qui ont mêmes arguments, ont produit la suivante :

$$2v\left(\frac{dR}{dv}\right) = -\frac{3465}{64}m^4e'^4. \qquad (c')$$

Si, après avoir intégré la valeur précédente de $\frac{dR}{dv}$ on combine les termes de l'expression résultante avec ceux de la fonction $\frac{1}{r^2}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt$, donnée n°s 28 et 55, qui ont les mêmes arguments, en rejetant les termes périodiques, et n'ayant égard qu'à ceux qui sont multipliés par e'^4, on trouvera

$$\frac{1}{r^2}\left[\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt\right]^2 = \frac{15305}{1024}m^4e'^4. \qquad (d')$$

Si l'on substitue ces diverses valeurs (a'), (b'), (c'), (d') dans l'équation (9) et qu'on suppose de plus, comme nous le ferons ici, $\frac{1}{r} = \alpha'_0\,e'^4$, on aura

$$\frac{h^2}{r^2} = \left[\alpha_0 - \frac{15}{16}m^2 + \left(\frac{5401}{64} - \frac{105}{2} - \frac{3465}{64} + \frac{15305}{1024} = -\frac{2479}{1024}\right)m^4\right]e'^4.$$

La fonction $\frac{1}{r^2}$ est déterminée, dans ce cas, par la formule

$$\frac{1}{r^2} = 1 + 2\delta\frac{1}{r} + \left(\delta\frac{1}{r}\right)^2.$$

Au moyen de la valeur de $\delta\frac{1}{r}$, rapportée n°s 14 et 53, on a formé la suivante :

$$\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2 = a_0^2 + \frac{501}{32}m^4 e'^4.$$

Le coefficient a_0 d'après les résultats d'une première approximation, comme nous l'avons dit plus haut, et d'après ce qu'on a vu, n° 27, Livre VII, contient les termes suivants

$$a_0 = \frac{m^2}{6} + \frac{1}{4}m^2 e'^2 + \frac{5}{16}m^2 e'^4;$$

d'où résulte dans a_0^2 le suivant :

$$a_0^2 = \left(\frac{1}{16} + \frac{5}{48} = \frac{1}{6}\right) m^4 e'^4.$$

On aura donc ainsi

$$\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2 = \left(\frac{1}{6} + \frac{501}{32} = \frac{1519}{96}\right) m^4 e'^4.$$

Nous avons supposé d'ailleurs, en n'ayant égard qu'aux termes que nous considérons, $\delta\frac{1}{r} = \alpha'_0 e'^4$, on aura donc

$$\frac{1}{r^2} = \left(2\alpha'_0 + \frac{1519}{96}m^4\right) e'^4.$$

Si l'on substitue cette valeur dans l'expression

précédente de $\frac{h^2}{r^2}$, en ajoutant à l'une et à l'autre les termes déjà déterminés par les approximations antérieures, n° 50, Livre VII, on trouvera

$$h^2 = \frac{1 - \frac{m^2}{3} - \frac{m^2}{2}e'^2 - \left(\frac{15}{16}m^2 + \frac{7479}{1024}m^4 - \alpha'_0\right)e'^4}{1 + \frac{m^2}{3} + \frac{m^2}{2}e'^2 + \left(\frac{1519}{96}m^4 + 2\alpha'\right)e'^4}$$

En observant que la première approximation donne $\alpha'_0 = \frac{5}{16}m^2$, et en ayant soin de substituer cette valeur de α'_0 dans les termes où cette quantité se trouvera multipliée par m^2, on conclura aisément

$$h^2 = 1 - \frac{2}{3}m^2 - m^2 e'^2 - \left(\alpha'_0 + \frac{15}{16}m^2 + \frac{66949}{3072}m^4\right)e'^4,$$

et, par suite,

$$h = 1 - \frac{1}{3}m^2 - \frac{1}{2}m^2 e'^2 - \left(\frac{1}{2}\alpha'_0 + \frac{15}{32}m^2 + \frac{22097}{2048}m^4\right)e'^4.$$

Si l'on multiplie cette quantité par la valeur de $\frac{1}{r^2}$ qui forme le dénominateur de l'expression précédente de h^2, on aura la suivante :

$$\frac{h}{r^2} = 1 + \left(\frac{3}{2}\alpha'_0 - \frac{15}{32}m^2 + \frac{25723}{6144}m^4\right)e'^4.$$

D'après les valeurs de la fonction $\frac{1}{r^2}$ et $\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt$, rapportées n°s 46 et 54, on a formé par leur combinaison l'expression suivante

$$\frac{1}{r^2}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt = \frac{5103}{128}m^4 e'^4.$$

Si l'on substitue ces deux valeurs dans l'équation (n), et qu'on égale à zéro la somme des termes multipliés par e'^4, on trouvera, pour déterminer l'arbitraire α'_0, l'équation suivante

$$\frac{3}{2}\alpha'_0 - \frac{15}{32}m^2 + \left(\frac{25723}{6144} + \frac{5103}{128} = \frac{270667}{6144}\right)m^4 = 0;$$

d'où l'on conclut

$$\alpha'_0 = \frac{5}{16}m^2 - \frac{270667}{9216}m^4.$$

On aura donc, en vertu des deux dernières déterminations, dans l'expression de a_0, les deux termes suivants que nous nous étions proposé de calculer :

$$a_0 = \left(\frac{1}{16}m^2 + \frac{345}{128}m^3\right)e^4$$
$$+ \left(\frac{5}{16}m^2 - \frac{270667}{9216}m^4\right)e'^4.$$

Pour ne négliger aucune quantité susceptible de produire une variation appréciable dans l'équation séculaire de la Lune, nous allons encore déterminer, dans l'expression du coefficient a_0, deux termes dépendants de la parallaxe, que nous n'avons point encore considérée dans ces recherches.

Occupons-nous d'abord du terme qui, dans l'expression de la fonction perturbatrice n° 6, Livre VII, dépend de l'angle ξ. Comme nous négligerons les termes qui seraient de l'ordre m^4 ou d'un ordre supérieur, il nous suffira de supposer ici

$$\frac{h^2}{r^2} = -\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{1}{r} - r\frac{dR}{dr} - \frac{2\,dv}{dt}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt. \qquad (p)$$

Formons les différents termes qui entrent dans le deuxième membre de cette équation. En faisant abstraction de l'excentricité de l'orbe lunaire, et négligeant les quantités d'un ordre supérieur à m^2, il suffira de supposer ici

$$r = 1 - \delta \frac{1}{r}.$$

Nous avons supposé, n° 15, $\delta \frac{1}{r} = a_{10} \frac{a}{a_1} \cos \xi$, on aura donc, en substituant pour a_{10}, sa valeur, n° 26,

$$r = 1 + \left(\frac{15}{16} m + \frac{81}{16} m^2 \right) \frac{a}{a'} \cos \xi.$$

Si l'on différentie cette valeur, et qu'on élève au carré sa différentielle, en négligeant les termes périodiques, on trouvera

$$\frac{dr^2}{dt^2} = \left(\frac{225}{512} m^2 + \frac{495}{128} m^3 \right) \left(\frac{a}{a'} \right)^2.$$

Nous avons trouvé, n° 13, pour l'expression de δR relative aux termes dépendants de la parallaxe

$$\delta R = -3\overline{R} \left(r \delta \frac{1}{r} \right) + \left(\frac{d\overline{R}}{dv} \right) \delta v.$$

Il suffira, dans l'ordre d'approximation où nous nous arrêtons, de supposer ici

$$-3\overline{R} = -\frac{9}{8} m^2 \frac{a}{a'} \cos \xi, \quad \frac{d\overline{R}}{dv} = -\frac{3}{8} m^2 \frac{a}{a'} \sin \xi,$$

$$r \delta \frac{1}{r} = -\frac{15}{16} m \frac{a}{a'} \cos \xi, \quad \delta v = -\frac{15}{8} m \frac{a}{a'} \sin \xi.$$

On trouvera ainsi

$$\delta R = \frac{225}{256} m^3 \left(\frac{a}{a'}\right)^2.$$

Ce terme devra être multiplié par 3 pour avoir le terme correspondant de $r\frac{dR}{dr}$, conformément à ce qui a été dit n° 13, Livre VII. La fonction perturbatrice R contient de plus, dans l'ordre m^2, le terme $\frac{9}{64} m^2 \left(\frac{a}{a'}\right)^2$; mais, d'après l'origine de ce terme et l'expression générale de R, n° 3, Livre VII, il est facile de voir qu'il devra être multiplié par le facteur 4 pour avoir le terme correspondant de la fonction $r\frac{dR}{dr}$. On aura donc ainsi

$$r\frac{dR}{dr} = \left(\frac{9}{16} m^2 + \frac{675}{256} m^3\right) \left(\frac{a}{a'}\right)^2. \qquad (b)$$

La fonction R, n° 6, donne, en la différentiant,

$$\frac{dR}{dv} = -\frac{3}{8} m^2 \frac{a}{a'} \sin \xi.$$

En combinant cette valeur avec le terme de l'expression de v qui dépend du même argument, et se bornant aux termes de l'ordre m^3, on trouve

$$2v\left(\frac{dR}{dv}\right) = \frac{45}{64} m^3 \left(\frac{a}{a'}\right)^2. \qquad (c)$$

Si l'on substitue les différentes quantités (a), (b), (c) dans l'équation (p), en observant que nous supposerons ici le terme de a_0 que nous cherchons, représenté par $\alpha_0 \left(\frac{a}{a'}\right)^2$, ce qui donne, en ne considérant

que ce terme, $\frac{1}{r} = \alpha_0 \left(\frac{a}{a_1}\right)^2$, on trouvera

$$\frac{h^2}{r^2} = \left[\alpha_0 - \left(\frac{225}{512} + \frac{9}{16} = \frac{513}{512}\right) m^2 - \left(\frac{495}{128} + \frac{675}{256} - \frac{45}{64} = \frac{1485}{256}\right) m^3\right] \left(\frac{a}{a_1}\right)^2.$$

L'expression de $\frac{1}{r^2}$ est déterminée par l'équation

$$\frac{1}{r^2} = 1 + 2\delta\frac{1}{r} + \left(\delta\frac{1}{r}\right)^2.$$

Nous avons supposé plus haut $\delta\frac{1}{r} = \alpha_0 \left(\frac{a}{a'}\right)^2$; on trouve d'ailleurs, d'après la valeur de $\delta\frac{1}{r}$, nos 15 et 26,

$$\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2 = \left(\frac{225}{512} m^2 + \frac{1215}{256} m^3\right) \left(\frac{a}{a'}\right)^2.$$

On aura ainsi, en n'ayant égard qu'aux termes dont nous nous occupons,

$$\frac{1}{r^2} = \left(2\alpha_0 + \frac{225}{512} m^2 + \frac{1215}{256} m^3\right) \left(\frac{a}{a'}\right)^2.$$

Si l'on substitue cette valeur dans l'expression de $\frac{h^2}{r^2}$, en faisant attention aux termes déjà déterminés, n° 50, Livre VII, on aura

$$h^2 = \frac{1 - \frac{m^2}{3} - \left(\alpha_0 + \frac{513}{512} m^2 + \frac{1485}{256} m^3\right) \left(\frac{a}{a'}\right)^2}{1 + \frac{m^2}{3} + \left(2\alpha_0 + \frac{225}{512} m^2 + \frac{1215}{256} m^3\right) \left(\frac{a}{a'}\right)^2}.$$

On tire de là

$$h^2 = 1 - \frac{2}{3} m^2 - \left[\alpha_0 + \left(\frac{513}{512} + \frac{225}{512} = \frac{369}{256}\right) m^2 + \left(\frac{1485}{256} + \frac{1215}{256} = \frac{675}{64}\right) m^3\right] \left(\frac{a}{a'}\right)^2,$$

et, par suite,

$$h = 1 - \frac{1}{3}m^2 - \left(\frac{1}{2}\alpha_0 + \frac{369}{512}m^2 + \frac{675}{128}m^3\right)\left(\frac{a}{a'}\right)^2.$$

Si l'on multiplie cette quantité par la valeur de $\frac{1}{r^2}$ qui forme le dénominateur de la première expression de h^2, on aura la suivante :

$$\frac{h}{r^2} = 1 + \left[\frac{3}{2}\alpha_0 - \left(\frac{369}{512} - \frac{225}{512} = \frac{9}{32}\right)m^2 + \left(\frac{675}{128} - \frac{1215}{256} = \frac{135}{128}\right)m^3\right]\left(\frac{a}{a'}\right)^2.$$

La fonction $\int\left(\frac{d\text{R}}{dv}\right)dt$, n° 18, contient le terme

$$\int\left(\frac{d\text{R}}{dv}\right)dt = \frac{3}{8}m^2\frac{a}{a'}\cos\xi,$$

et la fonction $\frac{1}{r^2}$, n° 27, le terme correspondant

$$\frac{1}{r^2} = -\frac{15}{8}m\frac{a}{a'}\cos\xi.$$

En les combinant, on aura

$$\frac{1}{r^2}\int\left(\frac{d\text{R}}{dv}\right)dt = -\frac{45}{128}m^3\left(\frac{a}{a'}\right)^2.$$

Si l'on substitue cette valeur ainsi que celle de $\frac{h^2}{r^2}$ dans l'équation (n), qu'on égale à zéro le coefficient du terme multiplié par $\left(\frac{a}{a'}\right)^2$, on aura, pour déterminer l'arbitraire α_0, l'équation

$$\frac{3}{2}\alpha_0 - \frac{9}{32}m^2 - \left(\frac{135}{128} + \frac{45}{128} = \frac{45}{32}\right)m^3 = 0;$$

d'où l'on tire

$$a_0 = \frac{3}{16} m^2 + \frac{15}{16} m^3.$$

Calculons de même le terme de a_0 qui aura pour coefficient $\left(\frac{a}{a'}\right)^2 e'^2$, et qui, à raison de la variabilité de la quantité e'^2 qu'il contient, pourrait avoir quelque influence sur l'équation séculaire, dont cette variabilité est, comme on l'a dit n° 94, Livre VII, la véritable cause.

La fonction r étant déterminée par l'équation

$$r = 1 - \delta \frac{1}{r} + \left(\delta \frac{1}{r}\right)^2,$$

en substituant, pour $\delta \frac{1}{r}$ et $\left(\delta \frac{1}{r}\right)^2$ leurs valeurs, n°s 21 et 26, on aura les termes suivants :

$$r = 1 - \frac{15}{16} m \frac{a}{a'} \cos(\xi - \varphi')$$

$$- \left(\frac{5}{4} - \frac{45}{8} m + \frac{6553}{192} m^2\right) \frac{a}{a'} e' \cos(\xi + \varphi').$$

En différentiant cette valeur, et élevant ensuite au carré sa différentielle, on formera la suivante :

$$\frac{dr^2}{dt^2} = \left(\frac{25}{32} - \frac{225}{32} m + \frac{90505}{1536} m^2\right) \left(\frac{a}{a'}\right)^2 e'^2. \qquad (a')$$

Le développement de la fonction R a été effectué par la formule n° 13, Livre VII,

$$\delta R = -3\overline{R}\left(r\delta \frac{1}{r}\right) + \frac{d\overline{R}}{dv} \delta v.$$

En substituant pour $\left(r\delta \frac{1}{r}\right)$ et δv leurs valeurs,

nos 15 et 30, on a trouvé

$$R_1 = -\frac{75}{64} m^2 \left(\frac{a}{a'}\right)^2 e'^2.$$

Ce terme multiplié par 3, conformément à ce qui a été dit n° 13, donnera le terme correspondant de $r\frac{dR}{dr}$. La fonction R contiendra encore dans l'ordre m^2, à raison du terme $\frac{9m'r^4}{64r'^5}$ qui entre dans son expression générale, n° 3, le terme

$$R_2 = \frac{9}{64} m^2 \left(\frac{a}{a'}\right)^2 (1 + 5e'^2),$$

et, à raison de sa formation, il faudra multiplier par 4 cette quantité, pour avoir le terme correspondant de $r\frac{dR}{dr}$, on aura donc ainsi

$$r\frac{dR}{dr} = 3R_1 + 4R_2,$$

ou, en substituant pour R_1 et R_2 leurs valeurs, et n'ayant égard qu'aux termes que nous considérons,

$$r\frac{dR}{dr} = \left(-\frac{225}{64} + \frac{45}{16} = -\frac{45}{64}\right) m^2 \left(\frac{a}{a'}\right)^2 e'^2. \qquad (b')$$

La fonction $\frac{dR}{dv}$, n° 17, Livre VII, contient le terme

$$-\frac{3}{8} m^2 \frac{a}{a'} e' \sin(\xi + \varphi');$$

en le combinant avec le terme $\frac{5}{2}\frac{a}{a'}e' \sin(\xi + \varphi')$ de la fonction v, qui a le même argument, il en résulte

le suivant :

$$2v\left(\frac{dR}{dv}\right) = -\frac{15}{16}m^2\left(\frac{a}{a'}\right)^2 e'^2. \qquad (c')$$

La fonction $\frac{1}{r^2}\left[\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt\right]^2$ ne produirait évidemment que des termes de l'ordre m^4 ; en substituant donc les différentes valeurs (a'), (b'), (c') que nous venons de trouver dans la formule (p), et supposant ici $\frac{1}{r} = \alpha'_0 \left(\frac{a}{a'}\right)^2 e'^2$, on trouvera

$$\frac{h^2}{r^2} = \left[\alpha'_0 - \frac{25}{32} + \frac{225}{32}m - \left(\frac{90505}{1536} - \frac{45}{64} + \frac{15}{16} = \frac{90865}{1536}\right)m^2\right]\left(\frac{a}{a'}\right)^2 e'^2.$$

L'équation

$$\frac{1}{r^2} = 1 + 2\delta\frac{1}{r} + \left(\delta\frac{1}{r}\right)^2,$$

en observant que d'après la valeur de $\delta\frac{1}{r}$, nos 26 et 53, on a trouvé

$$\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2 = \left(\frac{25}{32} - \frac{225}{32}m + \frac{30885}{512}m^2\right)\left(\frac{a}{a'}\right)^2 e'^2,$$

et que nous avons supposé $\delta\frac{1}{r} = \alpha'_0 \left(\frac{a}{a'}\right)^2 e'^2$, donne, en y substituant ces valeurs,

$$\frac{1}{r^2} = \left(2\alpha'_0 + \frac{25}{32} - \frac{225}{32}m + \frac{30885}{512}m^2\right)\left(\frac{a}{a'}\right)^2 e'^2.$$

En ajoutant à cette valeur les termes $1 + \frac{m^2}{3}$, déjà déterminés n° 50, Livre VII, et en les substituant ensuite dans l'expression de $\frac{h^2}{r^2}$, augmentée pareillement

des termes $1 - \frac{m^2}{3}$ trouvés dans le même numéro, on formera la suivante

$$h^2 = \frac{1 - \frac{m^2}{3} - \left[\frac{25}{32} - \frac{225}{32}m + \frac{90865}{1536}m^2 - \alpha'_0\right]\left(\frac{a}{a'}\right)^2 e'^2}{1 + \frac{m^2}{3} + \left[\frac{25}{32} - \frac{225}{32}m + \frac{30885}{512}m^2 + 2\alpha'_0\right]\left(\frac{a}{a'}\right)^2 e'^2},$$

d'où l'on tire

$$h^2 = 1 - \frac{2}{3}m^2 - \left(\alpha'_0 + \frac{25}{16} - \frac{225}{16}m + \frac{5685}{48}m^2\right)\left(\frac{a}{a'}\right)^2 e'^2,$$

et, par suite,

$$h = 1 - \frac{1}{3}m^2 - \left(\frac{1}{2}\alpha'_0 + \frac{25}{32} - \frac{225}{32}m + \frac{2855}{48}m^2\right)\left(\frac{a}{a'}\right)^2 e'^2.$$

En multipliant cette quantité par la valeur de $\frac{1}{r^2}$, qui forme le dénominateur de l'expression de h^2, on trouve

$$\frac{h}{r^2} = 1 + \left(\frac{3}{2}\alpha'_0 + \frac{165}{512}m^2\right)\left(\frac{a}{a'}\right)^2 e'^2,$$

expression où l'on voit que les termes indépendants de m ou multipliés par la première puissance de cette quantité ont totalement disparu, ce qui est très-remarquable; le coefficient a_0 ne contiendra donc pas non plus de termes de cette espèce.

L'expression de $\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt$, n° 18, Livre VII, contient le terme suivant :

$$\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt = \frac{3}{8}m^2\left(\frac{a}{a'}\right)e'\cos(\xi + \varphi');$$

La fonction $\frac{1}{r^3}$, n° 27, Livre VII, renferme le terme

$$\frac{1}{r^3} = \frac{5}{2}\left(\frac{a}{a'}\right) c' \cos(\xi + \varphi').$$

La combinaison de ces valeurs donne

$$\frac{1}{r^3}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt = \frac{15}{32} m^2 \left(\frac{a}{a'}\right)^2 e'^2.$$

Si l'on substitue dans l'équation (n) cette valeur, ainsi que celle de $\frac{h}{r^3}$, à la place des quantités qui les représentent, qu'on égale à zéro, dans l'équation résultante, le coefficient du terme multiplié par $\left(\frac{a}{a'}\right)^2 e'^2$, on aura, pour déterminer l'arbitraire α'_0, l'équation

$$\frac{3}{2}\alpha'_0 + \left(\frac{165}{512} + \frac{15}{32} = \frac{405}{512}\right) m^2 = 0;$$

d'où l'on conclut

$$\alpha'_0 = -\frac{135}{256} m^2.$$

Ainsi donc, en vertu des calculs précédents, le coefficient a_0 contiendra les deux termes suivants dépendants de la parallaxe, et que nous nous étions proposé de déterminer :

$$a_0 = \left(\frac{3}{16} m^2 + \frac{15}{16} m^3\right)\left(\frac{a}{a'}\right)^2$$
$$- \frac{135}{256} m^2 \left(\frac{a}{a'}\right)^2 e'^2.$$

3. Considérons de la même manière, dans l'expression de a_0, les termes dépendants de l'inclinaison

de l'orbe lunaire sur l'écliptique. Pour cela, reprenons l'équation générale (n), n° 69, Livre VII,

$$\left.\begin{aligned}\frac{h^2(1+s^2)}{r^2} = -\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{1}{r} - r\frac{dR}{dr} - \frac{2\,dv}{dt}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt \\ + \frac{1+s^2}{r^2}\left[\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt\right]^2 - \frac{r^2 ds^2}{dt^2}.\end{aligned}\right\} \qquad (q)$$

Nous avons déterminé, dans le n° 69, les termes qui sont multipliés par le facteur γ^2, nous nous proposons de déterminer ici ceux qui dépendent du facteur $e'^2\gamma^2$. Ce calcul exige d'abord un nouveau développement de la fonction perturbatrice R. Si dans sa partie non périodique on n'a égard qu'aux termes multipliés par $e'^2\gamma^2$, en employant la méthode indiquée n° 65, et en joignant aux nouveaux termes qui en résulteront ceux qui sont multipliés par γ^2, et qui ont été calculés numéro cité, en portant l'approximation jusqu'aux quantités de l'ordre $m^5 e'^2\gamma^2$ (*), on trouvera

$$\begin{aligned}\delta R = \left(-\frac{3}{8}m^2 + \frac{9}{32}m^3 + \frac{985}{512}m^4 + \frac{8615}{2048}m^5\right)\gamma^2 \\ + \left(-\frac{9}{16}m^2 + \frac{93}{64}m^3 + \frac{19089}{1024}m^4 + \frac{49589}{1024}m^5\right)e'^2\gamma^2.\end{aligned}$$

Le rayon vecteur r, dans l'orbite troublée, est déterminé, dans ce cas, par l'équation

$$r = 1 - \delta\frac{1}{r} + \left(\delta\frac{1}{r}\right)^2 - \left(\delta\frac{1}{r}\right)^3 + \text{etc.}$$

(*) Le calcul des termes multipliés par $m^4 e'^2\gamma^2$ et $m^5 e'^2\gamma^2$, suppose que l'on a déterminé les termes du coefficient a_0 de l'ordre $m^2 e'^2\gamma^2$ et $m^3 e'^2\gamma^2$, on a, comme on le verra plus loin,

$$a_0 = (0)\,m^2 e'^2\gamma^2 + \frac{9}{32}m^3 e'^2\gamma^2.$$

D'après la valeur générale de la fonction $\frac{1}{r}$, donnée nos 26, 53 et 72, Livre VII, on a

$$\begin{aligned}\delta\frac{1}{r} = \Big\{ & m^2 + \frac{19}{6}m^3 - \left(\frac{5}{2}m^2 + \frac{239}{12}m^3\right)e'^2 \\ & - \left[\frac{1}{2}m^2 + \frac{29}{24}m^3 + \left(\frac{5}{4}m^2 + \frac{205}{12}m^3\right)e'^2\right]\gamma^2 \Big\} \cos 2\xi \\ & + \left[\frac{7}{2}m^2 + \frac{157}{8}m^3 - \left(\frac{7}{4}m^2 + \frac{47}{4}m^3\right)\gamma^2\right] e' \cos(2\xi - \varsigma') \\ & - \left[\frac{m^2}{2} + \frac{91}{24}m^3 - \left(\frac{1}{4}m^2 + \frac{131}{24}m^3\right)\gamma^2\right] e' \cos(2\xi + \varsigma').\end{aligned}$$

Les fonctions $\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2$, $\left(\delta\frac{1}{r}\right)^3$, etc., ne contenant aucunes inégalités semblables, dans l'ordre de quantités où nous nous arrêtons, on pourra supposer $r = 1 - \delta\frac{1}{r}$, et, par conséquent, $dr = -d.\delta\frac{1}{r}$, d'où l'on conclut $(dr)^2 = \left[d.\delta\frac{1}{r}\right]^2$. Cela posé, si, après avoir différentié l'expression précédente, on l'élève au carré, qu'on rejette tous les termes périodiques, et que dans le résultat final on n'ait égard qu'à ceux qui sont multipliés par $e'^2\gamma^2$, on trouvera

$$\frac{dr^2}{dt^2} = \left(-15m^4 - \frac{759}{6}m^5\right)e'^2\gamma^2.$$

Nous désignerons dans ce numéro par $\alpha_0 e'^2\gamma^2$, les termes qui ont pour facteur $e'^2\gamma^2$ dans l'expression de a_0, en sorte qu'en n'ayant égard qu'à ces termes, on aura

$$\frac{1}{r} = \alpha_0 e'^2\gamma^2.$$

D'après l'expression précédente de la fonction R,

on a d'ailleurs

$$r\frac{d\mathrm{R}}{dr}=2\mathrm{R}_0=\left(-\frac{9}{8}m^2+\frac{93}{32}m^3+\frac{19089}{512}m^4+\frac{49589}{512}m^5\right)e'^2\gamma^2.$$

L'expression générale de la longitude vraie, nos 30 et 77, donne

$$\begin{aligned}v=&\left[\frac{11}{8}m^2+\frac{59}{12}m^3-\left(\frac{55}{16}m^2+\frac{691}{24}m^3\right)e'^2\right.\\&\quad-\left(\frac{3}{16}m+\frac{47}{64}m^2+\frac{5149}{3072}m^3\right)\gamma^2\\&\quad\left.+\left(\frac{15}{32}m+\frac{269}{64}m^2+\frac{221027}{6144}m^3\right)e'^2\gamma^2\right]\sin 2\xi\\&+\left[\frac{77}{16}m^2+\frac{479}{16}m^3-\left(\frac{7}{16}m+\frac{209}{64}m^2+\frac{17587}{1024}m^3\right)\gamma^2\right]e'\sin(2\xi-\varphi')\\&+\left[-\frac{11}{16}m^2-\frac{257}{48}m^3+\left(\frac{3}{16}m+\frac{73}{64}m^2+\frac{24397}{3072}m^3\right)\gamma^2\right]e'\sin(2\xi+\varphi')\\&-3me'\sin\varphi'.\end{aligned}$$

On a d'ailleurs, nos 17, 46 et 66,

$$\begin{aligned}\frac{d\mathrm{R}}{dv}=&\left\{-\frac{3}{2}m^2+\frac{m^4}{2}+\left(\frac{15}{4}m^2+18m^3+\frac{25}{4}m^4\right)e'^2\right.\\&\quad\left.+\left[\frac{3}{4}m^2-\left(\frac{15}{8}m^3+\frac{117}{4}m^4\right)e'^2\right]\gamma^2\right\}\sin 2\xi\\&+\left[-\frac{21}{4}m^2-\frac{9}{2}m^3-\frac{m^4}{2}+\left(\frac{21}{8}m^2+\frac{117}{16}m^3\right)\gamma^2\right]e'\sin(2\xi-\varphi')\\&+\left[\frac{3}{4}m^2+\frac{9}{2}m^3-\frac{5}{2}m^4-\left(\frac{3}{8}m^2+\frac{117}{16}m^3\right)\gamma^2\right]e'\sin(2\xi+\varphi')\\&+\left(\frac{3}{8}m^3-\frac{33}{32}m^4\right)\gamma^2e'\sin\varphi'.\end{aligned}$$

En combinant entre elles ces deux expressions, en rejetant les termes périodiques et en observant qu'on peut supposer, dans ce cas, $v\frac{d\mathrm{R}}{dv}=-\frac{dv}{dt}\int\left(\frac{d\mathrm{R}}{dv}\right)dt$, on trouve

$$\frac{2dv}{dt}\int\left(\frac{d\mathrm{R}}{dv}\right)dt=-\left(\frac{33}{32}m^3+\frac{3981}{256}m^4+\frac{48217}{512}m^5\right)e'^2\gamma^2.$$

D'après les valeurs de $\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt$, nos 18, 46 et 66, on trouve aisément

$$-\frac{1}{r^2}\left[\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt\right]^2=\left(\frac{135}{64}m^4+\frac{243}{32}m^5\right)e'^2\gamma^2.$$

On a d'ailleurs, nos 23 et 50,

$$\frac{1}{r^2}\left[\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt\right]^2=\frac{9}{32}m^4+\frac{9}{16}m^5+\left(\frac{135}{64}m^4+\frac{243}{32}m^5\right)e'^2,$$

et en supposant $s^2=\frac{1}{2}\gamma^2$, ce qui suffit ici, on en conclut

$$\frac{s^2}{r^2}\left[\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt\right]^2=\left(\frac{135}{128}m^4+\frac{243}{64}m^5\right)e'^2\gamma^2,$$

et, par suite,

$$\frac{1+s^2}{r^2}\left[\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt\right]^2$$
$$=\left[\left(-\frac{135}{64}+\frac{135}{128}=-\frac{135}{128}\right)m^4+\left(-\frac{243}{32}+\frac{243}{64}=-\frac{243}{64}\right)m^5\right]e'^2\gamma^2.$$

L'expression de la fonction s a été donnée, nos 44 et 63, en élevant au carré sa différentielle, on en a conclu la suivante :

$$\begin{aligned}\frac{ds^2}{dt^2}=&\left(\frac{1}{2}+\frac{105}{128}m^2-\frac{3}{256}m^3\right)\gamma^2\\&+\left(\frac{607}{128}m^2-\frac{713}{512}m^3+\frac{16293}{256}m^4+\frac{423245}{49152}m^5\right)e'^2\gamma^2\\&-\left(\frac{3}{2}m^2+\frac{1}{64}m^3\right)\gamma^2e'\cos\varphi'\\&+\left[\frac{3}{8}m+\frac{67}{32}m^2+\frac{9773}{1536}m^3-\left(\frac{15}{16}m+\frac{319}{32}m^2+\frac{173371}{3072}m^3\right)e'^2\right]\gamma^2\cos 2\xi\\&+\left(\frac{7}{8}m+\frac{279}{32}m^2+\frac{20155}{512}m^3\right)\gamma^2e'\cos(2\xi-\varphi')\\&+\left(\frac{3}{8}m+\frac{83}{32}m^2+\frac{11257}{1536}m^3\right)\gamma^2e'\cos(2\xi+\varphi').\end{aligned}$$

En négligeant l'excentricité de l'orbe lunaire, on a, n° 69,

$$r^2 = 1 - 2\left(\delta\frac{1}{r}\right) + 3\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2 + \text{etc.}.$$

En substituant pour $\delta\frac{1}{r}$, $\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2$, etc., leurs valeurs, n°s 21 et 26, Livre VII, on aura

$$\begin{aligned} r^2 = 1 - \frac{m^2}{3} &- \left(\frac{m^2}{2} - \frac{2227}{96}m^4 - \frac{2925}{16}m^5\right)e'^2 \\ &- \left[2m^2 + \frac{19}{3}m^3 + \frac{122}{9}m^4 \right. \\ &\qquad \left. - \left(5m^2 + \frac{239}{6}m^3 + \frac{2455}{18}m^4\right)e'^2\right]\cos 2\xi \\ &+ \left(7m^2 + \frac{157}{4}m^3 + \frac{3373}{24}m^4\right)e'\cos(2\xi - \varphi') \\ &+ \left(m^2 + \frac{91}{12}m^3 + \frac{905}{72}m^4\right)e'\cos(2\xi + \varphi') \\ &+ 3m^2 e'\cos\varphi'. \end{aligned}$$

En combinant entre elles ces deux expressions, on a trouvé

$$\frac{r^2\,ds^2}{dt^2} = \left(\frac{575}{128}m^2 - \frac{1417}{512}m^3 - \frac{16195}{768}m^4 - \frac{12909215}{98304}m^5\right)e'^2\gamma^2. \qquad (e)$$

Si l'on substitue dans l'équation (q) les différentes valeurs (a), (b), (c), (d), (e), que nous venons de calculer, on aura

$$\frac{h^2(1+s^2)}{r^2} = \left(\alpha_0 - \frac{431}{128}m^2 + \frac{457}{512}m^3 + \frac{19565}{1536}m^4 + \frac{24707999}{98304}m^5\right)e'^2\gamma^2.$$

D'après la valeur de s rapportée n°s 44 et 63, on a

formé la suivante (*voir* le n° 73) :

$$s^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{9}{128}m^2 + \frac{141}{256}m^3\right)\gamma^2$$
$$+ \left(\frac{463}{128}m^2 + \frac{343}{512}m^3 - \frac{1041}{256}m^4 - \frac{121203}{3072}m^5\right)e'^2\gamma^2$$
$$- \frac{3}{4}m^2\gamma^2 e' \cos\varphi'$$
$$+ \left[-\frac{3}{8}m^2 - \frac{3}{32}m^3 + \frac{273}{512}m^4 + \left(\frac{15}{16}m + \frac{159}{32}m^2 + \frac{5121}{1024}m^3\right)e'^2\right]\gamma^2\cos 2\xi$$
$$- \left(\frac{7}{8}m + \frac{55}{32}m^2 - \frac{469}{512}m^3\right)\gamma^2 e' \cos(2\xi - \varphi')$$
$$+ \left(\frac{3}{8}m + \frac{51}{32}m^2 + \frac{1125}{1536}m^3\right)\gamma^2 e' \cos(2\xi + \varphi').$$

On a d'ailleurs, n° 54,

$$\frac{1}{r^2} = 1 + \frac{m^2}{3} + \left(\frac{m^2}{2} - \frac{323}{96}m^4 - \frac{189}{16}m^5\right)e'^2$$
$$+ \left[2m^2 + \frac{19}{3}m^3 + \frac{134}{9}m^4 - \left(5m^2 + \frac{239}{6}m^3 + \frac{2803}{18}m^4\right)e'^2\right]\cos 2\xi$$
$$+ \left(7m^2 + \frac{157}{4}m^3 + \frac{3341}{24}m^4\right)e'\cos(2\xi - \varphi')$$
$$- \left(m^2 + \frac{91}{12}m^3 + \frac{1385}{72}m^4\right)e'\cos(2\xi + \varphi')$$
$$- 3m^2 e' \cos\varphi',$$

d'où, par la combinaison de ces valeurs, on tire

$$\frac{s^2}{r^2} = \left(\frac{1}{2} + \frac{91}{384}m^2 + \frac{45}{256}m^3\right)\gamma^2$$
$$+ \left(\frac{405}{128}m^2 - \frac{361}{512}m^3 - \frac{5691}{512}m^4 - \frac{6887279}{49152}m^5\right)e'^2\gamma^2.$$

On a trouvé, n° 50,

$$h^2 = 1 - \frac{2}{3}m^2 + \frac{19}{72}m^4 - \left(m^2 + \frac{169}{48}m^4 + \frac{243}{4}m^5\right)e'^2;$$

on en conclut

$$\frac{h^2 s^2}{r^2} = \left(\frac{431}{128}m^2 - \frac{361}{512}m^3 - \frac{24101}{1536}m^4 - \frac{8365807}{49152}m^5\right)e'^2\gamma^2.$$

En retranchant cette valeur de celle de $\frac{h^2(1+s^2)}{r^2}$, trouvée plus haut, on aura

$$\frac{h^2}{r^2}=\left(\alpha_0-\frac{431}{64}m^2+\frac{409}{256}m^3+\frac{21833}{768}m^4+\frac{41439613}{98304}m^5\right)e'^2\gamma^2.$$

En négligeant l'excentricité de l'orbe lunaire, on a

$$\frac{1}{r^2}=1+2\delta\frac{1}{r}+\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2.$$

L'expression générale de la fonction $\frac{1}{r}$, qu'on formera en réunissant les parties qui la composent, nos 26, 53 et 72, en observant que son premier terme, c'est-à-dire sa partie non périodique, ne contient aucun terme multiplié par les facteurs γ^2 ou $e'^2\gamma^2$ de l'ordre m^2, et que dans l'ordre m^3, comme on le verra plus loin, on a $a_0=(\text{o})m^3\gamma^2+\frac{9}{32}m^3e'^2\gamma^2$, a donné

$$\left(\delta\frac{1}{r}\right)^2=\left(-\frac{57}{8}m^4-\frac{331}{8}m^5\right)e'^2\gamma^2.$$

On aura donc, en réunissant les termes déjà trouvés no 69, à ceux dont nous nous occupons en ce moment, et en rejetant ceux qui ne produiraient que des quantités d'un ordre supérieur à celui auquel nous nous arrêtons,

$$\frac{1}{r^2}=1+\frac{m^2}{3}+\left(\frac{m^2}{2}-\frac{323}{96}m^4-\frac{189}{16}m^5\right)e'^2$$
$$+\left(2\alpha_0-\frac{57}{8}m^4-\frac{331}{8}m^5\right)e'^2\gamma^2.$$

Si, après avoir complété la valeur de la fonction

$\frac{h^2}{r^2}$, donnée plus haut, par l'adjonction des termes déjà calculés, nos 50 et 69, on substitue dans l'expression résultante pour $\frac{1}{r^2}$ sa valeur, on aura la suivante :

$$h^2 = \frac{1 - \frac{m^2}{3} - \left(1 - \frac{37}{192} m^2 + \frac{9}{128} m^3\right) \gamma^2 + \left(\alpha_0 - \frac{431}{64} m^2 + \frac{409}{256} m^3 + \frac{21833}{768} m^4 + \frac{41439613}{98304} m^5\right) e'^2 \gamma^2}{1 + \frac{m^2}{3} + \left(\frac{m^2}{2} - \frac{323}{96} m^4 - \frac{189}{16} m^5\right) e'^2 + \left(2\alpha_0 - \frac{57}{8} m^4 - \frac{331}{8} m^5\right) e'^2 \gamma^2}.$$

En effectuant la division indiquée, on en conclut

$$\begin{aligned} h^2 = 1 - \frac{2}{3} m^2 &- \left(m^2 + \frac{169}{48} m^4 + \frac{243}{4} m^5\right) e'^2 \\ &- \left(1 - \frac{101}{192} m^2 + \frac{9}{128} m^3\right) \gamma^2 \\ &- \left(\alpha_0 + \frac{399}{64} m^2 - \frac{409}{256} m^3 - \frac{26115}{768} m^4 - \frac{44342909}{98304} m^5\right) e'^2 \gamma^2, \end{aligned}$$

d'où, par l'extraction de la racine, on tire

$$\begin{aligned} h = 1 - \frac{m^2}{3} &- \left(\frac{1}{2} - \frac{37}{384} m^2 + \frac{9}{256} m^3\right) \gamma^2 \\ &- \left(\frac{1}{2} \alpha_0 + \frac{431}{128} m^2 - \frac{409}{512} m^3 - \frac{22985}{1536} m^4 - \frac{41396605}{196608} m^5\right) e'^2 \gamma^2. \end{aligned}$$

En multipliant cette expression par la valeur précédente de $\frac{1}{r^2}$, on formera la suivante :

$$\frac{h}{r} = \left(\frac{3}{2} \alpha_0 - \frac{463}{128} m^2 + \frac{409}{512} m^3 + \frac{4325}{512} m^4 + \frac{29516837}{196608} m^5\right) e'^2 \gamma^2.$$

Si l'on multiplie la valeur de $\frac{s^2}{r^2}$, donnée plus haut,

par

$$h = 1 - \frac{m^2}{3} - \left(\frac{m^2}{2} + \frac{185}{96} m^4 + \frac{243}{8} m^5\right) e'^2,$$

on trouvera

$$\frac{hs^2}{r^2} = \left(\frac{463}{128} m^2 - \frac{361}{512} m^3 - \frac{6905}{512} m^4 - \frac{7626543}{49152} m^5\right) e'^2 \gamma^2,$$

et, en réunissant cette valeur à la valeur précédente de $\frac{h}{r^2}$, on aura

$$\frac{h(1+s^2)}{r^2} = \left(\frac{3}{2} \alpha_0 + \frac{3}{32} m^3 + \frac{1441}{256} m^4 + \frac{3919809}{196608} m^5\right) e'^2 \gamma^2,$$

expression dans laquelle on voit que les termes en m^2 ont disparu, conformément à ce que nous avons annoncé plus haut de la non-existence de pareils termes dans la valeur du coefficient a_0.

L'expression de $\frac{1}{r^2} \int \left(\frac{dR}{dv}\right) dt$, nos 28 et 55, donne

$$\frac{1}{r^2} \int \left(\frac{dR}{dv}\right) dt = \left(\frac{45}{8} m^4 + \frac{675}{16} m^5\right) e'^2$$
$$+ \left\{\frac{3}{4} m^2 + \frac{3}{4} m^3 + \frac{3}{4} m^4 - \left(\frac{15}{8} m^2 + \frac{87}{8} m^3 + \frac{141}{8} m^4\right) e'^2\right\} \cos 2\xi$$
$$+ \left(\frac{21}{8} m^2 + \frac{99}{16} m^3 + \frac{297}{32} m^4\right) e' \cos(2\xi - \varphi')$$
$$- \left(\frac{3}{8} m^2 + \frac{39}{16} m^3 + \frac{39}{32} m^4\right) e' \cos(2\xi + \varphi').$$

En combinant cette expression avec celle de s^2, donnée précédemment, on a trouvé

$$\frac{s^2}{r^2} \int \left(\frac{dR}{dv}\right) dt = \left(-\frac{33}{64} m^3 + \frac{735}{512} m^4 - \frac{18447}{1024} m^5\right) e'^2 \gamma^2.$$

On a d'ailleurs, nos 18, 46 et 66,

$$\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt=\left\{\frac{3}{4}m^2+\frac{3}{4}m^3-\left(\frac{15}{8}m^2+\frac{87}{8}m^3\right)e'^2\right.$$
$$\left.-\left[\frac{3}{8}m^2+\frac{3}{8}m^3-\left(\frac{15}{16}m^2+\frac{249}{16}m^3\right)e'^2\right]\gamma^2\right\}\cos 2\xi$$
$$+\left[\frac{21}{8}m^2+\frac{99}{16}m^3-\left(\frac{21}{16}m^2+\frac{45}{8}m^3\right)\gamma^2\right]e'\cos(2\xi-\varphi')$$
$$-\left[\frac{3}{8}m^2+\frac{39}{16}m^3-\left(\frac{3}{16}m^2+\frac{15}{4}m^3\right)\gamma^2\right]e'\cos(2\xi+\varphi')$$
$$-\left(\frac{3}{8}m^2-\frac{33}{32}m^3\right)\gamma^2 e'\cos\varphi',$$

$$\frac{1}{r^2}=-3m^2e'\cos\varphi'$$
$$+\left\{2m^2+\frac{19}{3}m^3-\left(5m^2+\frac{239}{6}m^3\right)e'^2\right.$$
$$\left.-\left[m^2+\frac{29}{12}m^3-\left(\frac{5}{2}m^2+\frac{143}{3}m^3\right)e'^2\right]\gamma^2\right\}\cos 2\xi$$
$$+\left[7m^2+\frac{157}{4}m^3-\left(\frac{7}{2}m^2+\frac{47}{2}m^3\right)\gamma^2\right]e'\cos(2\xi-\varphi')$$
$$+\left[-m^2-\frac{91}{24}m^3+\left(\frac{m^2}{2}+\frac{131}{12}m^3\right)\gamma^2\right]e'\cos(2\xi+\varphi').$$

D'où il est facile de conclure, en n'ayant égard qu'aux termes dont nous nous occupons,

$$\frac{1}{r^2}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt=-\left(\frac{81}{16}m^4+\frac{10265}{256}m^5\right)e'^2\gamma^2.$$

En ajoutant cette valeur à celle de $\frac{s^2}{r^2}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt$, on aura donc

$$\frac{1+s^2}{r^2}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt=\left(-\frac{33}{64}m^3-\frac{1857}{512}m^4-\frac{22613}{1024}m^5\right)e'^2\gamma^2.$$

Si l'on substitue cette valeur ainsi que celle de

$\frac{h(1+s^2)}{r^2}$, trouvée plus haut, dans l'équation

$$\frac{dv}{dt} = \frac{(1+s^2)h}{r^2} + \frac{1+s^2}{r^2}\int\left(\frac{dR}{dv}\right)dt,$$

et qu'on égale à zéro le coefficient du terme multiplié par $e'^2\gamma^2$, on trouvera, pour déterminer le coefficient arbitraire α_0, l'équation de condition

$$\frac{3}{2}\alpha_0 - \left(-\frac{3}{32}+\frac{33}{64}=\frac{27}{64}\right)m^3 - \left(\frac{645}{256}+\frac{1857}{512}=\frac{4437}{512}\right)m^4$$
$$-\left(-\frac{3919809}{196608}+\frac{22613}{1024}=\frac{421887}{196608}\right)m^5 = 0,$$

d'où l'on tirera

$$\alpha_0 = \frac{9}{32}m^3 + \frac{1479}{256}m^4 + \frac{140629}{98304}m^5.$$

Nous avons supposé ici $\delta\frac{1}{r} = \alpha_0 e'^2\gamma^2$, les déterminations précédentes introduisent donc dans l'expression du coefficient arbitraire a_0 les termes suivants :

$$a_0 = \left(\frac{9}{32}m^3 + \frac{1479}{256}m^4 + \frac{140629}{98304}m^5\right)e'^2\gamma^2.$$

Si l'on substitue pour α_0 sa valeur dans l'expression de h et qu'on réunisse à la valeur résultante les termes dépendants de l'inclinaison, déjà déterminés dans le n° 69, Livre VII, on aura

$$h = \left(-\frac{1}{2}+\frac{37}{384}m^2-\frac{9}{256}m^3+\frac{21497}{36864}m^4+\frac{9245}{1536}m^5\right)\gamma^2$$
$$+\left(\frac{431}{128}m^2-\frac{337}{512}m^3-\frac{4637}{512}m^4-\frac{1718999}{8192}m^5\right)e'^2\gamma^2.$$

4. Occupons-nous maintenant du développement

de la quantité que nous avons désignée par p, n° 1, et qui donne le rapport de a à a_1. Nous avons, pour la déterminer, l'équation

$$p = 2aR_0.$$

Cette relation suppose que l'on a introduit dans les formules mêmes du mouvement elliptique la constante a, qui représente la distance moyenne de la Lune à la Terre, dans l'orbite troublée, et que le développement de la fonction perturbatrice R a été effectué dans cette hypothèse ; mais il est facile de voir qu'on pourra déduire cette nouvelle expression de R, de celle que nous avons obtenue dans les n°s 16, 45 et 64 du Livre VII, en supposant qu'on ait introduit dès l'origine la constante a relative à l'orbite réelle que la Lune décrit autour de la Terre, dans les formules du mouvement elliptique. En effet, la fonction perturbatrice R étant une fonction déterminée des coordonnées de la Lune et du Soleil, doit conserver la même valeur de quelque manière que ces coordonnées aient été exprimées. On aura donc ainsi

$$aR_0 = \frac{a}{\mathrm{a}}(\mathrm{a}R_0).$$

Il suffira par conséquent de multiplier, par le rapport $\frac{a}{\mathrm{a}}$ ou $(1 + \alpha_0)^{-1}$, le développement de la fonction aR, obtenu dans la supposition où la constante a a été introduite dans les formules mêmes du mouvement elliptique, pour en déduire l'expression de ce même développement relative à la supposition où

la distance moyenne a a été substituée dans ces formules au demi grand axe de l'orbite elliptique. On aura ainsi, d'après les développements précédents, et la quantité a_0 étant supposée connue, l'expression de p par un calcul très-simple, et sans qu'on soit obligé de recommencer une longue suite d'opérations aussi pénibles que fastidieuses.

Formons donc ainsi successivement les différents termes qui composent la fonction p. En ne considérant que la partie non périodique de R_0, nous avons trouvé (*voir* n°s 16 et 45, Livre VII, et n° 2 du Supplément)

$$
\begin{aligned}
aR_0 = & \frac{m^2}{4} - \frac{179}{96} m^4 - \frac{97}{16} m^5 - \frac{7681}{576} m^6 - \frac{7103}{288} m^7 \\
& + \left(\frac{3}{8} m^2 + \frac{225}{32} m^3 + \frac{16751}{512} m^4 + \frac{258983}{2048} m^5 + \frac{6977767}{16384} m^6\right) e^2 \\
& + \left(\frac{3}{8} m^2 - \frac{799}{64} m^4 - \frac{2619}{32} m^5 - \frac{302389}{768} m^6 - \frac{830085}{576} m^7\right) e'^2 \\
& + \left(\frac{9}{16} m^2 + \frac{825}{64} m^3 + \frac{241719}{1024} m^4 + \frac{926499}{256} m^5\right) e^2 e'^2 \\
& - \frac{225}{64} m^3 e^4 + \left(\frac{15}{32} m^2 - \frac{5401}{128} m^4\right) e'^4.
\end{aligned}
$$

Nous avons trouvé d'ailleurs (*voir* n°s 23 et 50, Livre VII, et n° 2 du Supplément)

$$
\begin{aligned}
a_0 = & \frac{m^2}{6} - \frac{179}{288} m^4 - \frac{97}{48} m^5 \\
& + \left(\frac{m^2}{4} - \frac{799}{192} m^4 - \frac{873}{32} m^5\right) e'^2 \\
& - \frac{275}{32} m^3 e^2 e'^2 + \frac{5}{16} m^2 e'^4,
\end{aligned}
$$

et nous avons vu, n° 50, que ce coefficient ne conte-

nait, jusqu'aux quantités de l'ordre m^5 inclusivement, aucun terme multiplié par le facteur e^2. Il est aisé de conclure de là

$$\frac{a}{\mathrm{a}} = \frac{1}{1 + a_0} = 1 - \frac{m^2}{6} + \frac{187}{288} m^4 + \frac{97}{48} m^5$$
$$+ \left(\frac{m^2}{4} - \frac{815}{192} m^4 - \frac{873}{32} m^5\right) e'^2$$
$$+ \frac{275}{32} m^3 e^2 e'^2 \ldots$$

En multipliant par cette valeur l'expression de $\mathrm{a\,R_0}$, on trouve

$$a\mathrm{R}_0 = \frac{m^2}{4} - \frac{61}{32} m^4 - \frac{97}{16} m^5 + \frac{4939}{384} m^6 - \frac{13333}{576} m^7$$
$$+ \left(\frac{3}{8} m^2 + \frac{225}{32} m^3 + \frac{16719}{512} m^4 + \frac{256583}{2048} m^5 + \frac{20677253}{98304} m^6\right) e^2$$
$$+ \left(\frac{3}{8} m^2 - \frac{807}{64} m^4 - \frac{2619}{32} m^5 - \frac{299431}{768} m^6 - \frac{408495}{288} m^7\right) e'^2$$
$$+ \left(\frac{9}{16} m^2 + \frac{825}{64} m^3 + \frac{241527}{1024} m^4 + \frac{926049}{256} m^5\right) e^2 e'^2$$
$$- \frac{225}{64} m^3 e^4 + \left(\frac{15}{32} m^2 - \frac{5389}{128} m^4\right) e'^4.$$

En ayant égard aux termes de l'expression de R dépendants de la parallaxe, nous avons trouvé, n° 2 du Supplément,

$$\mathrm{a\,R_0} = \left(\frac{9}{64} m^2 + \frac{225}{256} m^3 - \frac{15}{32} m^2 e'^2\right) \left(\frac{a}{a'}\right)^2.$$

Dans l'ordre d'approximation auquel nous nous arrêtons, il suffira de faire ici $\frac{a}{\mathrm{a}} = 1$, on aura donc

$$a\mathrm{R}_0 = \left(\frac{9}{64} m^2 + \frac{225}{256} m^3 - \frac{15}{32} m^2 e'^2\right) \left(\frac{a}{a'}\right)^2.$$

Considérons maintenant les termes dépendants de l'inclinaison de l'orbe lunaire à l'écliptique; en n'ayant égard qu'à la partie non périodique du développement de R, n° 65, Livre VII, et en y joignant les termes multipliés par $e'^2\gamma^2$, qui ont été calculés plus haut, on a

$$aR_0 = \left(-\frac{3}{8}m^2 + \frac{9}{32}m^3 + \frac{985}{512}m^4 + \frac{8615}{2048}m^5\right)\gamma^2$$
$$+\left(-\frac{9}{16}m^2 + \frac{93}{64}m^3 + \frac{19089}{1024}m^4 + \frac{49589}{1024}m^5\right)e'^2\gamma^2.$$

D'ailleurs en observant que le coefficient a_0 ne renferme aucun terme multiplié par γ^2, jusqu'aux quantités de l'ordre m^5 inclusivement, n° 65, ni aucun terme multiplié par $e'^2\gamma^2$ de l'ordre m^2, n° 3 du Supplément, on pourra supposer simplement ici

$$\frac{a}{\mathrm{a}} = 1 - \frac{m^2}{6} - \frac{m^2}{4}e'^2.$$

En multipliant par ce rapport l'expression précédente, on aura

$$aR_0 = \left(-\frac{3}{8}m^2 + \frac{9}{32}m^3 + \frac{1017}{512}m^4 + \frac{8519}{2048}m^5\right)\gamma^2$$
$$+\left(-\frac{9}{16}m^2 + \frac{93}{64}m^3 + \frac{19281}{1024}m^4 + \frac{49269}{1024}m^5\right)e'^2\gamma^2.$$

En réunissant les différents termes que nous venons de déterminer, en vertu de l'équation $p = 2aR_0$, on aura donc :

$$p = \frac{m^2}{2} - \frac{61}{16}m^4 - \frac{97}{8}m^5 - \frac{4939}{192}m^6 - \frac{13333}{288}m^7$$
$$+ \left(\frac{3}{4}m^2 + \frac{225}{16}m^3 + \frac{16719}{256}m^4 + \frac{256583}{1024}m^5 + \frac{20677253}{49152}m^6\right)e^2$$
$$+ \left(\frac{3}{4}m^2 - \frac{807}{32}m^4 - \frac{2619}{16}m^5 - \frac{299431}{384}m^6 - \frac{408495}{144}m^7\right)e'^2$$
$$+ \left(\frac{9}{8}m^2 + \frac{825}{32}m^3 + \frac{241527}{512}m^4 + \frac{926049}{128}m^5\right)e^2 e'^2$$
$$- \frac{225}{32}m^3 e^4 + \left(\frac{15}{16}m^2 - \frac{5389}{64}m^4\right)e'^4$$
$$- \left(\frac{3}{4}m^2 - \frac{9}{16}m^3 - \frac{1017}{256}m^4 - \frac{8519}{1024}m^5\right)\gamma^2$$
$$- \left(\frac{9}{8}m^2 - \frac{93}{32}m^3 - \frac{19281}{512}m^4 - \frac{49269}{512}m^5\right)e'^2\gamma^2$$
$$+ \left(\frac{9}{32}m^2 + \frac{225}{128}m^3 - \frac{15}{16}m^2 e'^2\right)\left(\frac{a}{a'}\right)^2.$$

Si l'on réunit de même les différents termes qui composent le coefficient que nous avons désigné par a_0, qui représente, comme on sait, la partie non périodique de la fonction $\delta\frac{1}{r}$, n° 15, Livre VII, et qu'on trouvera calculés dans les n°s 23, 50 et 69, Livre cité, ou dans les n°s 2 et 3 de ce Supplément, on aura, pour sa valeur complète,

$$a_0 = \frac{m^2}{6} - \frac{179}{288}m^4 - \frac{97}{48}m^5 - \frac{757}{162}m^6 - \frac{4939}{432}m^7$$
$$+ \left(\frac{m^2}{4} - \frac{799}{192}m^4 - \frac{873}{32}m^5\right)e'^2$$
$$- \left(\frac{275}{32}m^3 + \frac{39389}{6144}m^4 - \frac{745495}{4096}m^5\right)e^2 e'^2$$
$$+ \left(\frac{1}{16}m^2 + \frac{345}{128}m^3\right)e^4$$
$$+ \left(\frac{5}{16}m^2 - \frac{270667}{9216}m^4\right)e'^4$$
$$+ \left(\frac{9}{32}m^2 + \frac{1479}{256}m^4 + \frac{140629}{98304}m^5\right)e'^2\gamma^2$$
$$+ \left(\frac{3}{16}m^2 + \frac{15}{16}m^3 - \frac{135}{256}m^2 e'^2\right)\left(\frac{a}{a'}\right)^2.$$

Maintenant, si l'on substitue à la place de a_0 et de p leurs valeurs précédentes, dans l'équation

$$\frac{\mathrm{a}}{a_1} = (1 + a_0)(1 + p),$$

on trouvera aisément, pour le rapport de a à a_1 qu'il s'agissait de déterminer, l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{a}}{a_1} = 1 &+ \frac{2}{3} m^2 - \frac{1253}{288} m^4 - \frac{679}{48} m^5 - \frac{81241}{2592} m^6 - \frac{6337}{108} m^7 \\
&+ \left(\frac{3}{4} m^2 + \frac{225}{16} m^3 + \frac{16751}{256} m^4 + \frac{257431}{1024} m^5\right) e^2 \\
&+ \left(m^2 - \frac{5593}{192} m^4 - \frac{6111}{32} m^5 - \frac{645841}{768} m^6 - \frac{1919525}{576} m^7\right) e'^2 \\
&+ \left(\frac{9}{8} m^2 + \frac{275}{16} m^3 + \frac{2861239}{6144} m^4 + \frac{30393463}{4096} m^5\right) e^2 e'^2 \\
&+ \left(\frac{1}{16} m^2 - \frac{555}{128} m^3\right) e^4 \\
&+ \left(\frac{5}{4} m^2 - \frac{1044955}{9216} m^4\right) e'^4 \\
&- \left(\frac{3}{4} m^2 - \frac{9}{16} m^3 - \frac{985}{256} m^4 - \frac{8615}{1024} m^5\right) \gamma^2 \\
&- \left(\frac{9}{8} m^2 - \frac{51}{16} m^3 - \frac{22047}{512} m^4 - \frac{9675541}{98304} m^5\right) e'^2 \gamma^2 \\
&+ \left(\frac{15}{32} m^2 + \frac{345}{128} m^3 - \frac{375}{256} m^2 e'^2\right) \left(\frac{a}{a'}\right)^2.
\end{aligned}$$

De l'expression que nous venons de trouver pour le rapport de a à a_1, il est facile de déduire celle du rapport des moyens mouvements n et n_1 qui leur correspondent. En effet, il suffit d'observer que l'on a $\frac{\mathrm{n}}{n_1} = \left(\frac{\mathrm{a}}{a_1}\right)^{-\frac{3}{2}}$; en élevant donc à la puissance $-\frac{3}{2}$ le second membre de l'équation qui précède, on aura sans autre calcul l'expression de n en fonction de n_1, que nous nous étions proposé de déterminer,

n° 1. On trouve ainsi

$$
\begin{aligned}
n = a_1^{-\frac{3}{2}} \Big\{ & 1 - m^2 + \frac{471}{64} m^4 + \frac{679}{32} m^5 + \frac{3407}{96} m^6 + \frac{15163}{288} m^7 \\
& - \left(\frac{9}{8} m^2 + \frac{675}{32} m^3 + \frac{49293}{512} m^4 + \frac{700293}{2048} m^5 \right) e^2 \\
& + \left(- \frac{3}{2} m^2 + \frac{5913}{128} m^4 + \frac{18333}{64} m^5 + \frac{1796123}{1536} m^6 + \frac{1715825}{384} m^7 \right) e'^2 \\
& - \left(\frac{27}{16} m^2 + \frac{825}{32} m^3 + \frac{2838199}{4096} m^4 + \frac{90396389}{8192} m^5 \right) e^2 e'^2 \\
& - \left(\frac{3}{32} m^2 - \frac{1665}{256} m^3 \right) e^4 \\
& - \left(\frac{15}{8} m^2 - \frac{1075675}{6144} m^4 \right) e'^4 \\
& + \left(\frac{9}{8} m^2 - \frac{27}{32} m^3 - \frac{3915}{512} m^4 - \frac{22965}{2048} m^5 \right) \gamma^2 \\
& + \left(\frac{27}{16} m^2 - \frac{153}{32} m^3 - \frac{71901}{1024} m^4 - \frac{9015061}{65536} m^5 \right) e'^2 \gamma^2 \\
& - \frac{9}{64} m^2 e^4 e'^2 + \frac{171}{64} m^2 e^2 e'^2 \gamma^2 - \frac{99}{64} m^2 e'^2 \gamma^4 \\
& - \left(\frac{45}{64} m^2 + \frac{1035}{256} m^3 \right) \left(\frac{a}{a'} \right)^2 \\
& + \frac{1125}{512} m^2 e'^2 \left(\frac{a}{a'} \right)^2 .
\end{aligned}
$$

Cette expression, qui est l'élément essentiel d'où dépend la détermination du coefficient de l'*inégalité séculaire* du moyen mouvement lunaire, pourrait s'obtenir également au moyen de l'équation (6) que nous avons donnée n° 1 de ce Supplément; mais l'emploi de cette formule exige beaucoup plus d'attention et un travail plus pénible que celui de la formule (8), qui donne immédiatement, et par une simple substitution, le rapport $\frac{a}{a_1}$ dès que les quantités p et a_0 sont connues. Cependant, comme tous les moyens de vérification sont précieux quand il s'agit

d'opérations longues et délicates, on peut faire servir la formule (6) à la vérification des résultats précédents obtenus au moyen de l'équation (8); nous avons vérifié de cette manière les principaux d'entre eux, et nous sommes parvenu à des valeurs parfaitement concordantes.

Si l'on compare l'expression précédente de n à celle qui est donnée dans l'ouvrage de M. Plana, et qui résulte des formules inverses de celles que nous avons adoptées, c'est-à-dire des formules où, selon la méthode des géomètres qui avaient traité les premiers par l'analyse le difficile problème de la théorie de la Lune, on a pris pour variable indépendante sa *longitude vraie* au lieu de sa *longitude moyenne*, on voit que cette expression en diffère considérablement, et même dans les termes les plus influents sur l'exacte évaluation de l'*équation séculaire*. Ainsi, par exemple, le coefficient du terme en e'^2, selon M. Plana, en négligeant les termes de l'ordre m^5 et au-dessus, serait

$$-e'^2\left(\frac{3}{2}m^2-\frac{2763}{128}m^4\right)$$

au lieu de

$$-e'^2\left(\frac{3}{2}m^2-\frac{5913}{128}m^4\right),$$

que nous avons trouvé pour son expression. La fraction qui multiplie le terme en m^4 n'aurait ainsi, selon M. Plana, que la moitié de sa valeur réelle, et l'*équation séculaire* qui en dépend éprouverait un accroissement de plus d'une seconde sexagésimale par suite de cette diminution. Cependant les calculs du savant directeur de l'observatoire de Turin sont

d'une exactitude rigoureuse; pour nous en assurer, nous avons repris en entier le développement de la valeur de n, déduite des formules que l'on trouve dans le beau Mémoire de M. Damoiseau, et qui n'ont besoin que d'être complétées par l'addition de quelques termes négligés à tort, et réduites en séries pour reproduire cette valeur sous la forme même que M. Plana lui a attribuée. En comparant ensuite nos résultats aux siens, nous avons trouvé entre eux une parfaite concordance, à quelques légères différences près, dans des termes d'un ordre très-élevé et qui ne peuvent, par conséquent, avoir aucune influence considérable sur la détermination de l'*équation séculaire*. Il suit donc de cet examen que les formules indirectes qu'avaient employées jusqu'ici les astronomes et les géomètres qui ont traité la théorie de la Lune, et qui se sont accordées d'une manière vraiment surprenante avec les nôtres, pour donner aux expressions de toutes les autres inégalités périodiques ou séculaires du mouvement lunaire, ainsi qu'à celles des mouvements des nœuds et du périgée de l'orbite, des valeurs presque identiques entre elles et parfaitement concordantes d'ailleurs avec l'observation, paraissent insuffisantes pour déterminer exactement l'*équation séculaire* ou du moins pour donner sa véritable expression analytique, soit que la méthode que l'on emploie ne soit pas en effet applicable à cette importante détermination, soit que l'hypothèse par laquelle on suppose qu'ayant déterminé l'*équation séculaire* qui affecte la *longitude vraie* dans l'expression de la *longitude moyenne* en fonction de

la *longitude vraie*, on peut, par le simple renversement de la formule et en substituant l'une de ces variables à l'autre, en conclure l'*équation séculaire* qui affecterait la *longitude moyenne* dans l'expression de la *longitude vraie* en fonction de cette même longitude ou, ce qui revient au même, en fonction du temps, soit trop arbitraire et contredite par les résultats d'une analyse rigoureuse. Laplace, qui ne s'était occupé que du premier terme de cette équation, dont la réduction en nombres lui avait présenté un accord presque parfait avec le résultat des observations, ne s'était point aperçu de l'inconvénient que nous venons de signaler ; mais les géomètres et les astronomes qui sont venus après lui et qui ont poursuivi le développement de ses formules, ne se sont peut-être pas montrés assez scrupuleux en adoptant sans examen, et comme reconnue incontestable, une supposition qui n'était que commode pour le besoin de leur analyse.

Nous avons omis jusqu'ici, pour ne point compliquer nos formules, de tenir compte des termes que peut contenir la fonction $\int d'R$ qui entre dans l'équation (1) n° 1, et nous avons regardé cette fonction comme uniquement composée de termes périodiques.

Si cette fonction contenait en outre une partie non périodique, il suffirait, pour y avoir égard, de substituer à l'équation (3), n° 1, qui détermine la quantité p, la suivante :

$$(10) \qquad p = 2a\left(R_1 + \int d'R\right),$$

et le reste du calcul s'effectuerait comme précédemment.

Quant aux termes non périodiques que peut contenir la fonction $\int d'R$, il résulte de ce qui a été démontré relativement au théorème général de l'*invariabilité des grands axes et des moyens mouvements planétaires* (*), que si l'on considère, ainsi que l'ont fait Laplace et tous les géomètres qui l'ont suivi, comme invariable l'excentricité e' de l'orbe terrestre dans les formules différentielles du mouvement troublé, ces termes ne sauraient être d'un ordre inférieur à m^6, c'est-à-dire à peu près insensibles, et c'est par cette raison que nous avons cru pouvoir nous dispenser d'en faire le calcul. Il est vrai cependant que cette propriété a été contestée par Poisson d'abord, dans un Mémoire remarquable sur la théorie de la Lune, publié en 1834, et plus récemment par quelques géomètres qui ont cru devoir embrasser son opinion. La fonction $\int d'R$ contiendrait, dans cette hypothèse, des termes non périodiques de la forme $m^4 e'^2$, c'est-à-dire de l'ordre du carré de la force perturbatrice. Le théorème de la permanence du *grand axe* et du *moyen mouvement* serait ainsi restreint pour la Lune aux termes du premier ordre par rapport à cette force; mais outre qu'on ne voit aucune raison pour ne pas le restreindre de même relativement aux *grands axes* et aux *moyens mouvements* des planètes, et qu'on serait

(*) *Théorie analytique du Système du Monde*, liv. II, n° 60.

forcé de renoncer ainsi à l'une des plus belles propriétés du système du monde, cette supposition aurait encore l'inconvénient d'affaiblir d'une manière si considérable le coefficient de l'*équation séculaire* du moyen mouvement lunaire, qu'il n'aurait plus aucun rapport avec celui qui résulte des observations. C'est donc autant à cause des doutes que nous conservons sur l'exactitude des idées de Poisson à cet égard, que pour rapprocher autant que possible notre théorie de l'observation, que nous continuerons à faire abstraction des termes non périodiques que la fonction $\int d'R$ pourrait contenir, et à nous en tenir aux résultats précédents.

5. Revenons au principal objet qui doit nous occuper ici, c'est-à-dire la recherche de l'expression analytique du coefficient de l'*équation séculaire* qui affecte le moyen mouvement de la Lune, dans l'expression de sa *longitude vraie*, développée en fonction de sa *longitude moyenne*, car c'est là l'élément qui intéresse particulièrement les astronomes pour la construction de leurs Tables, et pour la comparaison des anciennes éclipses aux nouvelles; et comme cet élément résulte directement de nos formules, sans inversion et sans aucune hypothèse plus ou moins arbitraire, elles ont un avantage incontestable, pour cette détermination du moins, sur les formules *inversées* qu'on avait généralement adoptées jusqu'ici pour calculer cette inégalité.

Si l'on considère avec attention l'expression précédente de n, on verra qu'elle se compose de deux par-

ties, l'une rigoureusement constante, l'autre sujette à des altérations plus ou moins considérables, en raison de la variabilité de l'excentricité e' de l'orbite terrestre qu'elle renferme. Pour déterminer ces altérations on peut, en faisant d'abord abstraction du terme en e'^4, donner à cette expression cette forme

$$n = a_1^{-\frac{3}{2}}(1 + F + F' e'^2).$$

En faisant varier cette expression, il faut observer que les coefficients F et F' sont eux-mêmes fonctions de la quantité e', à raison du facteur m qu'ils contiennent. En effet, on a supposé, nº 5, Livre VII, $m = \frac{n'}{n}$, d'où l'on conclut

$$\frac{\delta m}{m} = -\frac{\delta n}{n}.$$

En différentiant donc par rapport à la caractéristique δ l'expression précédente de n, on trouvera

$$\frac{\delta n}{n} = \frac{F' \delta e'^2}{1 + \left(F + m\frac{dF}{dm}\right) + e'^2\left(F' + m\frac{dF'}{dm}\right)},$$

ou simplement

$$\frac{\delta n}{n} = H\, \delta e'^2,$$

en faisant, pour abréger,

$$H = \frac{F'}{1 + \left(F + m\frac{dF}{dm}\right) + e'^2\left(F' + m\frac{dF'}{dm}\right)}. \qquad (r)$$

On aura donc, pour l'expression différentielle

de la *longitude vraie* en fonction de la *longitude moyenne,*

$$dv = ndt + \mathrm{H}\, ndt\delta . e'^2 + \Sigma . \mathrm{G} \cos (gt + l),$$

en représentant par $\Sigma . \mathrm{G} \cos(gt + l)$ une suite de termes simplement périodiques. Si l'on intègre cette expression en faisant abstraction de ces termes, on en conclut

$$v = \int ndt + \varepsilon + \mathrm{H} \int (\mathrm{E}'^2 - e'^2)\, ndt,$$

où e' désigne, comme dans le n° 94, Livre VII, la valeur de l'excentricité de l'orbite terrestre à l'instant que l'on a choisi pour époque, et E' ce que devient cette quantité après un temps quelconque t.

L'expression de la *longitude vraie* en fonction de la *longitude moyenne* contient donc l'*équation séculaire* $-\mathrm{H}\int (e'^2 - \mathrm{E}'^2) ndt$, le coefficient de cette équation devant être déterminé par la formule (r), dans laquelle on substituera pour F et F′ leurs valeurs. En observant que d'après l'expression précédente de n, en négligeant les termes qui ne produiraient que des quantités d'un ordre supérieur à celui auquel nous nous arrêterons ici, on trouve par la différentiation

$$\begin{aligned}\mathrm{F} + m\frac{d\mathrm{F}}{dm} = &-3m^2 + \frac{2355}{64} m^4 + \frac{2037}{16} m^5 \\ &- e^2\left(\frac{27}{8} m^2 + \frac{675}{8} m^3\right) \\ &+ \gamma^2\left(\frac{27}{8} m^2 - \frac{27}{8} m^3\right),\end{aligned}$$

$$\mathrm{F}' + m\frac{d\mathrm{F}'}{dm} = -\frac{9}{2} m^2.$$

On aura donc, dans l'ordre d'approximation que nous nous sommes proposé d'atteindre,

$$H = \frac{F'}{\begin{array}{c} 1 - 3m^2 + \frac{2355}{64}m^4 + \frac{2037}{16}m^5 \\ - e^2\left(\frac{27}{8}m^2 + \frac{675}{8}m^3\right) + \gamma^2\left(\frac{27}{8}m^2 - \frac{27}{8}m^3\right) \\ - \frac{9}{2}m^2 e'^2. \end{array}}$$

Si l'on remplace dans cette formule F' par la valeur que cette lettre représente, et qu'on en déduise ensuite celle de H, soit par la division, soit par la méthode plus simple des coefficients indéterminés, on trouvera aisément

$$\begin{aligned} H = &-\frac{3}{2}m^2 + \frac{5337}{128}m^3 + \frac{18333}{64}m^4 + \frac{2073035}{1536}m^5 + \frac{2119151}{384}m^6 \\ &- e^2\left(\frac{27}{16}m^2 + \frac{825}{32}m^3 + \frac{2879671}{4096}m^4 + \frac{92066789}{8192}m^5\right) \\ &+ \gamma^2\left(\frac{27}{16}m^2 - \frac{153}{32}m^3 - \frac{61533}{1024}m^4 - \frac{10286869}{65536}m^5\right) \\ &- \frac{27}{4}m^4 e'^2 - \frac{9}{64}m^2 e^4 + \frac{171}{64}m^2 e^2\gamma^2 \\ &- \frac{99}{64}m^2\gamma^4 + \frac{1125}{512}m^2\left(\frac{a}{a'}\right)^2. \end{aligned}$$

Le terme, multiplié par e'^4 dans l'expression de n, introduira dans l'*équation séculaire* une seconde partie de la forme $K\,\delta e'^4$ ou $-K\int(e'^4 - E'^4)\,ndt$. Pour déterminer le coefficient K, nommons F'' le coefficient de e'^4 dans l'expression de n, en suivant l'analyse précédente, on aura

$$K = \frac{F''}{1 + \left(F + m\frac{dF}{dm}\right)},$$

ou bien, avec une approximation suffisante,

$$K = F''(1 + 3m^2).$$

Nous avons trouvé

$$F'' = -\frac{15}{8}m^2 + \frac{1075675}{6144}m^4.$$

On aura donc

$$K = -\frac{15}{8}m^2 + \left(\frac{1075675}{6144} - \frac{45}{8} = \frac{1041115}{6144}\right)m^4.$$

Si l'on représente donc, pour abréger, par $\int \zeta' dt$ l'*inégalité séculaire* dont la longitude moyenne de la Lune est affectée, c'est-à-dire la partie qu'il faut ajouter à l'intégrale $\int ndt + \varepsilon$, où n et ε sont regardés comme rigoureusement constants, dans l'expression de la *longitude vraie*, n° 133, en réunissant les différents termes que nous venons de déterminer, on aura, pour l'expression analytique de cette inégalité,

$$\int \zeta' dt$$

$$= \left\{ \begin{aligned} &\frac{3}{2}m^2 - \frac{5337}{128}m^4 - \frac{18333}{64}m^5 - \frac{2073035}{1536}m^6 - \frac{2119151}{384}m^7 \\ &+ e^2\left(\frac{27}{16}m^2 + \frac{825}{32}m^3 + \frac{2879671}{4096}m^4 + \frac{92066789}{8192}m^5\right) \\ &- \gamma^2\left(\frac{27}{16}m^2 - \frac{153}{32}m^3 - \frac{61533}{1024}m^4 - \frac{10286869}{65536}m^5\right) \\ &+ \frac{27}{4}m^4 e'^2 + \frac{9}{64}m^2 e^4 - \frac{171}{64}m^2 e^2 \gamma^2 \\ &+ \frac{99}{64}m^3\gamma^2 - \frac{1125}{512}m^3\left(\frac{a}{a'}\right)^2 \end{aligned} \right\} \int (e'^2 - E'^2)\, ndt$$

$$+ \left\{ \frac{15}{8}m^2 - \frac{1041115}{6144}m^4 \right\} \int (e'^4 - E'^4)\, ndt$$

Cette inégalité accélérera le moyen mouvement de la Lune, déduit de l'observation, si l'excentricité de l'orbite terrestre va en diminuant, comme cela a lieu aujourd'hui, le mouvement moyen semblerait se ralentir dans le cas contraire. Si l'on réduit en nombres les coefficients de cette inégalité au moyen des valeurs numériques des différentes quantités qu'ils renferment, valeurs qui ont été rapportées n° 135, Livre VII, et si l'on distingue entre elles les différentes parties de ce coefficient suivant l'ordre des quantités auxquelles elles appartiennent, on trouvera enfin :

Équation séculaire de la longitude moyenne.

$$\int \zeta' dt = \begin{bmatrix} 0,008392850\ (2) - 0,001353514\ (4) \\ - 0,000622120\ (5) - 0,000154749\ (6) \\ + 0,000009844\ (7) = 0,006172311 \end{bmatrix} \int (e'^2 - E'^2)\, n dt.$$

En comparant le résultat précédent à celui que nous avons rapporté dans la Note n° 2 du Livre VII, et qui a été déduit des formules de M. Plana, on voit qu'il en diffère d'une manière très-sensible, et que l'espèce de compensation qui s'établit, selon ce géomètre, entre les quantités du quatrième ordre et celles des ordres supérieurs, et qui semblait permettre de s'en tenir, comme l'avait fait Laplace, aux termes résultant de la première approximation, n'existe pas réellement. C'eût été en effet un hasard bien singulier qu'une pareille rencontre, et il pouvait paraître au moins surprenant que lorsqu'on est obligé de porter si loin les approximations pour déterminer avec

exactitude les coefficients de la plupart des autres inégalités lunaires, lorsque la première approximation ne donne, par exemple, que la moitié du mouvement réel du périgée, n° 135, Livre VII, et une bien plus faible partie encore de l'*inégalité séculaire* qui affecte ce mouvement, l'*équation séculaire* de la longitude moyenne échappât seule à la loi commune et présentât, dès le premier essai de calcul, un résultat presque identique avec celui qu'on a déduit de la comparaison des observations modernes aux plus anciennes observations qui nous soient parvenues. Malheureusement cette merveilleuse concordance à laquelle Laplace a dû peut-être une partie de l'éclat de sa plus belle découverte, est sensiblement altérée par les approximations suivantes, et la diminution qu'éprouve le coefficient de l'*équation séculaire* doit produire un ralentissement correspondant dans la marche progressive de cette équation. En effet, en substituant à la place de l'intégrale $\int (e'^2 - E'^2) ndt$, sa valeur (n° 135, Livre VII),

$$\int (e'^2 - E'^2)\, ndt = 1274'',185\, i^2 + 1'',920\, i^3,$$

où i représente le nombre de siècles écoulés depuis l'année que l'on a choisie pour époque, dans l'expression précédente de $\int \zeta' \, dt$, l'*équation séculaire* du moyen mouvement lunaire se réduit à

$$7'',99218\, i^2 + 0'',01204\, i^3.$$

C'est-à-dire que cette équation se trouvera diminuée

de *deux secondes et demie environ* de la valeur qu'on s'était habitué à lui attribuer, n° 135, Livre VII (*).

Il résulte donc comme une conséquence irréfutable des recherches auxquelles nous venons de nous livrer : 1° que les formules jusqu'ici employées pour déterminer l'*inégalité séculaire* du moyen mouvement lunaire, et qui résultent des formules différentielles dans lesquelles la *longitude vraie* de la Lune a été prise pour la variable indépendante, n'avaient point toute la précision nécessaire à l'évaluation d'un élément si délicat; 2° que le coefficient de l'*équation séculaire* ou l'accélération du moyen mouvement lunaire pen-

---

(*) Les astronomes ne sont point parfaitement d'accord entre eux sur la valeur exacte de cet élément si important du mouvement lunaire. Dunthorne, qui, après que Halley eut pour la première fois découvert l'existence de l'accélération séculaire du moyen mouvement de la Lune, avait tenté de le déterminer par la comparaison des anciennes observations aux modernes, le faisait de 10″,01, Mayer le réduisit à 6″,99 dans ses premières Tables, et l'a porté ensuite à 9″,01 dans la seconde édition. Lalande, par une discussion nouvelle de cet objet, a été conduit au résultat de Dunthorne. Enfin, Laplace dit que Bouvard, par une nouvelle discussion des éclipses déjà connues, et de celles qu'il a extraites d'un manuscrit arabe d'Ibn-Junys, a trouvé un résultat peu différent de celui que lui-même avait obtenu de la théorie. C'est cette valeur (10″,6) que Mason a adoptée dans ses Tables. On voit que le coefficient que nous avons déduit pour la première fois d'un calcul direct et rigoureux, tient le milieu entre les deux déterminations de Mayer, il serait donc possible qu'une nouvelle discussion des anciennes éclipses fît définitivement pencher la balance du côté de cet habile astronome, et rétablît la concordance parfaite entre la théorie et l'observation

dant le premier siècle, généralement admis par les astronomes, d'après le résultat des recherches de Bouvard sur cet objet, couronnées par l'Académie des Sciences, en 1800, est de 3″ environ plus fort que celui qui est indiqué par une analyse rigoureuse; 3° que le coefficient de l'*équation séculaire* déterminé par une première approximation, c'est-à-dire en n'ayant égard qu'à la première puissance de la force perturbatrice, éprouve une altération sensible par la considération des puissances supérieures de cette force, que cette altération, quelle qu'en soit l'importance, est une quantité négative, que par conséquent le coefficient de l'*équation séculaire* doit nécessairement tomber au-dessous de 10″,694, valeur qu'on trouve pour ce coefficient lorsqu'on ne tient compte que des termes du premier ordre. On pourra donc écarter comme défectueuses toutes les évaluations qui dépasseraient cette limite.

Quoique ces résultats soient contraires aux idées généralement adoptées, et paraissent troubler l'accord qui semblait exister sur l'un des points les plus remarquables du système du monde, entre l'astronomie théorique et l'astronomie pratique, comme notre analyse est, à ce que nous supposons, d'une exactitude rigoureuse, ou que du moins si quelques légères erreurs s'y étaient glissées, elles ne pourraient porter que sur des quantités à peu près insensibles, qu'elle émane d'ailleurs directement, et sans aucune transformation, des formules différentielles du mouvement troublé dans lesquelles la longitude moyenne de l'astre troublé a été pris pour la variable indépen-

dante, nous pensons qu'il est hors de doute qu'il y a lieu de diminuer la grandeur du coefficient de l'*inégalité séculaire* du moyen mouvement lunaire qu'on avait déduite autrefois des observations, et que les astronomes, par la comparaison plus attentive des anciennes éclipses aux Tables lunaires si perfectionnées de nos jours, confirmeront sur ce point les résultats de l'analyse, et rétabliront l'accord parfait qui doit toujours exister entre la théorie et l'observation, accord sans lequel les plus belles conceptions de l'esprit humain ne présenteraient plus que doute et incertitude.

ADDITION.

Tandis que le Supplément qui précède était sous presse, la discussion scientifique à laquelle a donné lieu la détermination du coefficient de l'*équation séculaire* du mouvement moyen de la Lune, et dont il a été question dans le préambule, a pris de plus grandes proportions ; plusieurs géomètres distingués sont descendus dans l'arène et chacun a donné, par des méthodes différentes, des valeurs particulières, dont les unes s'écartent sensiblement des résultats indiqués par les observations, dont les autres offrent à cet égard plus de concordance avec elles, mais qui toutes diffèrent considérablement du résultat que nous avons obtenu en employant les formules directes, qui nous ont servi à déterminer toutes les inégalités périodiques et à longues périodes du mouvement lunaire, et qui semblent aussi les plus propres à déterminer d'une manière exacte ses variations séculaires D'un autre côté, notre théorie a reçu dans ces derniers temps une importante confirmation (*) : des Tables lunaires, qui paraissent principalement basées sur les expressions de la longitude, de la latitude et de la parallaxe équatoriale données n[os] 137, 138, 141 du Livre VII, ont été construites en Amérique et servent maintenant dans les États-Unis au calcul de tous les annuaires et éphémérides consacrés aux usages de l'astronomie ou de la navigation. Ces Tables représentent merveilleusement bien les observations; leurs écarts dans les cas les plus défavorables ne vont pas à 2″,5 et paraissent même pouvoir être aisément ramenées de 1″ en dessous de cette limite, en sorte qu'elles dépasseraient de beaucoup en précision celle qu'on peut attendre des meilleures observations; elles soutiennent dès à présent sans désavantage la

(*) Voir *Essai sur la Théorie de la Lune* par LUBBOCK, X[e] partie; 1860.

comparaison avec les Tables de Hansen, publiées récemment en Angleterre avec un grand luxe aux frais du gouvernement britannique, et qui ne sont, à vrai dire, que des Tables *empiriques* où la théorie a été sacrifiée au désir d'obtenir la plus grande concordance possible avec les observations, en recourant même à des moyens tout à fait étrangers à la loi de la gravitation universelle. Il est donc évident qu'avec quelque soin on parviendrait aisément à donner à ces Tables américaines un nouveau degré de perfection, et que le problème proposé aux géomètres par l'Académie des Sciences de Paris dans son programme de 1820 (*) : « Former par la seule théorie des Tables lunaires assez exactes pour suffire à tous les besoins de la pratique sans rien emprunter à l'observation que les données indispensables de la question, c'est-à-dire les éléments elliptiques du mouvement lunaire à une époque déterminée », serait ainsi complétement résolu. C'est donc pour nous une obligation nouvelle de revoir avec soin ceux de nos coefficients qui seraient encore susceptibles d'acquérir un plus grand degré d'exactitude en portant plus loin les approximations, et d'examiner en même temps avec la plus scrupuleuse attention les points qui pourraient, comme la détermination de l'*équation séculaire* du mouvement moyen, avoir laissé quelque doute dans des esprits d'ailleurs très-éclairés.

Laplace et après lui Damoiseau et M. Plana, qui ont développé ses formules en poussant plus loin les approximations, avaient supposé que dans la détermination des *équations séculaires* qui affectent le moyen mouvement de la Lune, les mouvements du périgée et des nœuds de son orbite, on peut regarder comme constante l'excentricité e' de l'orbite terrestre et n'avoir égard à sa variation que dans le résultat final, ou, ce qui revient au même, ils avaient déterminé le rapport des vitesses moyennes de la Lune dans son orbite réelle et dans son orbite elliptique, ainsi que les coefficients des mouvements moyens du périgée et des nœuds, comme si l'orbite terrestre était rigoureusement fixe et inaltérable. Cette supposition, évidemment, simplifie beaucoup le calcul, et je l'ai

(*) *Théorie analytique du Système du Monde*, tome IV, page 6.

adoptée dans tout le cours de mes recherches sur le coefficient de l'*équation séculaire*. Cependant quelques géomètres en ont contesté l'exactitude; ils ont suivi les idées émises à cet égard pour la première fois par Poisson dans un Mémoire très-remarquable sur la Théorie de la Lune, lu à l'Académie des Sciences en 1833, et que nous avons déjà eu l'occasion de citer dans le préambule du Livre VII de cet ouvrage (t. IV, p. 15) (*). Poisson veut qu'on ait égard à la variation de l'excentrité e' de l'orbe terrestre dans les formules différentielles du mouvement troublé; mais on est amené ainsi, par les intégrations successives, à introduire dans l'expression du coefficient de l'*équation séculaire* une foule de termes nouveaux qui écartent d'une manière très-sensible le résultat final de l'exactitude et de l'accord qu'il devrait présenter avec les observations. Cette raison suffirait seule sans doute pour faire repousser une pareille hypothèse; nous montrerons en outre qu'elle est contraire aux vrais principes de la théorie des perturbations planétaires.

Mais il est bon de montrer d'abord comment les formules de la *variation des constantes arbitraires*, dans la supposition où l'on regarde comme invariable l'excentricité de l'orbite terrestre, reproduisent identiquement les différents termes du coefficient de l'*équation séculaire* que nous avons déterminé d'une manière toute différente dans le Supplément au Livre VII. Cette vérification est de nature à ne laisser aucun doute sur l'exactitude de nos résultats.

Reprenons l'expression de $d\varepsilon$, n° 93, Livre VII, en n'ayant égard qu'aux termes de l'ordre m^2 et m^3, il suffira de supposer

$$d\varepsilon = -2andt\left(a\frac{dR}{da}\right) + \frac{andt}{2}\left(e\frac{dR}{de}\right) + \frac{andt}{2}\left(\gamma\frac{dR}{d\gamma}\right). \quad (a)$$

Nous supposerons que dans cette formule a et n représentent les quantités que nous avons désignées par $a_{\prime}$ et $n_{\prime}$ dans le Supplément, mais nous supprimerons les accents, pour plus de simplicité.

(*) *Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. XIII (1834).

En observant que $a^2\left(\frac{dR}{da}\right) = 2aR$, par le n° 2 du Supplément et par le n° 97 du Livre VII, on trouvera

$$a^2\left(\frac{dR}{da}\right) = \left(\frac{9}{8}m^2 + \frac{825}{32}m^3\right)e^2e'^2,$$

$$a\left(e\frac{dR}{de}\right) = \left(\frac{9}{8}m^2 + \frac{825}{16}m^3\right)e^2e'^2.$$

Par le n° 3 du Supplément et le n° 97 du Livre VII, on aura

$$a^2\left(\frac{dR}{da}\right) = \left(-\frac{9}{8}m^2 + \frac{93}{32}m^3\right)e'^2\gamma^2,$$

$$a\left(\gamma\frac{dR}{d\gamma}\right) = \left(-\frac{9}{8}m^2 + \frac{33}{16}m^3\right)e'^2\gamma^2.$$

En substituant ces valeurs dans la formule (a) on en conclut

$$d\varepsilon = \Big\{ \Big[\left(-\frac{9}{4} + \frac{9}{16} = -\frac{27}{16}\right)m^2 + \left(-\frac{825}{16} + \frac{825}{32} = -\frac{825}{32}\right)m^3\Big]e^2e'^2 + \Big[\left(\frac{9}{4} - \frac{9}{16} = \frac{27}{16}\right)m^2 + \left(-\frac{93}{16} + \frac{33}{32} = -\frac{153}{32}\right)m^3\Big]e'^2\gamma^2 \Big\}\,ndt.$$

Considérons maintenant les termes de l'ordre m^4, indépendants à la fois de l'excentricité et de l'inclinaison à l'écliptique de l'orbite lunaire. Il suffira, dans ce cas, n° 102, Livre VII, de supposer

$$d.\delta\varepsilon = -2dt.\delta.a^2n\frac{dR}{da} + \frac{dt}{2}\delta.an\left(e\frac{dR}{de}\right). \qquad (b)$$

On a d'ailleurs

$$\delta.an\left(a\frac{dR}{da}\right) = an\delta.\left(a\frac{dR}{da}\right) + \delta an.\left(a\frac{dR}{da}\right),$$

$$\delta.an\left(e\frac{dR}{de}\right) = an\delta.\left(e\frac{dR}{de}\right) + \delta an.\left(e\frac{dR}{de}\right).$$

Le dernier terme de la seconde équation ne pouvant produire que des termes dépendants de l'excentricité e que nous négligeons, on peut le supprimer.

Nous avons trouvé, nos 16 et 45, Livre VII :

$$aR = \frac{m^2}{4} - \frac{179}{96}m^4 + \left(\frac{3}{8}m^2 - \frac{799}{64}m^4\right)e'^2.$$

En multipliant cette valeur par le rapport $\frac{a_1}{a} = \left(1 - \frac{2}{3}m^2 - m^2e'^2\right)$ (n° 4, Supplément) et supprimant les accents, on aura

$$aR = \frac{m^2}{4} - \frac{65}{32}m^4 + \left(\frac{3}{8}m^2 - \frac{831}{64}m^4\right)e'^2.$$

On peut d'ailleurs obtenir directement cette valeur par les formules de la variation des constantes arbitraires, en substituant dans l'expression de δR, n° 100, Livre VII, à la place de $\delta\zeta$, δa, etc., leurs valeurs données par la première approximation.

En vertu de l'équation $a\frac{dR}{da} = 2R$, on en conclura donc

$$an\delta.\left(a\frac{dR}{da}\right) = -2n\left[\frac{65}{32}m^4 + \frac{831}{64}m^4e'^2\right].$$

Soit

$$aR = m^2F\cos 2\xi + m^2F'e'\cos(2\xi - \varphi') + m^2F''e'\cos(2\xi + \varphi').$$

En vertu de la formule n° 87, Livre VII, on a

$$\delta a = 2a^2\int d'R. \qquad (m)$$

En observant que $\int d'R = \int\left(\frac{dR}{ndt}\right)ndt$ et que nous avons supposé ici $\xi = (1-m)nt + \varepsilon - \varepsilon'$, on trouve aisément, en négligeant les termes d'un ordre supérieur à m^2 :

$$a\int d'R = m^2F\cos 2\xi + m^2F'e'\cos(2\xi - \varphi') + m^2F''e'\cos(2\xi + \varphi').$$

6.

Si l'on substitue cette valeur dans la formule (m), que l'on combine l'expression résultante avec celle de $a\left(\frac{dR}{da}\right)$ tirée de l'équation $\left(a\frac{dR}{da}\right)=2R$, en n'ayant égard qu'aux termes non périodiques et en observant que $\delta.an=-\frac{1}{2}n\delta a$, on trouvera

$$\left(a\frac{dR}{da}\right)\delta.an=-m'n(F'+F'^{2}e'^{2}+F''^{2}e'^{2}).$$

Pour réduire cette valeur en nombres, observons qu'on a par le développement de la fonction R, n° 6, Livre VII,

$$F=\frac{3}{4}\left(1-\frac{5}{2}e'^{2}\right),\qquad F'=\frac{21}{8},\qquad F''=-\frac{3}{8},$$

et par conséquent

$$\left(a\frac{dR}{da}\right)\delta.an=-n\left[\frac{9}{16}m'\right.$$
$$\left.+\left(-\frac{45}{16}+\frac{441}{64}+\frac{9}{64}=\frac{135}{32}\right)m'e'^{2}\right].$$

En vertu de cette valeur et de celle de $an\delta.\left(a\frac{dR}{da}\right)$, on aura donc

$$\delta.an\left(\frac{dR}{da}\right)=n\left[-\left(\frac{65}{16}+\frac{9}{16}=\frac{37}{8}\right)m'\right.$$
$$\left.-\left(\frac{831}{32}+\frac{135}{32}=\frac{483}{16}\right)m'e'^{2}\right].$$

Maintenant, on a généralement

$$\delta.\left(c\frac{dR}{de}\right)=\left(\frac{dR}{dc}\right)\delta c+c\delta.\frac{dR}{dc}.$$

Soit

$$aR = m^2 Ge\cos\varphi + m^2 G' e\cos(2\xi - \varphi) + m^2 G'' e\cos(2\xi + \varphi)$$
$$+ m^2 H ee' \cos(\varphi - \varphi') + m^2 H' ee' \cos(\varphi + \varphi')$$
$$+ m^2 K ee' \cos(2\xi - \varphi - \varphi') + m^2 K' ee' \cos(2\xi - \varphi + \varphi')$$
$$+ m^2 K'' ee' \cos(2\xi + \varphi - \varphi') + m^2 K''' ee' \cos(2\xi + \varphi + \varphi').$$

On en conclura

$$a\left(\frac{dR}{de}\right) = m^2 G\cos\varphi + m^2 G'\cos(2\xi - \varphi) + m^2 G''\cos(2\xi + \varphi) + \text{etc.}$$

Pour former $a\delta.\frac{dR}{de}$, il suffira donc de faire varier dans cette quantité la constante ω, qui se trouve comprise dans l'arc $\varphi = cnt + \varepsilon - \omega$, la variation des autres constantes ne donnant dans le produit $e\delta.\frac{dR}{de}$ que des termes dépendants de l'excentricité e que nous négligeons; mais en observant qu'en n'ayant égard qu'aux termes précédents on a $e\frac{dR}{de} = R$ et par conséquent $e\frac{d^2R}{ded\omega} = \frac{dR}{d\omega}$, on aura ainsi

$$\delta.e\frac{dR}{de} = \frac{dR}{de}\delta e + \frac{dR}{ed\omega}e\delta\omega.$$

Si par les formules du n° 87, Livre VII, on forme les valeurs de δe et de $e\delta\omega$, qu'on substitue ces valeurs ainsi que celles de $\frac{dR}{de}$ et de $\frac{dR}{ed\omega}$ dans la formule précédente, en n'ayant égard qu'aux termes non périodiques, on trouvera par un calcul très-simple, qu'il suffit d'indiquer ici (voir n° 97, Livre VII) :

$$a\delta.\left(e\frac{dR}{de}\right) = m^4\left\{G^2 - G'^2 + \frac{1}{3}G''^2 + e'^2\left(H^2 + H'^2 - K^2 - K'^2 + \frac{1}{3}K''^2 + \frac{1}{3}K'''^2\right)\right\}.$$

On a d'ailleurs, par le développement de R, n° 6, Livre VII,

$$G = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{2}e'^2\right), \qquad G' = -\frac{9}{4}\left(1 - \frac{5}{2}e'^2\right),$$
$$G'' = \frac{3}{4}\left(1 - \frac{5}{2}e'^2\right),$$

d'où l'on tire

$$G^2 - G'^2 + \frac{1}{3}G''^2 = \left(\frac{1}{4} - \frac{81}{16} + \frac{3}{16} = -\frac{37}{8}\right)$$
$$+ \left(\frac{3}{4} + \frac{405}{16} - \frac{15}{16} = \frac{201}{8}\right)e'^2.$$

On a ensuite

$$H = -\frac{3}{4}, \qquad H' = -\frac{3}{4}.$$
$$K = -\frac{63}{8}, \qquad K' = \frac{9}{8}, \qquad K'' = \frac{21}{8}, \qquad K''' = -\frac{3}{8},$$

d'où l'on conclut

$$H^2 + H'^2 - K^2 - K'^2 + \frac{1}{3}K''^2 + \frac{1}{3}K'''^2$$
$$= \left(\frac{9}{16} + \frac{9}{16} - \frac{3969}{64} - \frac{81}{64} + \frac{147}{64} + \frac{3}{64} = -\frac{957}{16}\right),$$

en observant que l'on a

$$\delta . an\left(e\frac{dR}{de}\right) = an\,\delta . \left(e\frac{dR}{de}\right),$$

on aura, par conséquent,

$$\delta . an\left(e\frac{dR}{de}\right) = n\left[-\frac{37}{8}m' + \left(\frac{201}{8} - \frac{957}{16} = -\frac{555}{16}\right)m'e'^2\right].$$

Si l'on substitue cette valeur et celle de $\delta . an\left(a\frac{dR}{da}\right)$, calculée

plus haut, dans la formule (b), on aura

$$d.\delta\epsilon = \left[\left(\frac{37}{4} - \frac{37}{16} = \frac{111}{16}\right) m^4 \right.$$
$$\left. + \left(\frac{483}{8} - \frac{555}{32} = \frac{1377}{32}\right) m^4 e'^2 \right] ndt.$$

En joignant à ces termes ceux qui résultent de la première approximation, et qui se déduisent aisément des formules rapportées nos 93 et 96 du Livre VII, on aura donc pour la valeur complète de $d.\delta\epsilon$

$$d.\delta\epsilon = \left[\left(- m^2 + \frac{111}{16} m^4 + \left(-\frac{3}{2} m^2 + \frac{1377}{32} m^4\right) e'^2\right)\right] ndt.$$

La valeur de $d.\delta\zeta$ contient (no 92, Livre VII) le terme

$$d.\delta\zeta = \frac{3}{2} a^2 ndt \left(\int d'R\right)^2. \qquad (n)$$

Nous avons trouvé précédemment

$$a \int d'R = m^2[F \cos 2\xi + F' e' \cos(2\xi - \varphi') + F'' e' \cos(2\xi + \varphi')],$$

et par suite

$$a^2 \left(\int d'R\right)^2 = \frac{m^4}{2} (F^2 + F'^2 e'^2 + F''^2 e'^2).$$

En substituant cette valeur dans la formule (n) on aura donc

$$d.\delta\zeta = \frac{3}{4} m^4 (F^2 + F'^2 e'^2 + F''^2 e'^2) ndt,$$

ou bien, en vertu des valeurs précédentes de F, F' et F'' :

$$d.\delta\zeta = \frac{3}{4} m^4 \left(\frac{9}{16} + \frac{135}{32} e'^2\right) ndt,$$

En réunissant cette valeur à celle de $d.\delta\epsilon$ donnée plus haut,

on a

$$\frac{d.\delta\zeta}{dt}+\frac{d.\delta\varepsilon}{dt}=n\left\{-m^2+\left(\frac{111}{16}+\frac{27}{64}=\frac{471}{64}\right)m^4\right.$$
$$\left.+\left[-\frac{3}{2}m^2+\left(\frac{1377}{32}+\frac{405}{128}=\frac{5913}{128}\right)m^4\right]e'^2\right\}.$$

En joignant à cette expression les termes de $\frac{d.\delta\varepsilon}{dt}$ dépendants des produits $e^2 e'^2$, $e'^2\gamma^2$ déterminés précédemment, et en observant que v représentant la longitude vraie de la Lune dans l'orbite troublée, on a, en faisant abstraction des termes périodiques, $v=nt+\delta\zeta+\delta\varepsilon$ et par conséquent $\frac{dv}{dt}=n\left(1+\frac{d.\delta\zeta}{ndt}+\frac{d.\delta\varepsilon}{ndt}\right)=\text{n}$, en représentant par n le moyen mouvement déduit des observations, on trouvera enfin

$$\begin{aligned}\text{n}=n\Big[1-m^2+\frac{471}{64}m^4-\left(\frac{3}{2}m^2-\frac{5913}{128}m^4\right)e'^2 \\ -\left(\frac{27}{16}m^2+\frac{825}{32}m^3\right)e^2e'^2 \\ +\left(\frac{27}{16}m^2-\frac{153}{32}m^3\right)e'^2\gamma^2\Big],\end{aligned}$$

valeur qui coïncide dans l'ordre d'approximation où nous nous arrêtons ici, avec celle que nous avons trouvée par un procédé tout différent dans le n° 4 du Supplément, et qui montre le parfait accord des deux méthodes.

Il faudrait d'après ce que dit Poisson dans son Mémoire cité précédemment (§ 28) pour compléter la valeur précédente de n, lui ajouter la partie qui provient des termes non périodiques de l'ordre m^4, qu'introduit indirectement, dans l'expression finie du grand axe et du moyen mouvement de la Lune, la variation de l'excentricité e' de l'orbe terrestre, et dont nous avons fait jusqu'ici abstraction. Nous allons calculer cette partie de la valeur de n en suivant les idées de ce géomètre et en négligeant toutefois les quantités qui seraient d'un ordre supérieur à m^4.

Pour cela, reprenons la valeur de $d.\delta\zeta$, n° 92, Livre VII :

$$\frac{d.\,\delta\zeta}{dt} = -\,3an\int d'.\delta\mathrm{R} + \frac{3\,a^2 n}{2}\left(\int d'\mathrm{R}\right)^2. \qquad \text{(A)}$$

En observant qu'on a supposé $d'\mathrm{R} = \left(\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon}\right) ndt$, en différentiant la caractéristique δ, on aura

$$\frac{d'.\delta\mathrm{R}}{dt} = n\delta.\left(\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon}\right) + \left(\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon}\right)\delta n.$$

Ou bien, en substituant pour δn sa valeur tirée de l'équation (7), (n° 43, Livre II),

$$\frac{d'.\delta\mathrm{R}}{ndt} = \delta.\left(\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon}\right) - 3an\left(\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon}\right)\int\left(\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon}\right)dt. \qquad \text{(B)}$$

Calculons les différentes parties de cette formule, en nous bornant toutefois aux termes non périodiques multipliés par e'^2 de l'ordre m^4, et indépendants de l'excentricité e et de l'inclinaison γ de l'orbe lunaire à l'écliptique, qu'elle peut renfermer.

Si dans l'expression de $\delta.\left(\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon}\right)$, donnée n° 90, Livre VII, on substitue pour $\delta\zeta$, δa, etc., leurs valeurs tirées des formules (A), n° 87, et qu'on néglige les termes qui ne produiraient aucune quantité de l'ordre de celles que nous considérons, on trouvera la formule suivante :

$$\begin{aligned}\delta.\left(\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon}\right) = &-3an^2\left(\frac{d^2\mathrm{R}}{d\varepsilon^2}\right)\int dt\int\left(\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon}\right)dt \\ &+2a^2n\left[\frac{d^2\mathrm{R}}{dad\varepsilon}\int\left(\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon}\right)dt - \frac{d^2\mathrm{R}}{d\varepsilon^2}\int\left(\frac{d\mathrm{R}}{da}\right)dt\right] \\ &+\frac{an}{e}\left[\frac{d^2\mathrm{R}}{d\varepsilon d\varpi}\int\left(\frac{d\mathrm{R}}{de}\right)dt - \frac{d^2\mathrm{R}}{d\varepsilon de}\int\left(\frac{d\mathrm{R}}{d\varpi}\right)dt\right].\end{aligned}$$

Si l'on considère d'abord la partie de cette expression indépendante de l'excentricité e de l'orbe lunaire, il suffira de supposer,

comme précédemment,

$$aR = m^2 F\cos 2\xi + m^2 F' e' \cos(2\xi - \varphi') + m^2 F'' e' \cos(2\xi + \varphi').$$

Si, après avoir différentié cette expression par rapport à a et à ε, on intègre ensuite par parties les valeurs résultantes multipliées par dt, en considérant comme variables les trois coefficients F, $F'e'$, $F''e'$, à raison de la variabilité de l'élément e' qu'ils contiennent, mais en négligeant les différences secondes de e', parce que la lenteur avec laquellle cet élément varie les rendrait à peu près insensibles, on trouvera que ces intégrales renferment les termes suivants :

$$\int\left(\frac{dR}{d\varepsilon}\right)dt = -\frac{m^2}{2an^2}\left[\frac{dF}{dt}\sin 2\xi + F'\frac{de'}{dt}\sin(2\xi-\varphi') + F''\frac{de'}{dt}\sin(2\xi+\varphi')\right],$$

$$\int\left(a\frac{dR}{da}\right)dt = \frac{m^2}{2an^2}\left[\frac{dF}{dt}\cos 2\xi + F'\frac{de'}{dt}\cos(2\xi-\varphi') + F''\frac{de'}{dt}\cos(2\xi+\varphi')\right].$$

On aura d'ailleurs, en effectuant les opérations indiquées,

$$a^2\frac{d^2R}{da\,d\varepsilon} = -4m^2[F\sin 2\xi + F'e'\sin(2\xi-\varphi') + F''e'\sin(2\xi+\varphi')],$$

$$a\frac{d^2R}{d\varepsilon^2} = -4m^2[F\cos 2\xi + F'e'\cos(2\xi-\varphi') + F''e'\cos(2\xi+\varphi')],$$

d'où il est aisé de conclure

$$2a^2n\left[\frac{d^2R}{da\,d\varepsilon}\int\left(\frac{dR}{d\varepsilon}\right)dt - \frac{d^2R}{d\varepsilon^2}\int\left(\frac{dR}{da}\right)dt\right] = \frac{4m^4}{an}\left(F\frac{dF}{dt} + F'^2\frac{e'de'}{dt} + F''^2\frac{e'de'}{dt}\right).$$

On trouverait, par un calcul semblable,

$$-3an^2\left(\frac{d^2R}{d\varepsilon^2}\right)\int dt\int\left(\frac{dR}{d\varepsilon}\right)dt = \frac{3m^4}{an}\left(F\frac{dF}{dt} + F'^2\frac{e'de'}{dt} + F''^2\frac{e'de'}{dt}\right).$$

Considérons la troisième partie de la formule (B), et supposons dans R des termes de cette forme

$$aR = m^2 Pe\cos(int + i\varepsilon - \omega) + m^2 Qe\sin(int + i\varepsilon - \omega).$$

Si l'on différentie par rapport à ω et e cette valeur, et qu'après les avoir multipliées par dt on intègre ensuite par parties les fonctions résultantes, on trouvera, par un calcul semblable à celui que nous venons d'effectuer, que les intégrales finales contiennent les termes suivants,

$$\int\left(\frac{dR}{ed\omega}\right)dt = \frac{m^2}{i^2an^2}\left(\frac{dP}{dt}\sin\lambda - \frac{dQ}{dt}\cos\lambda\right),$$

$$\int\left(\frac{dR}{de}\right)dt = \frac{m^2}{i^2an^2}\left(\frac{dP}{dt}\cos\lambda + \frac{dQ}{dt}\sin\lambda\right),$$

où nous faisons, pour abréger, $\lambda = i(nt + \varepsilon) - \omega$; on a d'ailleurs

$$\frac{d^2R}{d\varepsilon\, de} = -\frac{m^2 i}{a}(P\sin\lambda - Q\cos\lambda),$$

$$\frac{d^2R}{ed\omega\, d\varepsilon} = \frac{m^2 i}{a}(P\cos\lambda + Q\sin\lambda),$$

d'où l'on conclura

$$an\left[\frac{d^2R}{ed\omega\, d\varepsilon}\int\left(\frac{dR}{de}\right)dt - \frac{d^2R}{d\varepsilon\, de}\int\left(\frac{dR}{ed\omega}\right)dt\right]$$
$$= \frac{m^4}{ian}\left(P\frac{dP}{dt} + Q\frac{dQ}{dt}\right). \qquad (C)$$

Cela posé, si l'on considère d'abord dans la fonction R les termes de cette forme

$$aR = m^2 Ge\cos\varphi + m^2 Hee'\cos(\varphi - \varphi') + m^2 H'ee'\cos(\varphi + \varphi'),$$

il est évident qu'il suffira, pour leur appliquer la formule précédente, de supposer $i = 1$, et de faire successivement $P = G$, $Q = 0$, $P = He'\cos\varphi'$, $Q = He'\sin\varphi'$, $P = H'e'\cos\varphi'$,

$Q = -H'c'\sin\varphi'$, on aura donc, en vertu de ces termes,

$$\frac{m^4}{ian}\left(P\frac{dP}{dt}+Q\frac{dQ}{dt}\right)=\frac{m^4}{an}\left(G\frac{dG}{dt}+H^2\frac{e'de'}{dt}+H'^2\frac{e'de'}{dt}\right).$$

Soit maintenant

$$aR = m^2G'e\cos(2\xi-\varphi)+m^2Kee'\cos(2\xi-\varphi-\varphi') + m^2K'ee'\cos(2\xi-\varphi+\varphi'),$$

il suffira de faire, dans la formule (C), $i=-1$, et successivement, $P = G'\cos l'$, $Q = -G'\sin l'$, $P = K\cos(l'+\varphi')$, $Q = -K\sin(l'+\varphi')$, $P = K'\cos(l'-\varphi')$, $Q = -K'\sin(l'-\varphi')$, en supposant, pour abréger, $l' = 2n't+2\epsilon'$, on aura ainsi

$$\frac{m^4}{ian}\left(P\frac{dP}{dt}+Q\frac{dQ}{dt}\right)=-\frac{m^4}{an}\left(G'\frac{dG'}{dt}+K^2\frac{e'de'}{dt}+K''^2\frac{e'de'}{dt}\right).$$

Soit enfin

$$aR = m^2G''e\cos(2\xi+\varphi)+m^2K''ee'\cos(2\xi+\varphi-\varphi') + m^2K'''ee'\cos(2\xi+\varphi+\varphi'),$$

il faudra faire, dans la formule générale (C), $i=3$, et successivement $P = G''\cos l'$, $Q = G''\sin l'$, $P = K''\cos(l'+\varphi')$, $Q = K''\sin(l'+\varphi')$, $P = K'''\cos(l'-\varphi')$, $Q = K'''\sin(l'-\varphi')$, et l'on aura, en vertu de ces termes,

$$\frac{m^4}{ian}\left(P\frac{dP}{dt}+Q\frac{dQ}{dt}\right)=\frac{m^4}{3an}\left(G''\frac{dG''}{dt}+K''^2\frac{e'de'}{dt}+K'''^2\frac{e'de'}{dt}\right).$$

En réunissant les différentes parties de la valeur de $\delta\cdot\left(\frac{dR}{d\epsilon}\right)$ que nous venons de calculer, on aura

$$\begin{aligned}\delta\cdot\left(\frac{dR}{d\epsilon}\right)=&\frac{7m^4}{an}\left(F\frac{dF}{dt}+F'^2\frac{e'de'}{dt}+F''^2\frac{e'de'}{dt}\right)\\&+\frac{m^4}{an}\left(G\frac{dG}{dt}-G'\frac{dG'}{dt}+\frac{1}{3}G''\frac{dG''}{dt}\right)\\&+\frac{m^4}{an}\left(H^2+H'^2-K^2-K'^2+\frac{1}{3}K''^2+\frac{1}{3}K'''^2\right)\frac{e'de'}{dt}.\end{aligned}$$

Il nous reste à calculer le second terme de la formule (B). Or on a, par ce qui précède,

$$\frac{dR}{d\varepsilon} = -\frac{2m'}{a}\left[F\sin 2\xi + F'e'\sin(2\xi - \varphi') + F''e'\sin(2\xi + \varphi')\right],$$

$$\int \frac{dR}{d\varepsilon}dt = -\frac{m'}{2\,an^2}\left[\frac{dF}{dt}\sin 2\xi + F'\frac{de'}{dt}\sin(2\xi - \varphi') + F''\frac{de'}{dt}\sin(2\xi + \varphi')\right],$$

d'où l'on conclut

$$-3an^2\left(\frac{dR}{d\varepsilon}\right)\int\left(\frac{dR}{d\varepsilon}\right)dt = -\frac{3m'^2}{2a}\left(F\frac{dF}{dt} + F'^2\frac{e'de'}{dt} + F''^2\frac{e'de'}{dt}\right).$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation (B), qu'on multiplie par dt la formule résultante, et qu'on l'intègre, on trouvera enfin

$$\int d'.\delta R = \frac{11}{4}\frac{m'^2}{a}(F^2 + F'^2e'^2 + F''^2e'^2)$$
$$+ \frac{m'^2}{2a}\left(G^2 - G'^2e'^2 + \frac{1}{3}G''^2e'^2\right)$$
$$+ \frac{m'^2}{2a}(H^2 + H'^2 - K^2 - K'^2 + \frac{1}{3}K''^2 + \frac{1}{3}K'''^2)e'^2,$$

ou bien en substituant pour F, F', etc., leurs valeurs données précédemment, et en n'ayant égard, dans F^2 et G^2, qu'aux termes multipliés par e'^2,

$$\int d'.\delta R = \frac{m'^2}{a}\left(\frac{11}{4}\frac{135}{32} + \frac{1}{2}\frac{201}{8} - \frac{1}{2}\frac{957}{16} = -\frac{735}{128}\right)e'^2.$$

La seconde partie de la formule (A) ne produit aucun terme du genre de ceux que nous considérons. Si l'on substitue donc pour $\int d'.\delta R$ sa valeur dans cette formule, et qu'on joigne la

valeur de $\frac{d.\delta\zeta}{dt}$ qui en résultera, à celle qui entre dans l'équation

$$\mathrm{n} = n\left(1 + \frac{d.\delta\zeta}{ndt} + \frac{d.\delta\varepsilon}{ndt}\right),$$ et que nous avons déterminée précédemment, en n'ayant égard qu'aux termes simplement multipliés par e'^2, on aura enfin

$$\mathrm{n} = n\left[-\frac{3}{2}m^2 + \left(\frac{5913}{128} + \frac{2205}{128} = \frac{4059}{64}\right)m^4\right]e'^2.$$

Telle serait donc l'expression exacte de la valeur de n qui résulterait de l'analyse de Poisson. On voit que son premier effet serait d'augmenter du terme $\frac{2205}{128}m^4e'^2$ la valeur de cette quantité, que nous avons déterminée n° 4 du Supplément (p. 64), et il en résulterait une diminution correspondante de 0″,6987 sur le coefficient de l'*équation séculaire* du mouvement moyen (p. 75), que nous avons déjà trouvé par la théorie au-dessous de celui qui semble indiqué par les observations. Mais ce n'est rien encore : en poussant plus loin le même calcul, MM. Adams et Delaunay ont reconnu que cette diminution devenait de plus en plus considérable par les approximations successives, et ils ont donné du coefficient de l'*équation séculaire* une évaluation qui tombe au-dessous de 5″,7 (*), c'est-à-dire de la moitié de ce que devrait être ce coefficient pour représenter les anciennes éclipses, même dans les plus larges limites d'erreurs qu'on puisse supposer aux observations de ces temps reculés. Un tel résultat est inadmissible, et il accuse évidemment un vice capital dans le procédé par lequel il a été obtenu. En effet, l'intégration par parties, que nous avons effectuée pour nous conformer aux idées de Poisson, et qui laisse échapper une partie des quantités qu'elle devait déterminer, non-seulement ne satisfait pas l'esprit, mais elle est contraire à tous les principes suivis dans la théorie des perturbations planétaires, où l'on a toujours considéré comme constants dans les équations différentielles les éléments de la planète troublée et de la planète

(*) *Mémoires de la Société astronomique de Londres*, vol. XIX, n° 6.

perturbatrice. Sans cette condition, le théorème si remarquable de l'*invariabilité du grand axe* et *du moyen mouvement* n'aurait pas lieu pour les planètes, pas plus que pour la Lune, lorsqu'on pousse les approximations jusqu'au carré de la force perturbatrice. Il me paraît donc évident que, sans être absolument vicieuse en principe, l'analyse de Poisson ne saurait s'adapter au cas auquel il a voulu l'appliquer; les termes qui en résultent dans l'expression de l'*équation séculaire* du moyen mouvement lunaire ressemblent à ces arcs de cercle que l'intégration introduit dans les valeurs des coordonnées planétaires, et qui les rendraient bientôt fautives, si l'on n'employait des procédés particuliers pour les faire disparaître (*). Dans le cas qui nous occupe, si l'on voulait avoir égard à la variation de l'excentricité e' de l'orbe terrestre dans l'intégration des équations différentielles du mouvement troublé, il faudrait, en nommant ω' la longitude du périhélie, substituer à la place de $e' \sin\omega'$ et $e' \cos\omega'$ dans les formules du mouvement elliptique leurs valeurs qu'on peut représenter (n° 64, Livre VII) par deux suites finies de termes de la forme $\Sigma . B \sin(bt + 6)$ et $\Sigma . B \cos(bt + 6)$, les intégrations des formules (A) (n° 87, Liv. VII) s'effectueraient ensuite sans difficulté, et l'on démontrerait par l'analyse du n° 60, Livre II, qu'il n'en peut résulter dans la fonction $\int d'.\delta R$, et par suite dans l'expression du grand axe et du moyen mouvement de la Lune, aucun terme non périodique du moins parmi les quantités de l'ordre m^4.

Concluons donc que le procédé que nous avons employé pour déterminer le coefficient de l'*équation séculaire* du moyen mouvement de la Lune, dans le Supplément au VIIe Livre, est suffisamment justifié par une rigoureuse analyse, et que ce coefficient, par conséquent, où nous avons poussé les approximations jusqu'aux quantités du *septième* ordre, a toute l'exactitude que la question comporte.

(*) Voir *Supplément à la Théorie de la Lune*, par Plana, page 8; 1856.

ERRATA DU TOME IV.

Page 15, ligne 1 en remontant, *au lieu de* X, *lisez* XIII.

60, 11, *au lieu de* $3e^2 + 3e'^2$ *lisez* $2e^2 + 2e'^2$.

63, 23, *au lieu de* 6, *lisez* 3.

165, 9, *au lieu de* m^2, *lisez* m^4.

175, 7, *idem.*

295, 16, *au lieu de* $\frac{11}{2}$, *lisez* $\frac{11}{12}$.

422, 13, *au lieu de* $\delta\omega$ et $\delta\theta$, *substituez les valeurs différentielles* $d\omega$ et $d\theta$.

Ibid. 16, *après* leurs valeurs, *ajoutez* en intégrant.

433, 13, *au lieu de* $\frac{2}{2}$, *lisez* $\frac{2}{3}$.

572, 22, *au lieu de* 26659, *lisez* 6659.

586, 1 en remontant, *au lieu de* $\frac{265}{64}$, *lisez* $\frac{265}{24}$.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

